Continuation maps in Morse theory

Doctoral Thesis

Author(s):
Komani, Driton

Publication date:
2012

Permanent link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-009764693

DISS. ETH No. 20889

CONTINUATION MAPS IN MORSE THEORY

A dissertation submitted to

ETH ZÜRICH

for the degree of

DOCTOR OF SCIENCES

presented by

Driton KOMANI

Dipl. Math. ETH Zürich

born 30.12.1982

citizen of Luzern LU, Switzerland

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Dietmar SALAMON, examiner
Prof. Dr. Michael HUTCHINGS, co-examiner
Prof. Dr. Paul BIRAN, co-examiner

2012

Abstract

Dynamical processes in nature may be described by differential equations. These differential equations depend on parameters that are not known precisely. One only captures qualities of differential equations that remain visible under small perturbations of the equation. Mathematically this means that one is interested in geometric invariants of dynamical systems. Non-degenerate critical points of the dynamical system are such examples. They stay non-degenerated while degenerated critical points may be perturbed away or produce two non-degenerated critical points. So degeneracies can be perturbed away. That is true if one considers a single differential equation. The situation changes if one considers a *family* of differential equations. In a one parameter family of dynamical systems it might well be that the degeneracies can't be perturbed away. In this thesis we consider generic one parameter families of gradients and three different continuation maps determined by a given family. We prove that all continuation maps are equal.

More precisely: Let $f : M \to \mathbb{R}$ be a Morse function on a not necessarily compact manifold M and g a metric on M such that the flow φ^t induced by $\dot{x} = -\nabla f(x)$ is Morse-Smale on a compact isolated invariant set S. The Morse homology (with integer coefficients) defined by the Morse-Smale triple (S, f, g) is denoted by $HM_*(S, f, g)$ and its homological Conley index is denoted by $HC_*(S, f, g)$. A continuation $(S, f, g) := \{(S_\lambda, f_\lambda, g_\lambda)\}_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1}$ connecting two Morse-Smale triples (S_0, f_0, g_0) and (S_1, f_1, g_1) determines three different continuation maps

(1) $\Phi_{\mathbf{con}}(S, f, g) : HC_*(S_0, f_0, g_0) \to HC_*(S_1, f_1, g_1)$

(2) $\Phi_{\mathbf{flo}}(S, f, g) : HM_*(S_0, f_0, g_0) \to HM_*(S_1, f_1, g_1)$

(3) $\Phi_{\mathbf{bif}}(S, f, g) : HM_*(S_0, f_0, g_0) \to HM_*(S_1, f_1, g_1)$.

The map $\Phi_{\mathbf{con}}(S, f, g)$ is the *Conley continuation map* [1]. The map $\Phi_{\mathbf{flo}}(S, f, g)$ is the *Floer continuation map* defined by counting orbits of $\dot{x} = -\nabla f_t(x)$, where λ is replaced by the time parameter t. The map

$\Phi_{\mathbf{bif}}(S,f,g)$ is the *Floer bifurcational continuation map* and is defined by studying the change of the orbit structure of $\dot{x} = -\nabla_\lambda f_\lambda(x)$ at bifurcations. The Conley index of a Morse-Smale triple is isomorphic to its Morse homology

$$\alpha : HC_*(S,f,g) \to HM_*(S,f,g)$$

see Theorem A. In Theorem C we prove that the continuation map $\Phi_{\mathbf{flo}}(S,f,g)$ is isomorphic to the Conley continuation map $\Phi_{\mathbf{con}}(S,f,g)$ meaning

$$\Phi_{\mathbf{con}}(S,f,g) = \alpha \circ \Phi_{\mathbf{flo}}(S,f,g) \circ \alpha^{-1}.$$

If $f = \{f_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ is a family of Morse functions f_λ we prove in Theorem D that

$$\Phi_{\mathbf{con}}(S,f,g) = \alpha \circ \Phi_{\mathbf{bif}}(S,f,g) \circ \alpha^{-1}.$$

We think that the assumption that f_λ is Morse for all $\lambda \in [0,1]$ can be removed.

Zusammenfassung

Dynamische Prozesse in der Natur können durch Differentialgleichungen beschrieben werden. Diese Differentialgleichungen sind abhängig von Parametern, die nicht genau bekannt sind. Man erfasst nur Qualitäten von Differentialgleichungen, die sichtbar unter kleinen Störungen der Gleichung bleiben. Mathematisch bedeutet dies, dass ein Interesse an geometrischen Invarianten von dynamischen Systemen besteht. Nicht-entartete Singularitäten eines dynamischen Systems sind solche Beispiele. Diese bleiben nicht-entartet bezüglich Störungen, während entartete Singularitäten weggestört werden können oder in neue nicht-entarteten Singularitäten gestört werden können. Entartungen kann man also wegstören. Das ist wahr, wenn man eine einzige Differentialgleichung anschaut. Die Situation ändert sich, wenn man eine *Familie* von Differentialgleichungen betrachtet. In einer einparametrigen Familie von dynamischen Systemen kann es gut sein, dass die Entartung nicht weggestört werden kann. In dieser Doktorarbeit betrachten wir einparametrige Familien von dynamischen Systemen, welche drei verschiedene Fortsetzungsabbildungen zwischen den Invarianten bestimmen. Wir beweisen, dass die drei Fortsetzungsabbildungen gleich sind.

Genauer: Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Morse Funktion auf einer möglicherweise nicht kompakten Mannifaltigkeit M und g eine glatte Metrik auf M, so dass der lokale Fluss φ^t induziert durch $\dot{x} = -\nabla f(x)$ auf einer kompakten isoliert invarianten Menge S die Morse-Smale Bedingung erfüllt. Die Morse Homologie (über den ganzen Zahlen) des Morse-Smale Tripels (S, f, g) gegeben durch $HM_*(S, f, g)$ und der homologische Conley Index ist gekennzeichnet durch $HC_*(S, f, g)$. Eine Fortsetzung $(S, f, g) := \{(S_\lambda, f_\lambda, g_\lambda)\}_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1}$ zwischen zwei Morse-Smale Tripel (S_0, f_0, g_0) und (S_1, f_1, g_1) induziert drei verschiedene Fortsetzungsabbildungen:

(1) $\Phi_{\mathbf{con}}(S, f, g) : HC_*(S_0, f_0, g_0) \to HC_*(S_1, f_1, g_1)$

(2) $\Phi_{\mathbf{flo}}(S, f, g) : HM_*(S_0, f_0, g_0) \to HM_*(S_1, f_1, g_1)$

(3) $\Phi_{\mathbf{bif}}(S,f,g) : HM_*(S_0,f_0,g_0) \to HM_*(S_1,f_1,g_1)$.

Die Abbildung $\Phi_{\mathbf{con}}(S,f,g)$ its die *Conley Fortsetzungsabbildung* [1]. Die Abbildung $\Phi_{\mathbf{flo}}(S,f,g)$ ist die *Floer Fortsetzungsabbildung* definiert durch das Zählen von verbindenden Bahnen der Gleichung $\dot{x} = -\nabla f_t(x)$, wobei λ durch die Zeit t ersetzt wurde. Die Abbildung $\Phi_{\mathbf{bif}}(S,f,g)$ nennt man die *Floer Verzweigungs Fortsetzungsabbildung* und ist definiert durch das Studium der Verzweigungen der Familie von Gleichungen $\dot{x} = -\nabla_\lambda f_\lambda(x)$. Der homologische Conley Index ist isomorph zur Morse Homologie, d.h. es existiert ein Isomorphismus

$$\alpha : HC_*(S,f,g) \to HM_*(S,f,g)$$

siehe Theorem A. Im Theorem C beweisen wir, dass die Fortsetzungsabbildung $\Phi_{\mathbf{flo}}(S,f,g)$ isomorph zur Conley Fortsetzungsabbildung $\Phi_{\mathbf{con}}(S,f,g)$ ist, d.h.

$$\Phi_{\mathbf{con}}(S,f,g) = \alpha \circ \Phi_{\mathbf{flo}}(S,f,g) \circ \alpha^{-1}.$$

Falls $f = \{f_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ eine Familie bestehend aus Morse Funktionen f_λ ist beweisen wir dass

$$\Phi_{\mathbf{con}}(S,f,g) = \alpha \circ \Phi_{\mathbf{bif}}(S,f,g) \circ \alpha^{-1}.$$

Wir denken, dass Theorem D wahr bleibt auch wenn man die Bedingung f_λ ist Morse für alle $\lambda \in [0,1]$ weglässt.