Universality in Gaussian random normal matrices

Author(s):
Riser, Roman Patrick

Publication Date:
2012

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-007593797

DISS. ETH Nr. 20468

Universality in Gaussian Random Normal Matrices

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels

DOKTOR DER WISSENSCHAFTEN

der

ETH ZÜRICH

vorgelegt von

ROMAN PATRICK RISER

DIPL. PHYS. ETH

geboren am

29. MAI 1977

von

UEKEN (AG)

Angenommen auf Antrag von

PROF. DR. GIOVANNI FELDER,
PROF. DR. ASHKAN NIKEGHBALI

2012

Abstract

In this thesis we prove the universality of the reproducing kernel (except for a nonrelevant phase) and the correlation functions of normal matrix models for Gaussian potentials in the limit when the dimension of the matrices n goes to infinity. We evaluate the kernel and the correlation functions at coordinates which converge to a common point in the complex plane. We scale with $n^{-1/2}$ so that the mean distance between eigenvalues is constant.

Our approach is based on orthonormal polynomials which in our case can be given by Hermite polynomials. We have found some identities that share similarities with the Christoffel-Darboux formula, which we know for the reproducing kernel of Hermitian random matrices. With help of these identities we can determine the asymptotics of derivatives of the kernel by the asymptotics of the orthonormal polynomials. For the latter we use the Plancherel-Rotach asymptotics to approximate the Hermite polynomials.

First we compute the asymptotics of the identities evaluated at the same coordinates, which reveals derivatives of the density of eigenvalues, later at coordinates in a neighborhood of a common point z_0. In both cases we find that the dominant term of the logarithm of the derivations is $nf(z)$ where f is a real-valued function. We show that f is zero on a ellipse which will be the boundary of the support of the density and that f is smaller than zero else. By integration we find the density and the kernel from which we can compute the correlation functions.

We estimate all the errors we have made in the approximations, give explicit error terms and prove that they vanish in the limit $n \to \infty$.

In the large n limit we get universality that holds uniformly in the complex plane (except in a neighborhood of the ellipse) and in the parameters of the Gaussian potential. The interesting result happens not inside of the ellipse, where the density is constant, but at the boundary of its support. When z_0 lies on the boundary, we have to rotate the coordinate system such that the real axis is normal on the boundary to find an universal law. We show that there, in scaled coordinates, the density is falling off to zero as the complementary error function. This term is also present in the correlation function. On

the boundary too, the universality is uniform.

Kurzfassung

In dieser Dissertation beweisen wir, dass der Kern und die Korrelationsfunktion der normalen Matrixmodellen für Gausssche Potentiale universell sind, wenn die Matrixdimension n gegen unendlich strebt. Wir werten den Kern und die Korrelationsfunktion bei Koordinaten aus, die mit $n^{-1/2}$ gegen einen gemeinsamen Punkt z_0 in der komplexen Ebene konvergieren. In diesen skalierten Koordinaten bleibt der mittlere Abstand zwischen den Eigenwerten konstant.

Für den Beweis benutzen wir die Methode der orthonormalen Polynome, welche in unserem Fall durch die hermiteschen Polynome ausgedrückt werden können. Wir haben Identitäten gefunden, die der Christoffel-Darboux Formel, welche wir im Zusammenhang mit hermiteschen Zufallsmatrizen kennen, ähneln. Mit Hilfe dieser Identitäten erhalten wir die Asymptotik von Differentialen des Kerns aus der Asymptotik der orthonormalen Polynome. Für letztere verwenden wir die Plancherel-Rotach Asymptotik.

Zuerst berechnen wir die Asymptotik der Identitäten, indem wir sie bei gleichen Koordinaten auswerten. So finden wir Differentiale der Dichte. Danach werten wir die Identitäten bei unterschiedlichen Koordinaten aus, die im Limes $n \to \infty$ gegen z_0 konvergieren. In beiden Fällen ist der dominante Term des Logarithmus der Differentiale durch nf gegeben, wobei $f(z)$ eine reellwertige Funktion ist. Wir zeigen, dass das Maximum von f auf dem Rand einer Ellipse liegt und f dort gleich null ist. Diese Ellipse wird sich als Rand des Supports der Dichte der Eigenwerte herausstellen. Mittels Integration können wir die Dichte und den Kern ermitteln. Mit Hilfe des letzteren können wir auch die Korrelationsfunktion berechnen.

Wir schätzen alle Fehler, welche von den Approximationen herrühren, mittels expliziten Schranken ab und beweisen, dass sie im Limes $n \to \infty$ verschwinden.

Wir erhalten Universalitäten, welche gleichmässig gültig sind, sowohl in der komplexen Ebene (ausser in einer Umgebung des Randes des Supports der Dichte) und in den Parameter der Gaussschen Potentiale. Auf dem Rand des Supports erhalten wir ein interessanteres Resultat als im Innern der Ellipse, wo die Dichte konstant ist. Um ein universelles

Gesetz auf dem Rand zu finden, müssen wir das Koordinatensystem so drehen, dass die reelle Achse normal auf dem Rand steht. Dann finden wir, in skalieren Koordinaten, dass die Dichte wie die komplementäre Fehlerfunktion gegen null abfällt. Dieser Term ist auch in der Korrelationsfunktion präsent. Auf dem Rand finden wir, dass die Universalität wiederum gleichmässig ist.