



Doctoral Thesis

Ricci flows of Ricci flat cones

Author(s):

Siepmann, Michael

Publication Date:

2013

Permanent Link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-010002373> →

Rights / License:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

DISS. ETH No. 21252

Ricci Flows of Ricci flat Cones

A dissertation submitted to

E T H Z Ü R I C H

for the degree of

D O C T O R O F S C I E N C E S

presented by

M I C H A E L S I E P M A N N

Dipl. Math. ETH, ETH Zürich

Date of birth

December 6th, 1981

citizen of

Germany

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Tom Ilmanen, examiner

Prof. Dr. Lei Ni, co-examiner

Prof. Dr. Michael Struwe, co-examiner

2013

Abstract

In this thesis we study the evolution of smooth Riemannian cones under Hamilton's Ricci flow. In the first part we define Ricci flows coming out of a Riemannian cone and prove using Perelman's Pseudolocality Theorem that the quadratic curvature decay is preserved. In fact, in combination with Shi's estimates all derivatives decay at the appropriate rate for $t > 0$ as $x \rightarrow \infty$. We go on to consider Ricci flat cones as initial conditions. By construction of a suitable supersolution we show that the Ricci curvature decays exponentially for any smooth Ricci flow coming out of a Ricci flat cone. This result corresponds to the exponential curvature decay for the 2-dimensional expanding gradient Ricci solitons coming out of Ricci flat cones described in [CLN06] and the Kähler gradient Ricci solitons in [FIK03]. Inspiration comes from similar results for mean curvature flows from stationary cones in [Ilm95].

In the second part we prove that gradient expanding Ricci solitons with quadratic curvature decay are solutions of the Ricci flow coming out of a cone as defined in the first part. To this end we show that the gradient potential f converges as $t \searrow 0$ to a continuous function on M and locally smoothly outside of a compact subset. The deRham splitting theorem then gives the initial cone.

The third part also contains the main result of this thesis. We construct expanding Kähler Ricci solitons coming out of Ricci flat Kähler cones. We show that if a Ricci flat Kähler cone (a Riemannian cone over a Sasaki Einstein manifold) admits an equivariant resolution with positive canonical line bundle (negative first Chern class) then there exists an expanding self-similar solution coming out of that cone as defined in the first part. By the work of van Coevering Kähler cones can always be understood as complex varieties and we follow the arguments there to set up the corresponding complex Monge Ampere equation on such a resolution. This complex Monge Ampere equation is elliptic and has unbounded coefficients in the first order term. To show existence of a solution we combine Aubin's and Yau's estimates for the proof of the Calabi conjecture with techniques developed by Lunardi to deal with elliptic operators with unbounded coefficients acting on certain weighted spaces. Finally we present some old examples of expanding Kähler Ricci solitons in the light of this theorem and also construct new examples using toric geometry.

We conclude this thesis with a list of open problems and possible directions for further research.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir das Verhalten des Ricci-Flusses glatter Riemann'scher Kegel. Im ersten Teil der Arbeit geben wir eine geeignete Definition für Ricci Flüsse aus Riemann'schen Kegeln und zeigen mit Hilfe von Perelman's Pseudolokalitätstheorem, dass der quadratische Krümmungsabfall unter dem Ricci-Fluss erhalten bleibt. In Kombination mit Shis Krümmungsabschätzungen weisen wir nach, dass auch die höheren kovarianten Ableitungen der Krümmung mit entsprechenden Raten abfallen. Anschliessend erforschen wir Ricci Flüsse welche Ricci-flachen Kegeln entspringen. Durch Konstruktion einer geeigneten Super-Lösung können wir zeigen, dass die Ricci-Krümmung für positive Zeiten beliebiger Ricci Flüsse aus Ricci-flachen Kegeln exponentiell abfällt. Man vergleiche dieses Resultat mit entsprechenden Beobachtungen exponentiellen Krümmungsabfalls für die 2-dimensionalen expandierenden selbstähnlichen Lösungen des Ricci-Flusses aus Ricci-flachen Kegeln in [CLN06] sowie denjenigen Lösungen, welche in [FIK03] konstruiert wurden. Die Inspiration hierfür entstammt unter anderem ähnlichen Resultaten für den mittleren Krümmungsfluss aus stationären Kegeln.

Im zweiten Teil weisen wir nach, dass expandierende Gradienten Ricci Solitone mit quadratischem Krümmungsabfall Lösungen des Ricci-Flusses aus Riemann'schen Kegeln im Sinne des ersten Teils sind. Dazu zeigen wir, dass das Gradientenpotential des gegebenen Ricci Solitons gegen ein stetige Funktion und lokal ausserhalb einer kompakten Teilmenge gegen eine glatte Funktion konvergiert, wenn t gegen 0 strebt. Der Spaltungssatz von de Rham impliziert sodann das angekündigte Resultat.

Der dritte Teil stellt auch den Hauptteil dieser Arbeit dar. Wir konstruieren Kähler Ricci Solitone, welche Ricci flachen Kähler Kegeln (Riemannschen Kegeln über Sasaki-Einstein Mannigfaltigkeiten) entspringen. Es wird gezeigt, dass Ricci-flache Kegel, welche eine equivariante Auflösung mit positivem kanonischen Linienbündel (negativer erster Chern Klasse) zulassen, immer selbstähnliche Lösungen des Kähler Ricci Flusses aus diesen Kegeln im obigen Sinnes besitzen. Gemäss der Arbeit von van Coevering können Kähler Kegel stets als komplexe Varietäten verstanden werden, und wir folgen den dort entwickelten Argumenten, um die entsprechenden Monge Ampere Gleichungen für die Existenz dieser Lösungen aufzustellen. Der Nachweis der Existenz von Lösungen dieser skalaren komplexen Monge Ampere Gleichung verwendet die Abschätzungen von Aubin und Yau für den Beweis der Calabi Vermutung sowie Techniken von Lunardi, welche elliptische Operatoren mit unbeschränkten Operatoren auf gewissen gewichteten Funktionenräumen betreffen. Anschliessend präsentieren wir einige alte Beispiele expandierender Kähler Ricci Solitone im Lichte dieses Satzes und konstruieren auch neue Beispiele aus dem Bereich der torischen Geometrie.

Wir schliessen mit einer Reihe offener Fragen sowie möglichen zukünftigen Richtungen unserer Forschung.