



Doctoral Thesis

## Numerical approaches to the geodynamo problem

**Author(s):**

Li, Kuan

**Publication Date:**

2012

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-007342477> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

DISS. ETH No. 20176

# Numerical approaches to the geodynamo problem

A dissertation submitted to  
ETH ZURICH

for the degree of  
Doctor of Sciences

presented by  
Kuan Li

Master of Science,  
University of Oulu, Finland

Date of birth  
Oct. 11, 1981

citizen of  
CHINA

accepted on the recommendation of  
Prof. Andrew Jackson, examiner  
Prof. Rainer Hollerbach, co-examiner  
Dr. Philip W. Livermore, co-examiner  
Dr. Alexandre Fournier, co-examiner

2011

## Abstract

Earth's magnetic field is generated and sustained in Earth's core by the nonlinear dynamical process known as dynamo action. The core magnetic field penetrates Earth's mantle and is observed and recorded on the surface of Earth. Scientific studies of the time evolution of Earth's magnetic field follow two lines: (1) geodynamo modeling and simulation and (2) inversion of observed geomagnetic data.

Following the approach of geodynamo modeling, namely solving the Navier-Stokes, the magnetic induction and the temperature equations simultaneously, we explored the possibilities for speeding up geodynamo computations in order to study a broader regime of control parameters. Spherical transforms are operations that transform from spectral to physical space and vice versa, and these spectral transforms of spherical harmonics are needed in every modern geodynamo code for the computation of nonlinear terms such as the advection of momentum. We tested the numerical complexity and accuracy of a fast algorithm for computing the spectral transform of spherical harmonics, invented by Driscoll and Healy (1994) and improved by Kunis and Potts (2003). Due to the stabilization step introduced by Kunis and Potts (2003), the fast algorithm exhibits  $cL^3$  complexity, instead of  $cL^2 \ln^2 L$  complexity, where  $L$  is the maximum spherical harmonic degree, equivalent to the resolution of the model and  $c$  is a prefactor. The fast algorithm is 50–100 times slower than the conventional one for spherical harmonic degrees  $L \leq 511$ .

For the geodynamo modeling, we also found an optimal Galerkin scheme for solving the dynamo system in a full sphere and tested the numerical convergence of the radial basis functions against a benchmark of the magnetic diffusion problem and by comparison to numerous kinematic

dynamos (Bachtiar et al., 2006; Dudley and James, 1989; Gubbins et al., 2000). The radial basis functions are constructed from a terse sum of one-sided Jacobi polynomials that not only satisfies the boundary conditions of matching to an electrically insulating exterior, but is everywhere infinitely differentiable, including at the origin. We tested two types of orthogonal radial basis sets with respect to different weight functions, (1) Legendre type with unit integration weight, (2) Chebyshev type with weight function,  $w = 1/\sqrt{1-r^2}$ , and found that both radial basis sets exhibit exponential convergence, superior for a given problem size to any other scheme hitherto reported. Numerically, the Legendre type basis functions converges even faster than the Chebyshev type, therefore they are preferred for the numerical modeling of full sphere problems.

Following the geomagnetic inversion approach, we developed a mathematical methodology, termed the adjoint dynamo model in continuous form, along with the corresponding numerical algorithm to apply to the problem of retrieving the spatial distribution of the velocity, magnetic and temperature fields in the past and predicting the time evolution of the fields in future by linking the surface magnetic observations with the underlying geodynamo model. Such an approach is termed variational data assimilation or 4DVar. We tested our analysis and the corresponding numerical algorithm on two illustrative problems in a whole sphere: one is a linear kinematic dynamo model, and the second is associated with the nonlinear Hall-effect dynamo. The algorithm exhibits reliable numerical accuracy and stability. Using closed-loop simulations with noise free data, we demonstrated the ability for the adjoint kinematic dynamo system and the adjoint Hall-effect system to retrieve unknown initial conditions, especially the ability to retrieve the unobserved toroidal magnetic field. Using both the analytical and numerical techniques we developed, the adjoint dynamo system can be solved directly with the same order of computational complexity as that required to solve the forward problem. The methodology now awaits application to real geomagnetic data, such as the global database of observations spanning the last 400 years (Jonkers et al., 2003).

## Zusammenfassung

Das Erdmagnetfeld wird durch nichtlineare dynamische Vorgänge im Erdkern erzeugt, was auch als Dynamoprozess bezeichnet wird. Das Magnetfeld des Kerns durchdringt den Erdmantel und wird an der Erdoberfläche gemessen und aufgezeichnet. Wissenschaftliche Untersuchungen der zeitlichen Entwicklung des Erdmagnetfelds lassen sich in zwei Kategorien einteilen: (1) Modellierung und Simulation des Geodynamos und (2) Inversion der gemessenen Magnetfelddaten.

Beim Modellieren des Geodynamos werden gleichzeitig die Navier-Stokes-Gleichungen, die magnetische Induktions- sowie die Temperaturgleichung gelöst. Wir haben Möglichkeiten erprobt, diese Berechnungen schneller zu machen, um einen grösseren Bereich von Kontrollparametern untersuchen zu können. Transformationen in Kugelfunktionen sind Operationen, die vom Frequenzbereich in den Ortsbereich (und umgekehrt) transformieren. Eine Entwicklung nach Kugelfunktionen wird in jedem modernen Geodynamo-Code zur Berechnung der nichtlinearen Terme, zum Beispiel des Advektionsterms, verwendet. Wir haben die numerische Komplexität und Genauigkeit eines schnellen Algorithmus zur Berechnung der Kugelfunktions-Transformation getestet, der von Driscoll und Healy (1994) entwickelt und von Kunis und Potts (2003) verbessert wurde. Wegen des Stabilisierungsschritts, den Kunis and Potts (2003) eingeführt haben, weist der Algorithmus  $cL^3$ -Komplexität anstatt von  $cL^2 \ln^2 L$ -Komplexität auf; dabei ist  $L$  der maximale Kugelfunktionsgrad gleichbedeutend mit der Auflösung des Modells,  $c$  ist ein Vorfaktor. Für die Kugelfunktionsgrade  $L \leq 511$  ist der schnelle Algorithmus 50–100 Mal langsamer als der konventionelle Algorithmus.

Darüber hinaus haben wir für die Modellierung des Geodynamos ein optimales Galerkin-Verfahren zur Lösung des Dynamosystems in einer Vollkugel gefunden. Die numerische Konvergenz der radialen Basisfunktionen haben wir gegen einen Vergleichslauf des magnetischen Diffusionsproblems und durch Vergleich mit zahlreichen kinematischen Dynamos getestet (Bachtiar et al., 2006; Dudley und James, 1989; Gubbins et al., 2000).

Die radialen Basisfunktionen werden aus einer abgeschnittenen Summe von einseitigen Jacobi-Polynomen gebildet, die nicht nur die Randbedingungen (elektrisch nichtleitender Aussenraum) erfüllt, sondern auch überall (auch im Ursprung) unendlich oft differenzierbar ist. Wir haben zwei Arten von orthogonalen radialen Basisfunktionen in Bezug auf verschiedene Gewichtungsfunktionen untersucht: (1) Legendre-artige mit Integrationsgewichtung eins und (2) Chebyshev-artige mit Gewichtung  $w = 1/\sqrt{1 - r^2}$ . Dabei haben wir herausgefunden, dass beide Arten von radialen Basisfunktionen exponentielle Konvergenz aufweisen, was bei gegebener Problemgrösse jedem bisher vorliegenden Verfahren überlegen ist. Die Legendre-artigen Basisfunktionen konvergieren numerisch sogar noch schneller als die Chebyshev-artigen. Sie sind daher für die Modellierung von Problemen in einer Vollkugel vorzuziehen.

Im Bereich der Inversion von Messdaten des Erdmagnetfelds haben wir ein mathematisches Verfahren entwickelt, das als adjungiertes Dynamomodell in zusammenhängender Form bezeichnet wird. Ausserdem haben wir den zugehörigen numerischen Algorithmus aufgesetzt, der angewendet wird, um die räumliche Verteilung von Geschwindigkeit, Magnetfeldstärke und Temperatur zu finden und die zukünftige Entwicklung dieser Felder vorherzusagen. Dies wird durch eine Kopplung der magnetischen Messungen an der Oberfläche an das zugrunde liegende Geodynamomodell erreicht. Ein solcher Ansatz wird als vierdimensionale Datenassimilation oder 4DVar bezeichnet. Wir haben unser Verfahren und den zugehörigen numerischen Algorithmus an zwei anschaulichen Problemen in einer Vollkugel ausprobiert, nämlich an einem linearen kinematischen Dynamomodell und dem nichtlinearen Hall-Effekt-Dynamo. Der Algorithmus weist eine zuverlässige numerische Genauigkeit und Stabilität auf. Durch Vorwärts- und anschliessende Inversion mit rauschfreien Daten haben wir gezeigt, dass unser Verfahren bei beiden Problemen die unbekanntes Anfangsbedingungen wiederfindet, besonders auch das nicht beobachtete toroidale Magnetfeld. Unter Verwendung der analytischen und numerischen Methoden, die wir entwickelt haben, kann das adjungierte Dynamosystem mit einem ähnlichen Rechenaufwand gelöst werden wie das Vorwärtsproblem. Das Ver-

fahren wartet nun darauf, auf Realdaten des Erdmagnetfelds angewendet zu werden, zum Beispiel auf eine globale Datenbank, die Beobachtungen der letzten 400 Jahre umfasst (Jonkers et al., 2003).