

DISS. ETH Nr. 21565

**STRUKTUROPTIMIERUNG VON STABFÖRMIGEN FLÄCHENTRAGWERKEN
MITTELS REZIPROKER ANALYSE**

A B H A N D L U N G
zur Erlangung des Titels

DOKTOR DER WISSENSCHAFTEN

der

ETH ZÜRICH

vorgelegt von

THOMAS KOHLHAMMER

Dipl.-Ing. (Architektur), Universität Stuttgart
Dipl.-Ing. (Bauingenieurwesen), Universität Stuttgart

geboren am 26.02.1974

von Deutschland

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. Joseph Schwartz
Prof. Dr. Yves Weinand

2013

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	5
Kurzfassung	7
1 Ausgangslage und Ziele der Arbeit	9
1.1 Hintergrund	9
1.2 Motivation	13
1.3 Ziel	14
1.4 Theorie und Methodik des Optimierungsmodells	16
1.4.1 Theorien und Methoden der Mechanik	16
1.4.2 Innere Kräfte und Geometrie	23
1.4.3 Diskretisierung	28
1.5 Entwicklungen dieser Arbeit	30
2 Vergleich von Systemen stabförmiger Flächentragwerke	31
2.1 Struktur und Geometrie	31
2.1.1 Einfaches Gitter	31
2.1.2 Hebelstabsystem	32
2.2 Tragverhalten und Konstruktion	36
2.2.1 Einfaches Gitter	36
2.2.2 Hebelstabsystem	40
2.3 Geschichte	43
2.3.1 Einfaches Gitter	43
2.3.2 Hebelstabsystem	45
2.4 Evaluation der Systeme	49
3 Tragsystem	51
3.1 Verknüpfung der Systeme	51
3.2 Einstellen der Öffnungsweite	52
3.3 Definition des Tragsystems	55
3.3.1 Subsysteme der inneren Stäbe	56
3.3.2 Subsysteme der Randstäbe	57
3.3.3 Sonderfall ebenes System	59
3.3.4 Sonderfall lineares System	60
3.4 Krümmung des Systems	60
3.5 Innere Kräfte	61
4 Methode der Reziproken Analyse	63
4.1 Veranschaulichung der Methode	63
4.1.1 Prinzip	63
4.1.2 Einfaches Beispiel	64
4.2 Stabgleichgewicht	67
4.2.1 Gleichgewichtsbedingungen	67
4.2.2 Erzeugende von Kräften und Momenten	68
4.2.3 Reduktion der partiellen Einwirkenden	69
4.2.4 Reduktion der partiellen Reaktionsgrößen	71
4.2.5 Formulierung des Gleichgewichts eines Stabs	72
4.2.6 Formulierung des Gleichgewichts aller Stäbe	73
4.3 Verknüpfung der Stäbe	73
4.3.1 Allgemeiner Fall	73
4.3.2 Beispiel	74
4.4 Iteration	75
4.4.1 Gleichgewicht und Verknüpfung	75
4.4.2 Superposition mit iterativer Lösung	75
4.4.3 Superposition mit geschlossener Lösung	76

5	Diskussion der Methode	77
5.1	Allgemeines	77
5.2	Existenz einer Gleichgewichtslösung	78
5.2.1	Lokales Gleichgewicht	78
5.2.2	Konvergenz der Superposition	79
5.3	Geeignete Annahmen der Eigenschaften von Erzeugenden	80
5.3.1	Kombinatorische Eigenschaften	81
5.3.2	Parametrische Eigenschaften	83
5.4	Freiheitsgrade des Gesamtsystems	87
5.5	Vergleichendes Beispiel	88
5.5.1	Methode der Reziproken Analyse	88
5.5.2	Finite Elemente Methode	90
5.5.3	Streifenmethode nach Hillerborg	91
5.5.4	Vergleich der Ergebnisse	92
6	Optimierungsmodell	93
6.1	Allgemeines	93
6.2	Konstante Systemparameter	94
6.3	Variable Systemparameter	95
6.4	Beurteilung eines Systemzustands	96
6.5	Einfluss der variablen Systemparameter auf die Materialmenge im linearen System	97
6.6	Wahl der Systemparameter	101
6.7	Einfluss der variablen Systemparameter auf die Materialmenge im räumlichen System	104
6.8	Beispiele	111
7	Ausblick	115
7.1	Tragsystem	115
7.2	Methode der Reziproken Analyse	116
7.3	Ansatz für das Optimierungsmodell	117
	Quellen	119
	Lebenslauf	123

Bezeichnungen

Matrizen

- B** Transitionsmatrix eines Systems
- E** Erzeugendenmatrix
- G** Gleichgewichtsmatrix
- O** Nullmatrix
- V** Verknüpfungsmatrix

Vektoren

- b** Ortsvektor auf den Punkt, der auf einer Stabachse liegt
- d** Dyname aus einer Kraft und einem Moment
- D** Dynamen aus mehreren Kräften und Momenten
- e** Vektor einer Erzeugenden
- f** Kraftvektor
- F** Einfacher Zustandsvektor partieller Interaktionskräfte
- m** Momentenvektor
- M** Moment als Schnittgrösse
- n** Normaleneinheitsvektor einer Verbindung
- N** Normalkraft als Schnittgrösse
- p** Ortsvektor von einem Bezugspunkt zu einem Interaktionspunkt P eines Stabs
- s** Einheitsvektor in Richtung der Stabachse
- V** Querkraft als Schnittgrösse
- x** Vektor der unbekanntenen Koeffizienten der Erzeugenden

Skalare

- a* Abstand auf der Stabachse zwischen dem Lot eines Endinteraktionspunkts und dem des nächstliegenden inneren
- β* Neigungswinkel der Erzeugenden im Optimierungsmodell
- c* Qualitativer Krümmungsfaktor
- d* Senkrechter Abstand einer Stabachse zu der eines Nachbarstabs
- e* Genauigkeit der iterativen Lösung der Reziproken Analyse
- i* Nummer eines Iterationsschritts
- j* Expliziter Iterationsschritt
- k* Nummer eines Stabknoten
- l* Länge eines Stabs
- m* Anzahl Stäbe eines Tragsystems
- n* Anzahl Stäbe einer Verbindung
- p* Anteil der äusseren Einwirkenden am Knoten in einem anschliessenden Interaktionspunkt
- r* Öffnungsweite einer reziproken Verbindung
- s* Nummer eines Stabs
- u* Bereich zwischen dem Lot zweier Interaktionspunkte auf der Stabachse
- v* Nummer einer Verbindung
- w* Anzahl Verbindungen

Indizes

<i>a</i>	Einwirkende Grösse allgemein
<i>b</i>	In Bezug auf Biegung
<i>c</i>	Interaktionsgrösse allgemein
<i>ca</i>	Interaktionsgrösse einwirkend
<i>cr</i>	Interaktionsreaktionsgrösse
<i>f</i>	In Bezug auf eine Kraft
<i>m</i>	In Bezug auf ein Moment
<i>p</i>	Partielle Interaktionsgrösse allgemein
<i>pa</i>	Partielle Interaktionsgrösse einwirkend
<i>pr</i>	Partielle Interaktionsreaktionsgrösse
<i>r</i>	Reaktionsgrösse allgemein
<i>t</i>	In Bezug auf Torsion

Sonstiges

B	Beliebiger Bezugspunkt
E	Endpunkt einer Stabachse
K	Knoten
P	Interaktionspunkt auf einem Stab
Φ	Funktion der Materialmenge
V	Verbindung eines Tragsystems

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit ist motiviert durch die Feststellung, dass Tragwerke mit doppelt gekrümmter Formgebung, welche in der zeitgenössischen Architektur angewendet werden, häufig nur mit erheblichem Konstruktions- und Materialaufwand baulich realisierbar erscheinen.

Es besteht diesbezüglich die Überzeugung des Vorhandenseins von Optimierungspotential, da die doppelte Krümmung der Oberfläche eine massgebliche Eigenschaft von Schalen und Membranen ist, also genau von solchen Tragwerken, bei deren Entwicklung von jeher das Ziel eines möglichst geringen Konstruktions- und Materialaufwands im Vordergrund steht. Bei dieser Art von Tragwerken ist die Formfindung massgeblich vom Ziel geprägt, zentrisch im Querschnitt der Tragelemente verlaufende innere Kräfte zu erzeugen, sodass eine überwiegende Beanspruchung durch Normalkräfte entsteht. Durch die Vermeidung von Biegebeanspruchung resultiert ein geringer Material- und Konstruktionsaufwand.

Viele doppelt gekrümmte Tragwerke entstanden in der gegenwärtigen Architektur durch eine andere Art der Formfindung, welche oftmals eine grössere Biegebeanspruchung im Tragwerk nach sich zieht. Dabei bleibt die Frage offen, ob das Potential der doppelten Krümmung zur Aufnahme der inneren Kräfte nicht weitaus besser ausgenutzt werden könnte. Daraus resultiert das übergeordnete Ziel der vorliegenden Arbeit, nämlich die Entwicklung eines Modells, mit welchem beliebig geformte Flächentragwerke dahingehend optimiert werden können, dass eine Verteilung der Normalkräfte und Biegemomente im Tragwerk entsteht, die ein Minimum an Aufwand für Konstruktion und Material bedeutet.

Zur Verfolgung dieses angestrebten Ziels wird ein Optimierungsmodell vorgeschlagen, sowie als wesentlicher Bestandteil dessen ein passendes Tragsystem und eine dafür geeignete Analyseverfahren entwickelt. Das Tragsystem besteht aus diskreten stabförmigen Elementen, deren Art und Weise der Fügung die Ausbildung einer biegesteifen Tragstruktur mit einfachen konstruktiven Verbindungstechniken ermöglicht. Des Weiteren sind die Verbindungen des Systems so konzipiert, dass durch Dispositionsänderungen der Stäbe die Biegebeanspruchbarkeit der Tragstruktur lokal anpassbar ist. Die für das Optimierungsmodell entwickelte Analyseverfahren zur Bestimmung der inneren Kräfte des Tragsystems basiert auf dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie. Dessen Anwendung ermöglicht bei statisch unbestimmten Tragwerken die Festlegung so vieler Grössen, dass das System mit den Gleichgewichtsbedingungen allein lösbar wird. Das Verhalten der Tragstruktur kann durch diese Annahmen innerhalb eines gewissen Spektrums gesteuert werden. Die festgelegten Grössen bilden bei der Analyseverfahren zusammen mit den geometrischen Parametern der Stabdispositionen die Variablen einer Funktion der für das Tragwerk erforderlichen Materialmenge. Ziel des Optimierungsmodells ist es, diejenigen Werte der Variablen zu ermitteln, für welche die Funktion einen Minimalwert annimmt.

Abstract

This study is motivated by the identification that structures with double curved shapes, which are used in contemporary architecture, often only seem to be realizable with considerable constructional effort and material expense.

Concerning this, there is the conviction of the existence of a certain potential to optimize, as the double curving of the surface is a decisive feature of shells and membranes, i.e. exactly of those structures in which the aim of the least possible constructional effort and material expense has always been important for the development. With those types of structures, the curved shape results from inner forces acting concentrically in the cross-section of the structural elements so that they are mostly stressed by normal forces. By avoiding stresses from bending, a little material expense and structural effort can be achieved.

Many of the structures with double curved shapes in contemporary architecture were developed in a different way of form finding, whereby the outcome is often a higher stress from bending in the structure. However, the question is whether the potential of the double curving in order to absorb the inner forces can be utilized more efficiently. Here from results the general intention of this study, which is the development of a model with which any shapes of surface structures can be optimized to the effect that, within the structure, there results a spread of stress caused by normal forces and bending moments, which means a minimum of constructional effort and material expense.

In order to achieve the aim, an optimizing model is suggested and also – as an essential part of it – a suitable structural system and an appropriate analyzing method are developed. The structural system consists of discrete bar-shaped elements, whose manner of connection enables the development of a rigid structure by the use of simple constructional joining techniques. Furthermore, the connections in the system are designed in a way that the flexural rigidity of the structure can be locally adjusted through a change of the disposition of the bars. The analyzing method to determine the inner forces of the structural system developed for the optimizing model is based on the lower bound theorem of the theory of plasticity. The use of it provides the assumption of as many factors as needed to solve statically undetermined structural systems using only the conditions of equilibrium. Thus the behavior of the structure can be controlled within a certain spectrum. Within the analyzing method, the assumed factors, together with the geometrical parameters of the bar dispositions, represent the variables of a function of material quantity for the structure. The aim of the optimizing model is to find out those values of variables for which the function reaches a minimum value.

1 Ausgangslage und Ziele der Arbeit

1.1 Hintergrund

Diese Arbeit ist motiviert durch die Frage nach dem Einfluss des Tragwerks auf die architektonische Form. Eine sorgfältige Auseinandersetzung hiermit sowie die präzise Erörterung der daraus entstehenden Konsequenzen erscheinen wichtig, weil dadurch technische Schwierigkeiten in der baulichen Realisation des Tragwerks bereits in der Phase des Entwurfs der Form unterbunden werden können. Darüber hinaus, so die Überzeugung hier, gewinnt letztendlich auch das Gebäude als architektonisches System an Logik und tritt überzeugender auf. In der Geschichte der Architektur haben sich unterschiedliche Haltungen im Umgang mit dieser Frage herauskristallisiert, was durch die Beispiele im Folgenden fragmenthaft aufgezeigt werden soll.

Ein verhältnismässig grosser Einfluss von tragkonstruktiven und bautechnischen Aspekten auf die architektonische Form kann bei Bauwerken aus der Gotik festgestellt werden. Die gotischen Baumeister, deren Aufgabenfeld hauptsächlich der Kirchenbau, aber auch der Wehr-, Wasser- und Brückenbau war, bestimmten Form und Dimension der architektonischen Elemente aufgrund ihrer persönlichen bautechnischen Erfahrung oder einer diesbezüglich überlieferten Tradition [26]. Durch die Anwendung ihres technischen Wissens bei der Formentwicklung war es möglich, mit den verfügbaren, relativ einfachen Baumaterialien leistungsfähige Tragwerke zu realisieren. Der Einfluss der Bautechnik ist bei vielen gotischen Gebäuden ablesbar, da häufig das Tragwerk unmittelbar als gestalterisches Mittel benutzt wurde. Auf diese Art entstanden beispielsweise Innenräume von Kathedralen, die mit ihren weit spannenden Deckengewölben auch in der heutigen bautechnisch fortgeschrittenen Zeit noch beeindruckend wirken.

In den Epochen nach der Gotik ist eine Entfremdung der Haltung des Entwerfens mit tragenden Konstruktionen erkennbar. Als Beispiele hierzu können Säulen genannt werden, die nicht für ihren statischen Zweck, sondern als ornamentale Elemente eingesetzt werden, oder Raumüberdeckungen durch Gewölbe, die statisch nicht als solche wirken, sondern Verkleidungen in gewölbeartiger Gestalt eines formal unabhängigen, darüber liegenden Tragwerks sind. Zu letzterem sind in Abbildung 1 die Schnitte zweier Entwürfe des französischen Revolutionsarchitekten Étienne-Louis Boullée dargestellt. Abbildung 1a zeigt einen Raum der durch eine Kuppel gebildet wird, die tragkonstruktiv als solche funktioniert, während Abbildung 1b eine Raumüberdeckung darstellt, bei welcher das Gewölbe zwar räumlich als solches fungiert, jedoch aus statischer Sicht die Verkleidung eines Stabtragwerks ist.

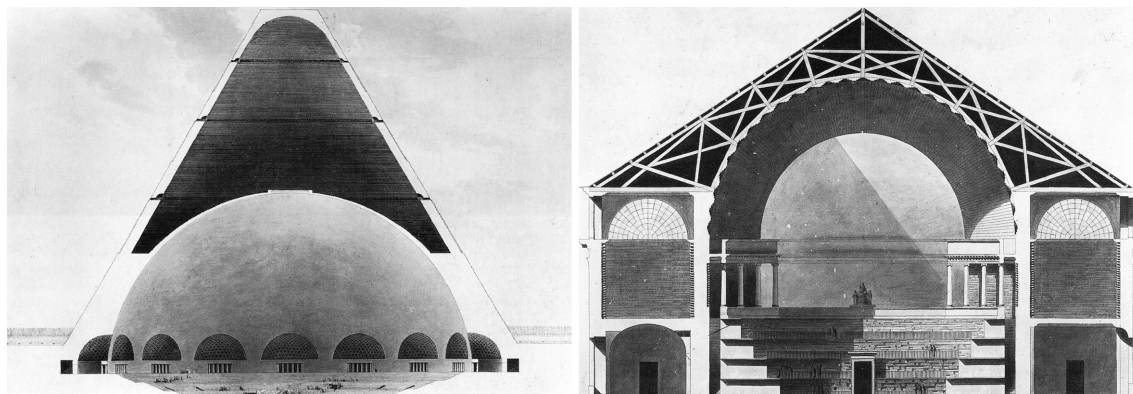


Abb. 1: Zwei Entwurfsprojekte Étienne-Louis Boullées. a) links: *Cénotaphe pour Turenne*, 1782 [55]; b) rechts: *Bibliothèque royale, Paris*, 1785 [55].

Ende des 19. Jahrhunderts kehrten verschiedene Architekten, wie beispielsweise Gaudi, wieder zu eher gotischen Prinzipien zurück, indem sie dem Tragwerk einen grossen Einfluss auf die Gestalt der Gebäude überliessen. In diesem Rahmen etablierten sich auch experimentelle Prozesse zur Findung von Formen, welche sich auf natürliche Art infolge der Lasteinwirkung durch Gravitationskräfte ergaben [74]. Daraus resultierten Tragwerke, welche einen sehr einfachen Verlauf der inneren Kräfte aufwiesen und demnach, vergleichbar den gotischen Konstruktionen, mit einfachen Baumaterialien eine hohe Leistungsfähigkeit erzielten. Heute am bekanntesten hierzu sind die Hängeversuche Gaudis, die zur Formfindung der von ihm gebauten Gewölbekonstruktionen dienten.

Einen weiteren tragkonstruktiven Einfluss erfuhr die Architektur im 18. Jahrhundert einerseits durch die Etablierung des Stahls als Baumaterial und andererseits durch die Entwicklung statischer Berechnungsmethoden für Bauwerke. Die Verfügbarkeit des Stahls als sehr leistungsfähiges Baumaterial und die wissenschaftlichen Tätigkeiten auf den Gebieten der Bautechnik und Statik resultierten in komplexer werdenden Tragwerken, die neue Möglichkeiten betreffend der Formgestaltung erschlossen. Dabei eröffnete insbesondere das Fachwerk neue Möglichkeiten, materialeffiziente, leichte Konstruktionen zu erstellen, ohne die Notwendigkeit innere Kräfte unmittelbar bei der Formentwicklung zu berücksichtigen.

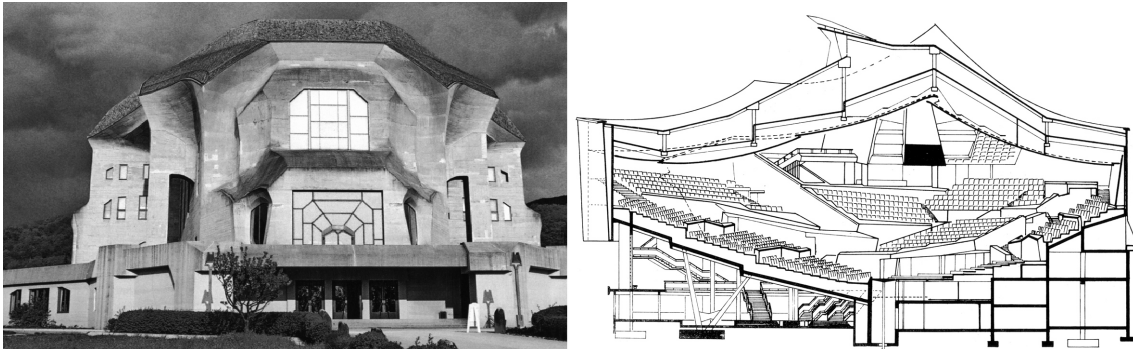


Abb. 2: a) links: Goetheanum II, Dornach, Rudolf Steiner, 1928 [29]; b) rechts: Konzerthaus des Berliner Philharmonischen Orchesters, Berlin, Hans Scharoun, 1967 [57].

Anfangs des 20. Jahrhunderts entstand mit der organischen Architektur eine Entwicklung zwischen Avantgarde und Tradition [21]. Diese Bewegung, massgeblich geprägt durch Architekten wie Hugo Häring, Erich Mendelsohn, Hans Scharoun (vgl. Abb. 2b) oder Rudolf Steiner (vgl. Abb. 2a), drückte sich in einer Formensprache aus, die entgegen der rationalen Moderne nicht funktionalistisch von industriellen Typologien und einer Formenlehre basierend auf der Komposition von Grundtypen gekennzeichnet war, sondern sich am Menschen und seinen Bedürfnissen orientierte. Dazu schreibt Bruno Zevi in "Towards an Organic Architecture": "Architektur ist organisch, wenn die räumliche Anordnung des Zimmers, des Hauses und der Stadt so geplant ist, dass der Mensch darin sowohl im materiellen, im psychologischen wie im spirituellen Sinne Glück erfahren kann." [86]

Ebenfalls aus dem Konflikt mit der allgemeinen Anerkennung einer Typisierung durch genormte Formen entstand innerhalb des Deutschen Werkbunds um Bruno Taut der "Arbeitsrat für Kunst": Eine Gruppe mit der Haltung eines expressionistischen Kunstwillens und dem zentralen Thema des Glases in der Architektur [22]. Diese Gruppe unterhielt später unter dem Namen "Gläserne Kette" einen utopischen Briefwechsel zum Austausch ihrer Ansichten. Im Rahmen dessen entstand Tauts visionäre Idee der Stadtkrone (vgl. Abb. 3b). Dies sollte ein kristallines Gebäude sein, ein Kunstwerk das sich von den Zweckbauten abhebt, ein aus dem Stadtgebilde herausragender Profanbau, dessen Absichten vergleichbar jenen des Doms oder der Kathedrale sind: Menschen die Gemeinschaft fühlen zu lassen sowie Repräsentations- und Identifikationsobjekt für die Bürger der Stadt zu sein [75]. Jedoch war es nicht Taut sondern Hans Poelzig, der mit dem grossen Schauspielhaus in Berlin (vgl. Abb. 3a) jenes Gebäude entwarf, welches in dieser Zeit am treffendsten den Vorstellungen Tauts einer Stadtkrone entsprach [22].

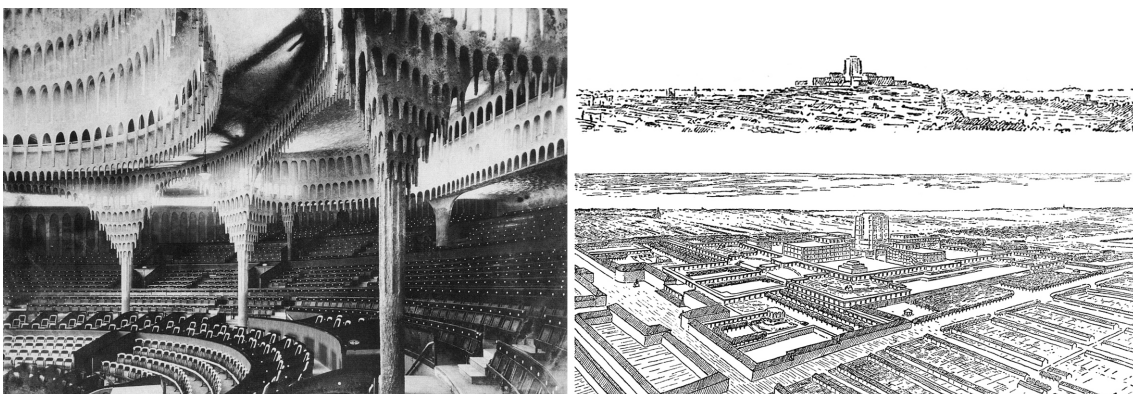


Abb. 3: a) links: Grosses Schauspielhaus, Berlin, Hans Poelzig, 1919 [54]; b) rechts: Bruno Tauts Vision der Stadtkrone, 1919 [75].

Mitte des 20. Jahrhunderts begannen einige Ingenieure, wie beispielsweise Frei Otto oder Heinz Isler, die effizienten Gebilde der Natur zu erforschen und diese auf das Bauen zu übertragen [62]. In meist experimentell orientierten Methoden (vgl. Abb. 5b) entwickelten sie Tragwerke, die auf ein Minimum an Material reduziert waren. Frei Ottos Begriff des Leichtbaus, welcher Tragwerke umfasst, bei denen das Verhältnis von der Grösse der aufnehmbaren äusseren Kräfte zum Eigengewicht der Konstruktion relativ hoch ist, prägte diese Entwicklung massgebend. Seine forschenden Tätigkeiten befassten sich mit der Entwicklung von Tragwerken, die bezüglich dieses Verhältnisses ein Maximum suchten [50]. In Abbildung 7 ist ein gebautes Resultat seiner Forschung gezeigt. In der Lehre vermittelte Frei Otto durch seine Haltung das Empfinden von ästhetischer und ökologischer Qualität für solche Tragwerke, deren Form zu einem sehr grossen Teil durch physikalische Eigenschaften begründet ist.

In den vergangenen zwei Jahrzehnten ist ein zunehmend stärker werdender Anteil an ikonographischer Architektur auszumachen. "Ikon" (griechisch "eikon" für Abbild resp. Bild) beschreibt die Hauptmotivation dieser Architektur, mit einem starken Bild einen hohen visuellen Eindruck zu erzielen. Da derartige Gebäude häufig eine expressive, skulpturale Form (vgl. Abb. 4) aufweisen, erzielen sie hohe Medienwirksamkeit und Wiedererkennbarkeit, wodurch sie sich für Institutionen, Unternehmen oder ganze Städte eignen und das Gebäude zu einem Wahrzeichen dieser wird [33] [73]. Derartige Bauwerke haben einen stark ausgeprägten künstlerischen Anspruch und verfolgen die Absicht, sich aus ihrer Umgebung herauszuheben. Wenn es sich dabei um Museen, Theater oder andere, die Gemeinschaft fördernde, Einrichtungen handelt, ist diese Architektur sehr nahe an Bruno Tauts Idee der Stadtkrone. Für die Ausbildung derartiger Bauwerke als skulpturale Kunstwerke scheint gegenwärtig das morphologische Spektrum nahezu unersättlich zu sein. Die Ursachen hierfür sind einerseits in der Weiterentwicklung der Material- und Bautechnik zu sehen, andererseits aber vor allem in den sich schnell entwickelnden digitalen Methoden, durch welche in einem progressiven Fortschritt Möglichkeiten der Genese und Produktion von nahezu beliebigen architektonischen Formen entstanden und entstehen. Massgebend verantwortlich für die digitale Reproduzierbarkeit ist neben der Innovation auf dem Gebiet der Hard- und Software nicht zuletzt die Entwicklung der NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines), mit welchen sich lineare und flächige Objekte jeder beliebigen Form exakt mathematisch beschreiben lassen [32] [3].

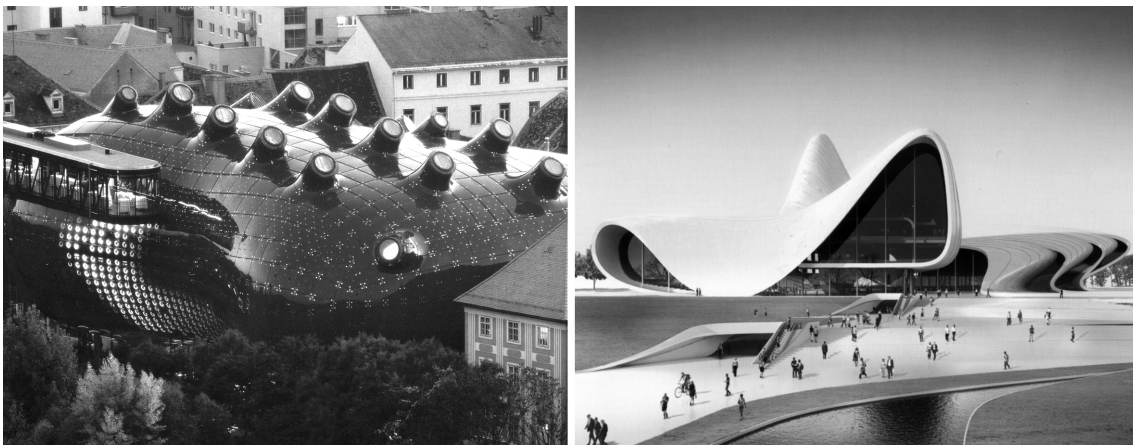


Abb. 4: a) links: Kunsthaus, Graz, Peter Cook / Colin Fournier, 2003 [9]; b) rechts: Entwurf für das Kulturzentrum Heydar Aliyev, Baku, Zaha Hadid, 2007 [28].

Oftmals finden sich in dieser Architektur Ansätze wie Bewegung oder Deformation, welche weit entfernt von rein statischen Aspekten sind. Als Beispiel hierfür seien die Bauwerke Frank O. Gehrys angeführt. In "Choreographie der Architektur" [13] beschreibt Kurt W. Forster diese treffend als bewohnbare Stillleben oder als das Bestreben, Bewegung in die starren Formen zu bringen. Das Herangehen an den Entwurf und das Entwickeln von Formen entgegen aller Regeln der Physik beschreibt das folgende Zitat: "Eine Reihe Dominosteine, die umfällt, ein Kartenhaus, das zusammenbricht, oder eine kleine Pappschachtel, die unter dem Fuss zerdrückt wird. Wenn wir die dynamischen Bezüge zwischen allen Gliedern eines Gebäudes im Geiste durchspielen und uns vorstellen, die einzelnen Teile seien in einem Augenblick der Bewegung festgehalten, dann kommen wir mit unserer Vorstellung dem Stadium nahe, in das Frank Gehry seine Architektur getrieben hat." [13] Auch Gehry bedient sich häufig einer modellbasierten Formfindung (vgl. Abb. 5a), wobei jedoch das Modell eine komplett andere Funktion hat als diejenige des in Abbildung 5b dargestellten.

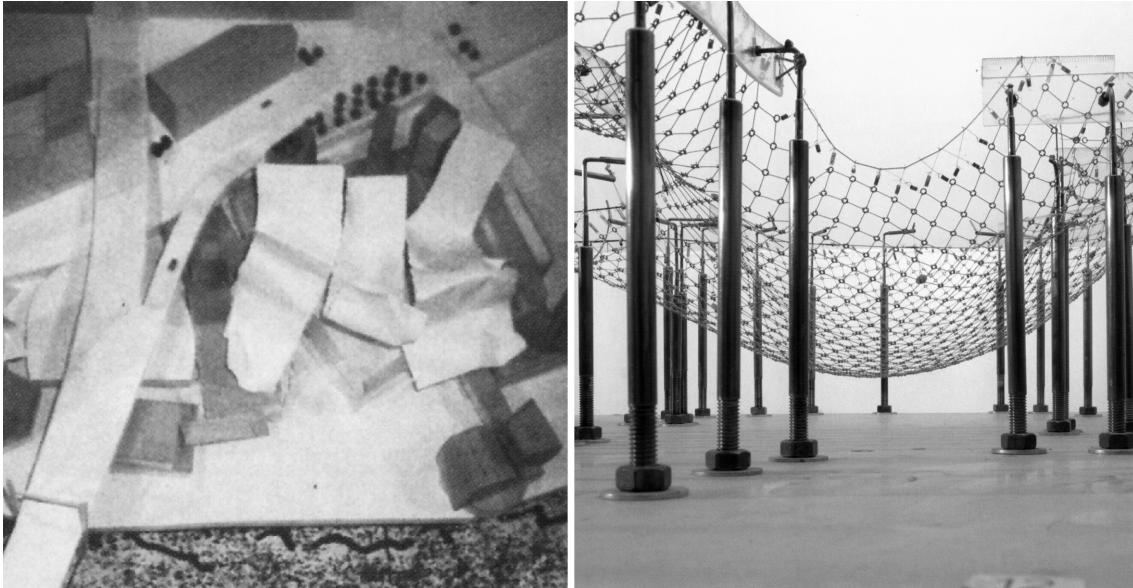


Abb. 5: a) links: Eines der zahlreichen Modelle Frank O. Gehrys zur Formfindung des Guggenheim Museums Bilbao [77]; b) rechts: Frei Ottos Modell zur Formfindung der Multihalle Mannheim [46].

Dieser kurze Abriss aus der Architekturgeschichte soll verdeutlichen, wie unterschiedlich die Haltung zur Frage des Einflusses des Tragwerks auf die architektonische Form sein kann, wobei jede Position ihre Berechtigung hat. Unabhängig von einer spezifischen Haltung kann allgemein der Einfluss auf die architektonische Form durch eine These Kenneth Framptons wie folgt zusammengefasst werden: “Tatsächlich scheint es, als erwache das Gebaute immer wieder aus dem sich stets entwickelnden wechselseitigen Spiel dreier konvergierender Vektoren, dem Topos, dem Typos und der Tektonik.“ [20] (vgl. Abb. 6) Diese drei Termini scheinen prägnant als Oberbegriffe für die Gesamtheit der Einflussfaktoren und lassen sich in weitere Untergruppen feiner diversifizieren. Alle Aspekte, welche das Tragwerk oder die Bautechnik betreffen, sind nach dieser Definition unter dem Oberbegriff der Tektonik angesiedelt. Da nicht die Vielzahl aller Faktoren in gleicher Weise Beachtung in der Formgenese finden kann, liegt es am Entwerfer, dabei Schwerpunkte zu setzen. Die Entscheidungen bezüglich der Gewichtung von Einflussfaktoren beim Entwurf resultieren aus einer architektonischen Idee und sind ein wichtiger Grund, dass das Resultat einen künstlerischen Anspruch sowie die Handschrift eines Urhebers hat und nicht nur die logische Folge einer auf Gesetzen basierenden Argumentationskette ist.

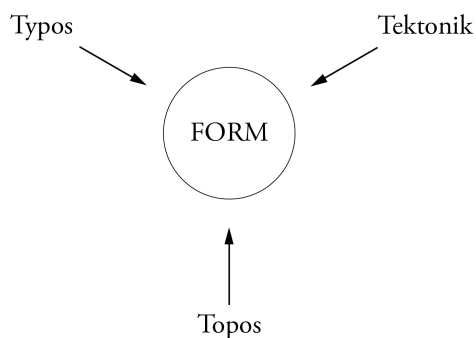


Abb. 6: Diagramm nach Kenneth Framptons Definition über die Einflüsse auf die architektonische Form.

Ergänzend ist zu erwähnen, dass zahlreiche andere architekturtheoretische Betrachtungen weitere Thesen enthalten, die sinngemäss ähnliche Aussagen treffen. Hierzu sei beispielhaft Vitruvs erstes Buch seines Traktats “Zehn Bücher über Architektur“ [78] genannt, worin er durch firmitas (Festigkeit), utilitas (Nützlichkeit) und venustas (Schönheit) die drei Hauptanforderungen an die Architektur und damit auch an ihre formale Gestaltung definiert.

1.2 Motivation

Aus den in Abschnitt 1.1 aufgezeigten Beispielen der Haltung zum Einfluss des Tragwerks auf die architektonische Form kristallisieren sich zwei grundlegende Gegensätze heraus, welche sich in der Architektur des 20. Jahrhundert zunehmend extremer entwickelt haben:

1. Der Ansatz der Formgenese, bei welcher das Tragwerk primärer Entwicklungsfaktor ist, wobei meist die technische Leistungsfähigkeit und/oder eine hohe Materialeffizienz als Beweggrund erkannt werden kann.
2. Eine Haltung zur Formentwicklung, die primär auf der künstlerisch architektonischen Idee sowie der Nutzung und dem Zweck des Bauwerks basiert. Hierbei finden tragwerksspezifische und bautechnische Aspekte häufig erst in einem späten Stadium des Entwurfs oder in der Projektierung des Bauwerks Berücksichtigung.

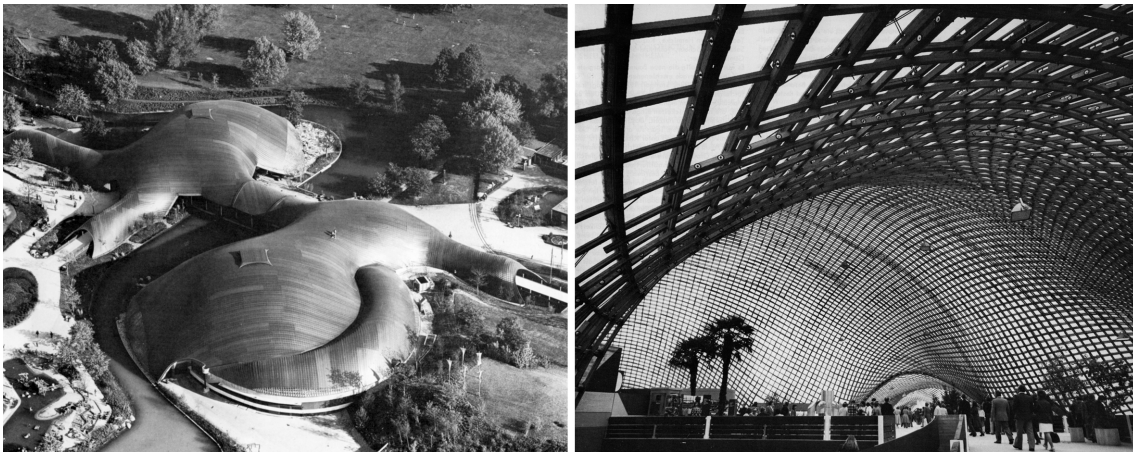


Abb. 7: *Multihalle, Mannheim, Carlfried Mutschler und Frei Otto, 1975. a) links: Aussenansicht [49]; b) rechts: Innenansicht des Tragwerks [49].*

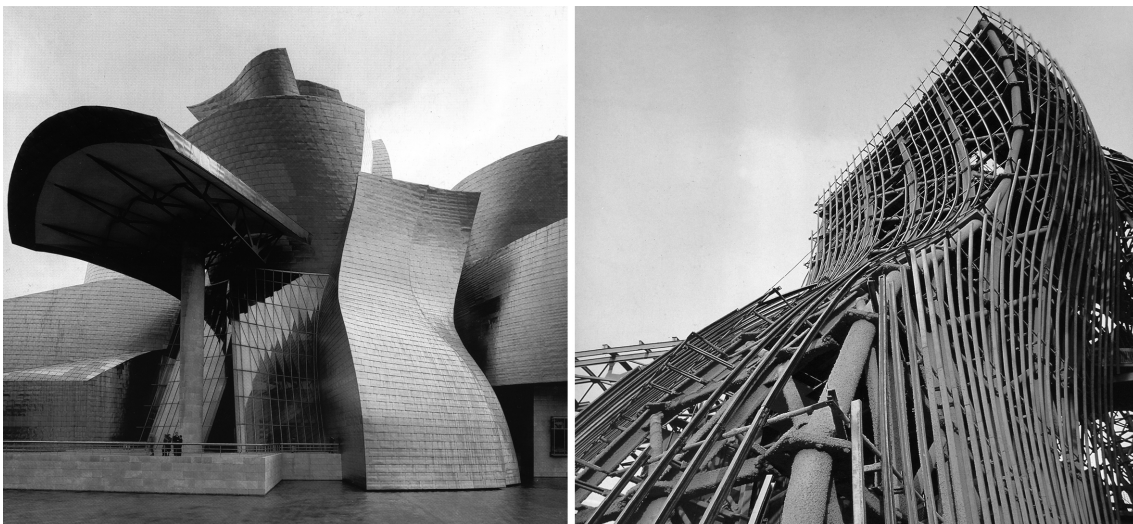


Abb. 8: *Guggenheim-Museum, Bilbao, Frank O. Gehry, 1997. a) links: Aussenansicht [12]; b) rechts: Traggerüst der Fassade [77].*

Die Hauptvorteile jener Formen, welche aus der erstgenannten Haltung heraus entstehen, sind zweifelsohne, dass leistungsfähige Tragwerke konstruktiv verhältnismässig einfach mit geringem Materialaufwand realisiert werden können, und dadurch die Gebäude leicht wirken sowie von einer gewissen Filigranität geprägt sind (vgl. Abb. 7). Die massgebende Kritik an dieser Haltung ist, dass das Tragen die Maxime bei der Formfindung ist und oft andere wichtige Aspekte der Architektur im Entwicklungsprozess zu wenig Beachtung finden. Beispielsweise kann für verschiedene Schalenbauten Heinz Islers kritisch angemerkt werden, dass die Gebäudeform nicht zweckspezifisch ist, sondern vielmehr als autonomes Objekt wirkt, in welchem eine

beliebige Nutzung platziert werden könnte. Hierzu ist anzumerken, dass Architektur in den allermeisten Fällen aus dem Bedürfnis nach der Erfüllung eines Zwecks entsteht und dabei das Tragwerk nur eine, wenn auch wichtige Komponente ist, die zum Gelingen beiträgt. Eine Beurteilung, vergleichbar jener über die Bauwerke Islers, kann auch für zahlreiche Gebäude Frei Ottos abgegeben werden, was durch folgende, von ihm stammende Aussage selbstkritisch geschieht: “Es ist äusserst schwierig, mit Selbstbildungsprozessen zum architektonischen Entwerfen zu kommen. Zwar führt das Experiment auf direktem Wege zur Form, die von sich aus bereits einen Optimierungsschritt durchlaufen hat, aber eine Entwurfsarbeit kann nur unter Bezug auf die Komplexität einer Bauaufgabe und der Einbindung eines Gebäudes in sein Umfeld und in die Gesellschaft gesehen werden.“ [51]

Die Vorteile jener Formen, deren Genese die zweitgenannte Haltung zugrunde liegt, können darin festgestellt werden, dass prinzipiell in einer sehr klaren Weise der Zweck und die architektonischen Absichten des Bauwerks artikuliert und unterstützt werden können, wodurch diesbezüglich eine hohe Qualität möglich ist. Eine derartige Klarheit wird oftmals nur erreicht, wenn limitierende Faktoren im Entwurf vernachlässigt werden, was letztlich auch zur Hauptkritik an dieser Haltung führt. Insbesondere soll hier betont werden, dass eine sehr späte Berücksichtigung von tragwerksspezifischen und bautechnischen Einflüssen im Entwurf eines Gebäudes Schwierigkeiten in seiner baulichen Umsetzung hervorrufen kann, wobei diese Gefahr mit dem Grad des statischen Anspruchs der Aufgaben zunimmt. Die Schwierigkeiten werden dadurch offenkundig, dass das Tragwerk im realisierten Gebäude ein Element ist, das in gewisser Weise aufgesetzt wirkt und nicht einen integralen Bestandteil der Architektur darstellt. In diesem Sinne offenbart eine bautechnische Betrachtung verschiedener realisierter Objekte dieser Art häufig eines der zwei folgenden Phänomene: Entweder ist die Form eine Verkleidung, welche einem morphologisch unabhängigen Traggerüst vorgehängt ist (vgl. Abb. 8), oder es wird unter einem hohen Aufwand bezüglich Konstruktion und Material die Form als Tragwerk ausgebildet.

1.3 Ziel

Diese Arbeit will einen Beitrag dazu leisten, die Vorteile der beiden in Abschnitt 1.2 gegenüber gestellten gegensätzlichen Haltungen zu vereinigen. Denn gemäss der erstgenannten Haltung sollte das Tragwerk eine angemessene Berücksichtigung im Entwurf der Form erfahren, da dies bei der baulichen Realisation zu einer höheren Materialeffizienz und einfacheren Konstruktionen führt. Damit wird das Bauwerk dem in heutiger Zeit notwendigen Bewusstsein des Ressourcenverbrauchs gerecht. Andererseits sollten, gemäss der zweitgenannten Haltung, die architektonischen Aspekte wie beispielsweise Zweck, Nutzung oder Idee die oberste Priorität im Entwurf sein. Dies erhöht die Nachhaltigkeit, die in heutiger Zeit eine immer grössere Rolle im Bewusstsein spielt. Nur ein Gebäude, dessen Nutzbarkeit gewährleistet ist, kann nachhaltig sein, und nur eine Form mit künstlerischem Anspruch kann im Gegensatz zu einer rein technischen oder zweckmässigen Form eine kulturelle Nachhaltigkeit aufweisen. Dazu sei ein Zitat Hans Poelzigs zum Unterschied zwischen der technischen Form und der Kunstform resp. dem Symbol erwähnt. In “Architektur ist symbolische Form“ [58] formuliert er die Fragen: “Sind die technischen Formen symbolisch, können sie es jemals sein?“ und “Sind Kunstformen vergänglich?“ Dazu stellt er fest, keiner weine der technischen Form “von vor 10 Jahren, eine Träne nach. Eine Kunstform, ein Tempel, ein Innenraum eines gotischen Doms, ein Bild von Rembrandt büssen nichts von ihrer Wirkung auf den Menschen ein.“

Es ist festzustellen, dass die Formen einer gleichsam ressourcenbewussten und nachhaltigen Architektur einen äusserst vielschichtigen Einfluss erfahren. Nach Kenneth Framptons Definition (vgl. Abb. 6) bedeutet dies, dass die wichtigen Faktoren dazu unter den Oberbegriffen aller drei Termini zu suchen sind. Um aus dieser Unterschiedlichkeit der Einflüsse eine Haltung zur Entstehung der Form zu entwickeln, stützt sich diese Arbeit vor allem auf die Kunsttheorie von Gottfried Semper. Dieser postuliert als zentrale Kategorie eines Werks der technischen und tektonischen Kunst, wozu Architektur zu zählen ist, die Inhaltsautorität, welche “die Verschmelzung von Idee und Stoff als Charakter kundgibt und sich in höchster Potenz bis zum Ausdruck steigert“. [79] [68] Er benennt in seinem Hauptwerk “Der Stil in den technischen und tektonischen Künsten“ [68] zwar Zweck, Material und Technik als innere Determinanten für die Formen dieser Künste, jedoch auch weitere äussere Determinanten wie gesellschaftliche und politische Verhältnisse, religiöse Glaubenssysteme, Leitideen in der Erschaffung eines Kunstwerks oder allgemein das Thema der künstlerischen Verwertung. Semper wird oft fälschlicherweise als Vorläufer des Funktionalismus interpretiert [79], jedoch ist er dies keinesfalls, denn er postuliert, dass ein Kunstobjekt erst aus der Sublimierung der

inneren Determinanten durch die äusseren entsteht. Er kritisiert diejenigen, welche in Zweck und Konstruktion bereits die Erfüllung des künstlerischen Anspruchs sehen, als Personen mit primitiver Kunstauffassung. Sempers Axiom der Inhaltsautorität umfasst mit den inneren und äusseren Determinanten zwei ambivalente Komponenten materialistischer und idealistischer Art. In der Dialektik dieser beiden Faktoren entwickelt sich demnach der Charakter des Kunstobjekts. In "Stilfragen: Grundlegungen zu einer Geschichte der Ornamentik" [64] fordert Alois Riegl als Einwand auf Sempers Theorie, dass in der oben erwähnten Dialektik immer eine Gewichtung zugunsten der ideellen Faktoren vorgenommen werden muss, da er die Materiellen als Reibungskoeffizienten des Gesamtproduktes erachtet [79].

Ebenfalls wird hier eine Gewichtung der Dialektik gefordert. Aus den eingangs in diesem Abschnitt genannten Gründen sollen die zweckbezogenen und ideellen Faktoren in einem Objekt nachhaltiger Baukunst primär formgenerierende Faktoren sein. Die technischen und materialspezifischen, innerhalb derer auch die Aspekte des Tragwerks anzusiedeln sind, dürfen jedoch keinesfalls als Reibungskoeffizienten gesehen werden, sondern sie sollen innerhalb einer durch die erstgenannten Faktoren determinierte Form optimiert werden und damit zur Stärkung derer beitragen, sodass das Gebäude als Gesamtkunstwerk mit harmonisierenden Teilaspekten erscheint, und dadurch eine starke Logik entwickelt. Damit wird das Tragwerk nicht, wie beispielsweise im Sinne von Frei Otto, als etwas betrachtet, für das ein absolutes Optimum existiert, sondern ein mögliches Optimum ist immer in Relation zu einer übergeordneten Form zu suchen.

Die vorliegende Arbeit fokussiert im Rahmen des in diesem Abschnitt angerissenen Diskurses des Tektonischen die dialektische Beziehung zwischen einer Form, welche das Optimum für die zweckspezifischen sowie ideellen Faktoren darstellt, und der Idealform eines ressourcenbewussten Tragwerks, welches die äusseren Lasten, die auf das Gebäude einwirken, mit einem möglichst geringen Aufwand für Material und Konstruktion trägt. Das Wesen dieser spezifischen Dialektik soll durch die folgende Abbildung 9 veranschaulicht werden.

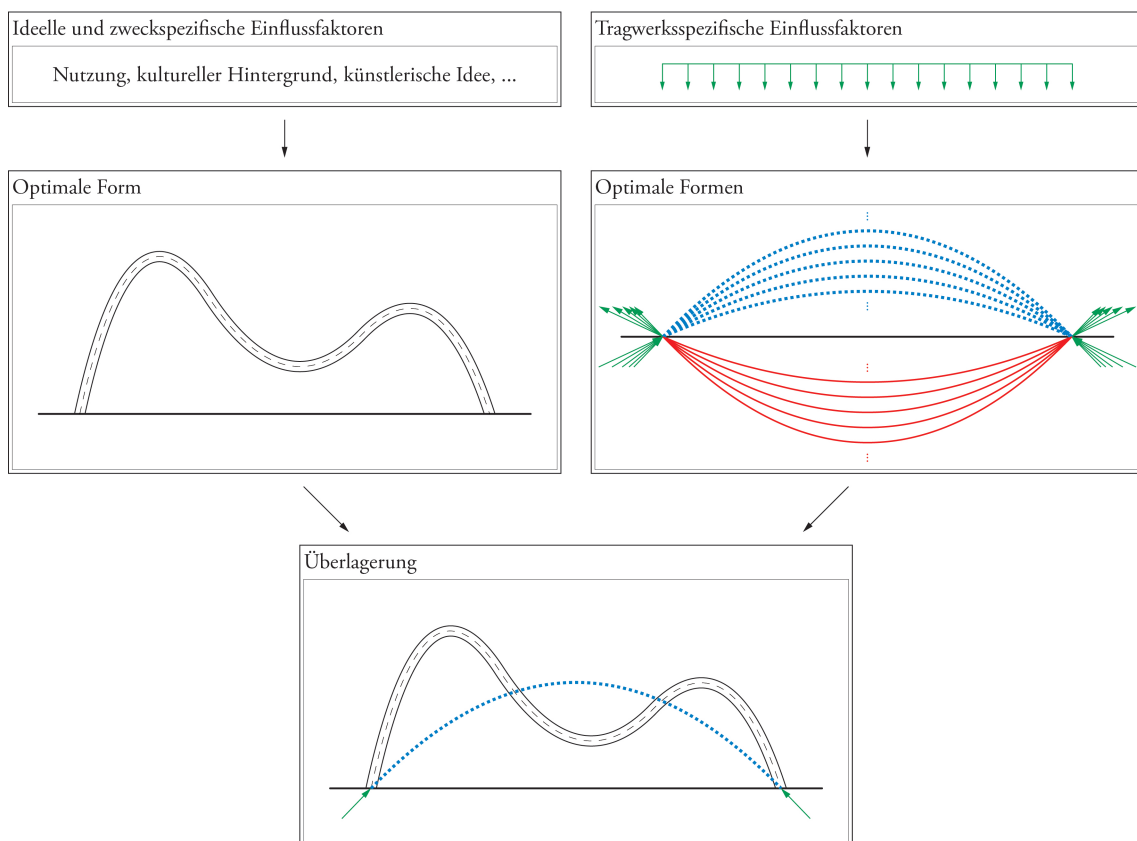


Abb. 9: Dialektische Beziehung zwischen ideellen sowie zweckspezifischen Faktoren und tragwerksspezifischen Einflussfaktoren in der Formgenese. a) oben links: Zweckspezifische und ideelle Faktoren mit diesbezüglich optimierter Form; b) oben rechts: Tragwerksspezifische Faktoren mit diesbezüglichen Idealformen; c) unten: Überlagerung der beiden Optimalformen.

Es wird davon ausgegangen, dass eine aufgrund zweckbezogener und ideeller Einflüsse bereits optimierte Form vorliegt (vgl. Abb. 9a), welche im Rahmen dieser Arbeit nicht hinterfragt werden soll. Seitens der tragwerksspezifischen Einflüsse resultiert infolge der Gesamtheit der äusseren Lasten ein infinites Spektrum von morphologisch ähnlichen Idealformen, welche durch Kräfteverläufe definiert werden (vgl. Abb. 9b). Ein Tragwerk, welches bezüglich Material- und Konstruktionsaufwand ein, wenn auch nicht zwingend globales, Minimum aufweist, ist so ausgebildet, dass ein möglicher Verlauf der inneren Kräfte auf der Schwerachse seines Querschnitts liegt und die Querschnittsfläche genau so gross ist, dass die durch die inneren Kräfte entstehenden Beanspruchungen aufgenommen werden können. Detailliertere Ausführungen dazu folgen in den Abschnitten 1.4.1 und 1.4.2. Im Allgemeinen kann keine Kombination einer paarweisen Überlagerung von Optima beider Seiten gefunden werden, die kongruent sind (vgl. Abb. 9c). Im Sinne der in Abschnitt 1.2 erstgenannten Haltung würde aus dieser Inkongruenz folgen, dass die Gestalt des architektonischen Objektes an eine der aus den tragwerksspezifischen Einflüssen resultierenden Idealformen angenähert würde und für die zweckspezifischen und ideellen Einflussfaktoren innerhalb dessen ein Optimum zu suchen wäre. Nach der Auffassung, die in dieser Arbeit vertreten wird, würde das zu einer Schwächung der Architektur des Gebäudes führen, weshalb hier die Haltung vertreten wird, dass sich die Gestalt des architektonischen Objektes an der aus Zweck und ideellen Faktoren resultierenden Optimalform orientieren muss. Unter diesen Randbedingungen kann ein Optimum für die tragwerksspezifischen Einflüsse gefunden werden. Dies bedeutet, dass innerhalb der determinierten Form ein Kräfteverlauf ermittelt wird, infolge dessen die Beanspruchungen im Tragwerk minimalen Material- und Konstruktionsaufwand bewirken.

Da vor allem in vielen expressiven Formen der zeitgenössischen Architektur (vgl. Abb. 4 und 8) eine dialektische Beziehung, wie Abbildung 9 illustriert, gefunden werden kann, wird in dieser Arbeit das übergeordnete Ziel verfolgt, für die Tragwerke derartiger Gebäude ein Optimierungsmodell zu entwickeln, welches eine Strategie im Sinne der beschriebenen Haltung anwendet. Die Überzeugung, dass sich dadurch bei den Tragwerken dieser Gebäude bezüglich des Material- und Konstruktionsaufwands ein Optimierungspotential erschliesst, basiert auf der häufig anzutreffenden morphologischen Ausprägung in Form einer doppelt gekrümmten Oberfläche. Denn während dies bei vielen zeitgenössischen, skulpturalen architektonischen Entwürfen einem Formwillen ohne physikalisch-technischen Ursprung entspringt, ist die Krümmung bei Schalen- und Membranbauten massgeblich für die Materialeffizienz des Tragwerks verantwortlich.

1.4 Theorie und Methodik des Optimierungsmodells

Im Folgenden werden die theoretischen und methodischen Grundlagen, auf welchen das angestrebte Optimierungsmodell aufbaut, erläutert. Hierzu gehören Theorien und Methoden der Mechanik, physikalische Beziehungen zwischen inneren Kräften und Tragwerksgeometrie sowie die Art und Weise der Idealisierung eines reellen Tragwerks als System.

1.4.1 Theorien und Methoden der Mechanik

Um statisch wirksame Formen in den architektonischen Entwurf integrieren zu können, bedarf es des Verständnisses des Tragverhaltens sowie des Zusammenhangs zwischen inneren Kräften und Form. Hierfür sind geeignete Methoden erforderlich, die diesen Zusammenhang darstellen und es ermöglichen, tragwerksspezifische Konsequenzen von Formänderungen abzuschätzen, sowie das formale Spektrum einer sinnvollen baulichen Realisierbarkeit zu erkennen. Die hier fokussierten architektonischen Formen weisen meist ein komplexes Tragverhalten auf, und deren idealisierte Systeme, an welchen die statischen Analysen erfolgen, besitzen eine hohe Unbestimmtheit, also eine grosse Anzahl an Freiheitsgraden resp. Unbekannten in den Gleichgewichtsbedingungen zur Bestimmung der inneren Kräfte. Dies sind die massgebenden Gründe, warum für die Ermittlung der inneren Kräfte von derartigen, und allgemein von komplexen Tragwerken meist auf computergestützte Modelle zurückgegriffen wird. Am meisten verbreitet sind diejenigen, welche auf der Methode der Finiten Elemente (FEM) basieren, die seit etwa 40 bis 50 Jahren in der Praxis Anwendung findet. Hierbei wird die Tragwerksgeometrie in finite Elemente unterteilt, deren Grössen einen Einfluss auf die Genauigkeit des Modells haben. Die meisten auf FEM aufbauenden Verfahren verwenden die Elastizitätstheorie als kontinuumsmechanische Basis. Allgemein bedeutet dies, dass die Freiheitsgrade bei der Ermittlung der inneren Kräfte durch Materialparameter des Tragwerks und/oder der Auflager

eliminiert werden. Konkret bei FEM werden in den Schnittstellen der Finiten Elemente Gleichungssysteme aus Kräften, Verschiebungen und Stoffgesetzen formuliert, woraus die Beanspruchungen der Elemente und damit des Tragwerks ermittelt werden [42]. Abbildung 10 zeigt beispielhaft das Ergebnis einer statischen Berechnung nach der Methode der Finiten Elemente, dargestellt in Form von Beanspruchungen des Tragwerkskontinuums.

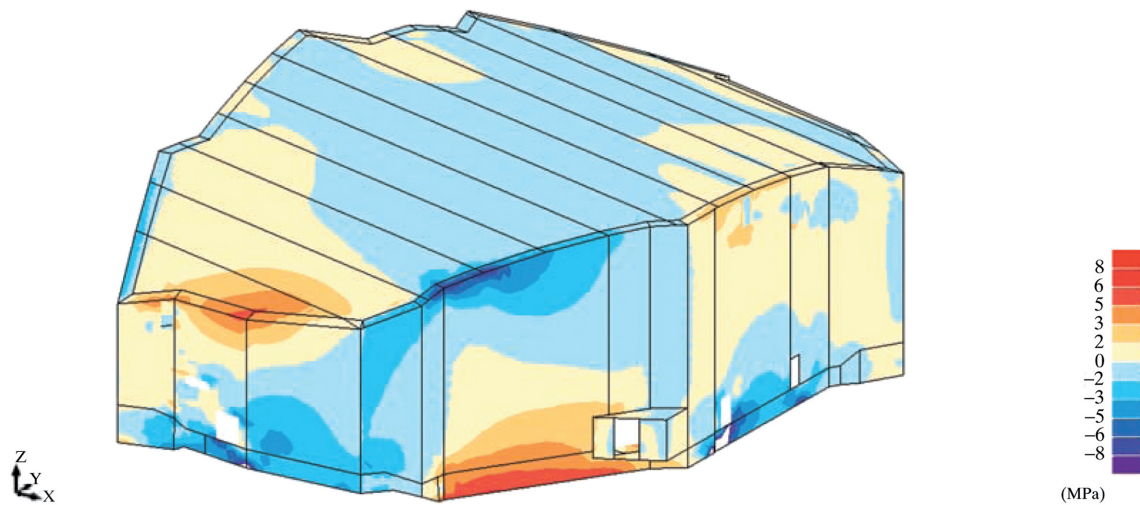


Abb. 10: Resultat einer Berechnung der inneren Kräfte mittels der Anwendung eines Finite Elemente Modells [63].

Häufig bergen Methoden die auf Finiten Elementen basieren Unsicherheiten, sowohl betreffend der kontinuumsmechanischen Basis als auch in der Art und Weise der Anwendung. Bezüglich der Elastizitätstheorie als Grundlage kann kritisch angemerkt werden, dass die Materialparameter, welche der Berechnung der inneren Kräfte zugrunde liegen, in der Regel linear-elastische Parameter, wie beispielsweise der E-Modul, sind. Diese Werte sind ideell und werden durch Laborversuche unter der Berücksichtigung einer statistischen Verteilung bestimmt. Selbst bei materialtechnisch einwandfreien Bauteilen kann in der Realität eine beträchtliche Streuung existieren. Weiter kann durch die Annahme eines linear-elastischen Materialverhaltens höchstens Stahl unterhalb der Fließgrenze realistisch abgebildet werden, und somit bleibt generell nichtlineares Materialverhalten verstärkt durch beispielsweise Reißen, Kriechen, Schwinden, Quellen oder ungewollte Auflagerverschiebung unbeachtet. Zu dieser Kritik ist zu sagen, dass das Finite Elemente Modell wie jedes Modell eine Idealisierung darstellt, wodurch die Wirklichkeit nur angenähert werden kann, und eine korrekte Interpretation der Ergebnisse stark von der Erfahrung des Anwenders abhängt. Jedoch besitzen viele EDV-Anwendungen auf Basis von FEM sehr komfortable Ein- und Ausgabeschnittstellen, wodurch auch weniger erfahrene Benutzer schnell lernen damit umzugehen. Was diesen jedoch verborgen bleibt, ist die Unüberschaubarkeit des Einflusses der Parameter, die den Berechnungen zugrunde liegen. Soll beispielsweise ein Tragwerk, für welches zu hohe innere Kräfte ermittelt wurden, optimiert werden, dann ist aus den Ergebnissen derartiger Anwendungen (vgl. Abb. 10) weder ersichtlich, ob dazu geometrische oder materialspezifische Parameter verändert werden müssten, noch an welcher Stelle im Tragwerk dies mit Vorteil erfolgen würde. Dadurch können solche Methoden für den Normalanwender schnell zur Black Box werden, und die Benutzung geschieht mit einer fast blinden Akzeptanz der Computerergebnisse. Darum ist es auch nicht verwunderlich, wenn über Anwendungen auf Basis von FEM Aussagen zu lesen sind wie beispielsweise: “Die FEM ist Vertrauenssache, d.h. Vertrauen in die Methode, zur verwendeten Software ...“ [4].

Für die Anwendung im Rahmen dieser Arbeit sind Methoden auf Basis der Elastizitätstheorie ungeeignet, da die inneren Kräfte bei Tragwerken mit statisch unbestimmten Systemen von geometrischen Parametern, wie beispielsweise Querschnittsfläche oder Widerstandsmoment, sowie von Materialparametern, wie beispielsweise dem E-Modul, abhängen und dadurch eine enge, nicht einfach nachvollziehbare Verknüpfung und Abhängigkeit zwischen den Komponenten Kraft, Geometrie und Material entsteht. Auch ungeeignet sind die gängigen Anwendungen, die auf der Methode der Finiten Elemente basieren, da diese darüber hinaus auch in der Ein- und Ausgabe die drei Komponenten vermischen, aber dennoch keinen einfach nachvollziehbaren Bezug zwischen ihnen ermöglichen. In dieser Arbeit wird das übergeordnete Ziel angestrebt, für eine Form, die durch zweckspezifische und ideelle Einflussfaktoren determiniert ist, ein Tragwerk zu finden, das bezüglich Material- und Konstruktionsaufwand ein Optimum aufweist.

Daraus leitet sich die Notwendigkeit einer hierarchischen Trennung der drei Komponenten wie folgt ab, wobei jede Hierarchiestufe nur von den Ranghöheren abhängig sein darf:

1. Geometrie (determinierte Form)
2. Kraft (innerer Kräfteverlauf und Tragwerk)
3. Material (Material- und Konstruktionsaufwand)

Es wird demnach sowohl eine kontinuumsmechanische Basis, als auch eine methodische Anwendung benötigt, welche die Trennung der Komponenten erlaubt. Bezüglich der mechanischen Basis wird die Plastizitätstheorie diesen Anforderungen gerecht und soll deshalb die Grundlage des zu entwickelnden Optimierungsmodells bilden. Genau wie seitens der Elastizitätstheorie existieren auf Grundlage der Plastizitätstheorie Methoden zur Bemessung und zum Nachweis von Tragwerken. Dabei wird ein ideal starr-plastisches Materialverhalten angenommen, was näherungsweise für Materialien gilt, deren elastische Dehnung ϵ_y bis zur Fließgrenze verhältnismässig klein gegenüber ihrer maximalen plastischen Dehnbarkeit ϵ_u ist. Der Unterschied zwischen linear elastisch-plastischem Materialverhalten und starr-plastischem ist in Abbildung 11 durch idealisierte Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Materialien wie beispielsweise Stahl dargestellt, welche auf Zug- und Druckbeanspruchung ein näherungsweise gleiches Dehnungsverhalten aufweisen.

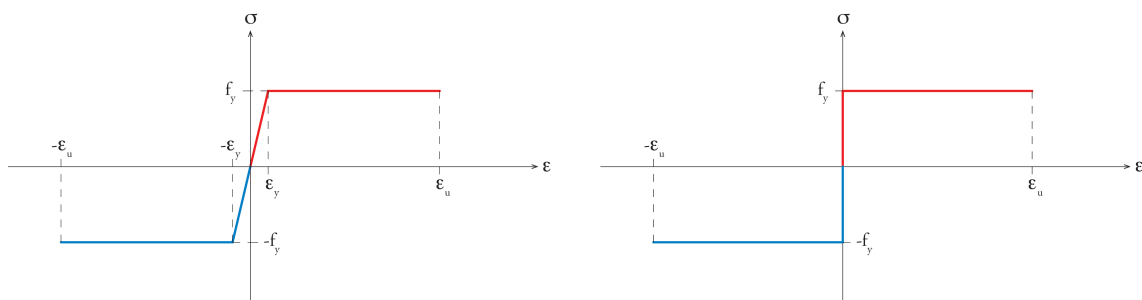


Abb. 11: Idealisierte Spannungs-Dehnungs-Diagramme. a) links: Linear elastisch-plastisch; b) rechts: Starr-plastisch.

Von zentraler Bedeutung für die Ermittlung der inneren Kräfte unabhängig von Querschnitts- und Materialparametern sind die beiden Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie: statischer Grenzwertsatz (auch: unterer Grenzwertsatz) und kinematischer Grenzwertsatz (auch: oberer Grenzwertsatz). Diese sind auf Rodney Hill, Daniel Drucker, William Prager sowie Weitere zurückzuführen und formulieren sich wie folgt [45] [87]:

Statischer Grenzwertsatz:

“Ein Belastungssystem, das zu einem statisch zulässigen Kräfte- oder Spannungszustand gehört, der die Fließbedingung nicht verletzt, beschreibt einen unteren Grenzwert der Traglast.“

Die Voraussetzungen für ein System mit statisch zulässigem Kräfte- oder Spannungszustand sind:

- An jeder Stelle sind die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt.
- Die statischen Randbedingungen sind erfüllt.

Kinematischer Grenzwertsatz:

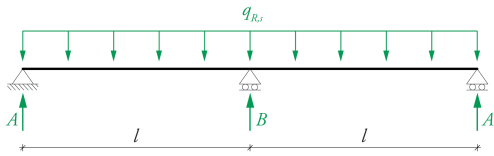
“Ein Belastungssystem, das mit einem kinematisch zulässigen Bewegungsmechanismus ein Gleichgewichtssystem bildet, beschreibt einen oberen Grenzwert der Traglast.“

Die Voraussetzungen für ein System mit kinematisch zulässigem Bewegungsmechanismus sind:

- Die geometrischen Randbedingungen sind erfüllt.
- Widerstand und Bewegung der Fließgelenke entsprechen den Fließbedingungen und dem Fließgesetz.
- Der Mechanismus weist einen Freiheitsgrad auf.

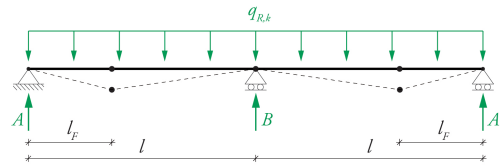
Oftmals erfolgt die Analyse von Tragwerken über die Definition eines adäquaten statischen Systems mit äusseren Kräften, an welchem die Schnittgrössen als innere Kräfte bestimmt werden. Wenn diese bei einem statisch unbestimmten System unter Anwendung eines der beiden Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie ermittelt werden, eliminiert sich die Unbestimmtheit durch eine zulässige Annahme resp. Festlegung. Diese ist, je nach Grenzwertsatz, entweder ein statisch zulässiger Kräfte- resp. Spannungszustand oder ein kinematisch zulässiger Bewegungsmechanismus. Beide Fälle werden im Folgenden am Beispiel der Ermittlung der Biegemomente am einfach statisch unbestimmten System eines Zweifeldträgers aufgezeigt.

System mit statisch zulässigem Kräfte- oder Spannungszustand



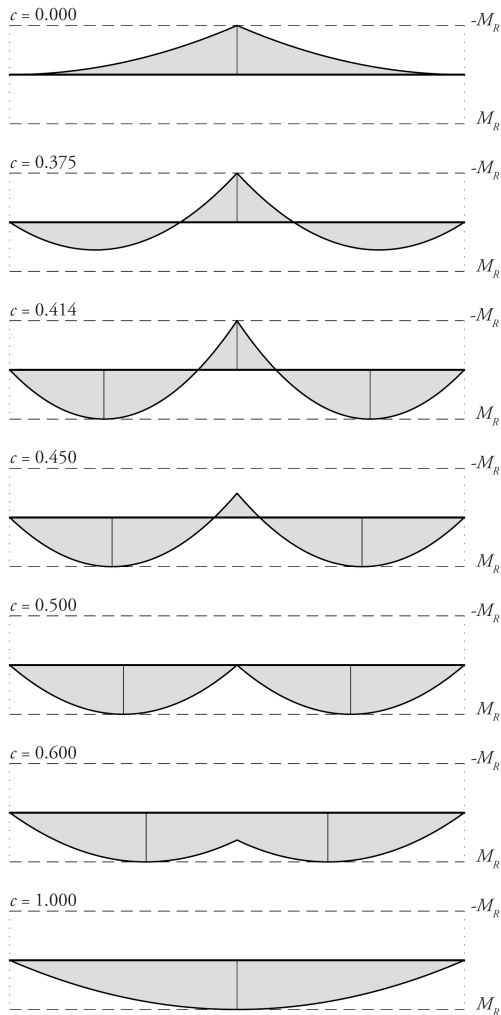
Variabler Parameter des Systems: $c = A / (q_{R,s} \cdot l)$

System mit kinematisch zulässigem Bewegungsmechanismus



Variabler Parameter des Systems: $c = l_F / l$

Biegemomentenverlauf in Abhängigkeit von c :



Biegemomentenverlauf in Abhängigkeit von c :

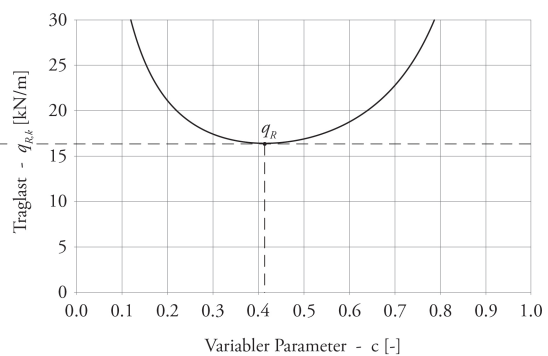
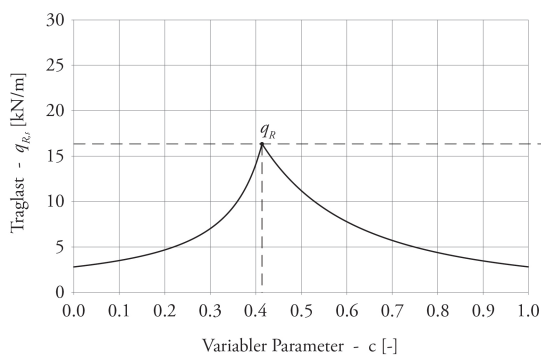
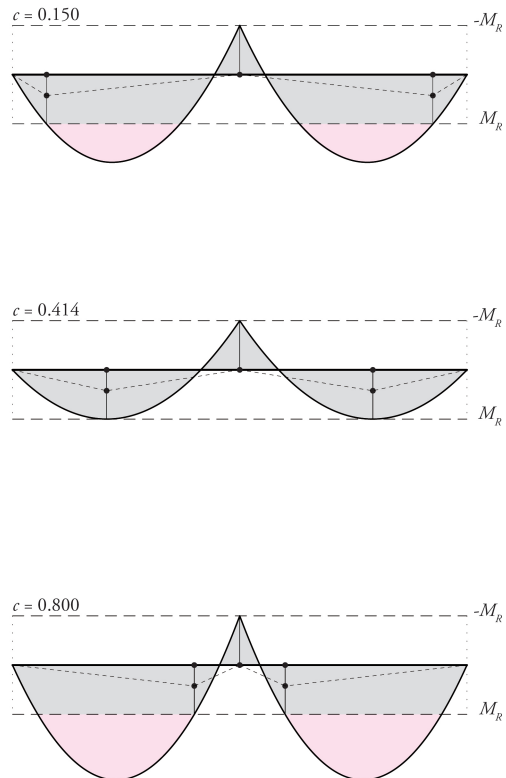


Abb. 12: Ermittlung der Biegemomente eines Zweifeldträgers auf Basis der Plastizitätstheorie: Statisches System mit äusseren Kräften, mögliche Verläufe der Biegemomente in Abhängigkeit eines Parameters c , Funktion des Zusammenhangs zwischen c und der Traglast. a) links: Nach dem statischen Grenzwertsatz; b) rechts: Nach dem kinematischen Grenzwertsatz.

Bezüglich des statischen Grenzwertsatzes wird im Beispiel in Abbildung 12a die Annahme eines zulässigen Kräfte- oder Spannungszustands über die Definition des Lastanteils der äusseren Auflager getroffen, bezüglich des kinematischen Grenzwertsatzes (vgl. Abb 12b) die Annahme eines zulässigen Bewegungsmechanismus über die Festlegung des Abstands der Fliessgelenke von den Systemenden. In der Abbildung wird dargestellt, wie sich die Verläufe der Biegemomente in Abhängigkeit des Parameters c , welcher die jeweilige Annahme quantifiziert, verändern. Dabei tritt im Falle des kinematischen Grenzwertsatzes in der Regel eine Verletzung der Fliessbedingungen auf, dargestellt als roter Bereich des Momentenverlaufs. Die beiden Diagramme im unteren Teil der Abbildung zeigen den Zusammenhang zwischen der Traglast des angenommenen Systems $q_{R,s}$ resp. $q_{R,k}$ und dem Parameter c . Eine derartige Darstellung als Funktion einer Variablen ist möglich, da als vereinfachende weitere Annahme ein symmetrisches System vorausgesetzt wurde. Die Funktionsverläufe veranschaulichen die allgemein gültige Tatsache, dass das Vorgehen nach dem statischen Grenzwertsatz eine Annäherung an die Traglast von unten darstellt, während dies nach dem kinematischen Grenzwertsatz von oben her erfolgt. Im speziellen Fall des Beispiels in Abbildung 12 ist für $c = \sqrt{2} - 1$ das Funktionsmaximum der Betrachtung nach dem statischen Grenzwertsatz identisch mit dem Minimum derer nach dem kinematischen. Ist dies gegeben, dann liegt die sogenannte vollständige Lösung vor. Diese ist im Allgemeinen schwierig zu ermitteln, jedoch ist das Maximum einer Funktion von $q_{R,s}$ immer kleiner gleich der Traglast q_R des reellen Systems, und das Minimum von $q_{R,k}$ ist immer grösser gleich q_R . Betrachtungen mit dem kinematischen Grenzwertsatz überschätzen demnach die Traglast, weil in Teilen des Tragwerks die Fliessbedingungen verletzt werden. Demgegenüber führen Annahmen nach dem statischen Grenzwertsatz zu einer Unterschätzung der reellen Leistungsfähigkeit eines Tragwerks, da im Allgemeinen kein Mechanismus vorliegt. Deshalb ist er für die Ermittlung der inneren Kräfte prinzipiell besser geeignet, weil auf der sicheren Seite liegend, und stellt diesbezüglich für die in der vorliegenden Arbeit formulierten Zielsetzungen eine geeignete Basis dar.

Aufbauend auf den inneren Kräften resp. den Schnittgrössen eines Tragwerks kann sowohl eine Bemessung durch Ermittlung der erforderlichen Querschnittswiderstände, als auch ein Nachweis durch Bestimmung der Traglast durchgeführt werden. Dabei entscheidet neben der Festigkeit des Materials auch die Art und Weise der Spannungsverteilung im Bauteilquerschnitt über die Höhe der inneren Kräfte die aufgenommen werden können. Betreffend der Art und Weise der Spannungsverteilung können zwei Extreme definiert werden: Einerseits die elastische ohne plastische Verformungen des Materials im Sinne der Elastizitätstheorie, und andererseits die plastische im Sinne der Plastizitätstheorie, bei welcher die Beanspruchung in jedem Teil des Querschnitts die Fließgrenze erreicht hat.

Die folgende Abbildung 13 vergleicht beispielhaft, anhand der Traglastbestimmung des Zweifeldträgers aus dem obigen Beispiel, die Schnittgrössenermittlung nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie mit jener auf Basis der Elastizitätstheorie, jeweils für einen Rechteckquerschnitt unter Annahme sowohl einer plastischen als auch einer elastischen Spannungsverteilung. Die Gegenüberstellung beschränkt sich auf die Betrachtung des Biegemoments, welches bei diesem Tragwerk für die Tragfähigkeit massgebend ist.

Nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie wird die Unbestimmtheit des Systems bei der Ermittlung der Schnittgrössen durch die Annahme resp. Festlegung eines statisch zulässigen Kräfte- oder Spannungszustands eliminiert. Für den folgenden Vergleich geschieht dies analog zu Abbildung 12a wobei der Parameter $c = \sqrt{2} - 1$ gewählt wird aus welchem die reelle Traglast q_R des Systems resultiert. Dazu ist zu bemerken, dass diese im Falle des Zweifeldträgers wie hier einfach, jedoch bei komplexeren Tragwerken weitaus schwieriger zu bestimmen ist. Auf Basis der Elastizitätstheorie werden die Schnittgrössen des statisch unbestimmten Systems durch ein spezielles Lösungsverfahren bestimmt, welches neben den Gleichgewichtsbedingungen weitere Bedingungen enthält, die an Material- und Querschnittsparameter gebunden sind. Ein solches Verfahren ist beispielsweise der Arbeitssatz, bei welchem in der Arbeit der inneren Kräfte mit dem E-Modul ein elastischer Materialparameter und mit dem Flächenträgheitsmoment ein Querschnittsparameter enthalten ist. Im Falle des Zweifeldträgers eliminieren sich diese zwar in der Bestimmung der Biegemomente wieder, jedoch resultiert daraus das Verhältnis von Feld- zu Stützmoment resp. jenes zwischen den Kräften in den äusseren Auflagern und dem Mittleren. Bei anderen statisch unbestimmten Tragwerken können die Schnittgrössen direkt Material- und Querschnittsparameter enthalten. Ergänzend sei erwähnt, dass im gezeigten Beispiel der Verlauf der Biegemomente, der sich aus einer Ermittlung auf Basis der Elastizitätstheorie ergibt, genau dem entspricht, welcher aus der Annahme von $c = 0.375$ nach dem statischen Grenzwertsatz resultiert.

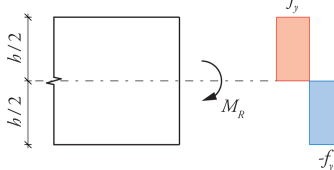
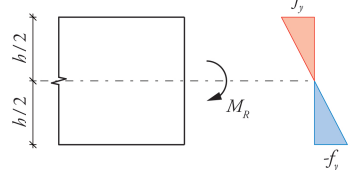
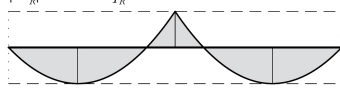
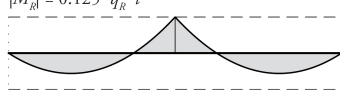
<p>Beanspruchung des Querschnitts</p> <p>Basis der Schnittgrössenermittlung</p>	<p>Plastische Spannungsverteilung</p> <p>$W_{pl} = b \cdot h^2 / 4$</p> 	<p>Elastische Spannungsverteilung</p> <p>$W_{el} = b \cdot h^2 / 6$</p> 
<p>Statischer Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie (maximal mögliche Traglast)</p> <p>$M_R = 0.086 \cdot q_R \cdot l^2$</p> 	<p>Fall 1:</p> <p>$q_R = 2.91 \cdot f_y \cdot b \cdot (b/l)^2$</p>	<p>Fall 2:</p> <p>$q_R = 1.94 \cdot f_y \cdot b \cdot (b/l)^2$</p>
<p>Elastizitätstheorie</p> <p>$M_R = 0.125 \cdot q_R \cdot l^2$</p> 	<p>Fall 3:</p> <p>$q_R = 2.00 \cdot f_y \cdot b \cdot (b/l)^2$</p>	<p>Fall 4:</p> <p>$q_R = 1.33 \cdot f_y \cdot b \cdot (b/l)^2$</p>

Abb. 13: Traglastbestimmung eines symmetrischen Zweifeldträgers. Vergleich der Schnittgrössenermittlung zwischen statischem Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie und Elastizitätstheorie, jeweils sowohl bei plastischer als auch elastischer Spannungsverteilung im Querschnitt.

Für den gezeigten Vergleich werden aus der Kombination einerseits einer Methode der Schnittgrössenermittlung und andererseits einer Art der Spannungsverteilung im Querschnitt, vier unterschiedliche Fälle definiert, welche sich wie folgt beschreiben lassen:

1. Die Traglast wird stringent nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie ermittelt.
2. Da die elastische Spannungsverteilung im Querschnitt einem statisch zulässigen Spannungszustand entspricht, kann auch diese im Sinne des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie angenommen werden.
3. Das Verfahren, die Schnittgrössen auf Basis der Elastizitätstheorie zu ermitteln, jedoch eine plastische Spannungsverteilung im Querschnitt anzunehmen kann angewandt werden und ist im Schweizer Normenwerk für Stahlbau SIA 263 [1] als Nachweisverfahren EP beschrieben. Das Vorgehen ist nach Elastizitätstheorie nicht korrekt jedoch stellen die auf dieser Basis ermittelten Schnittgrössen, wie oben erwähnt, ebenfalls einen zulässigen Kräfte- oder Spannungszustand im Rahmen des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie dar.
4. Die Traglast wird streng auf Basis der Elastizitätstheorie ermittelt.

Die Gegenüberstellung zeigt, dass aus einem stringenten Vorgehen nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie (Fall 1) der grösste Wert für die Traglast resultiert, während sich der kleinste aus einer Ermittlung streng auf Basis der Elastizitätstheorie (Fall 4) ergibt. Die Fälle 2 und 3, die eine Vermischung beider Theorien zu sein scheinen, lassen sich jeweils als zulässigen Kräfte- oder Spannungszustand im Rahmen des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie beschreiben, bei welchem die Traglast $q_{R,s}$ kleiner als die reelle Traglast q_R des Systems ist.

Von zentraler Bedeutung für die Entwicklungen dieser Arbeit ist die Möglichkeit, die der statische Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie im Umgang mit Freiheitsgraden in statisch unbestimmten Systemen bietet. Demnach können diese eliminiert werden indem ein zulässiger Kräfte- oder Spannungszustand angenommen wird, der statisch bestimmt ist und die Ermittlung der inneren Kräfte ausschliesslich mit den Gleichgewichtsbedingungen ohne Kenntnis von Material- und Querschnittsparametern möglich ist. Im Falle eines Nachweises besitzt das reelle, statisch unbestimmte Tragwerk gegenüber den angenommenen Systemen eine höhere Traglast. Im Falle einer Bemessung sind die auf Basis des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie ermittelten Tragwerksquerschnitte überdimensioniert. In beiden Fällen weist die Analyse Sicherheiten gegenüber der Realität auf. Eine Variation innerhalb der zulässigen Annahmen (vgl. Abb. 12a) ermöglicht eine Annäherung von unten an die Traglast, resp. eine Annäherung von oben an die minimal erforderlichen Dimensionen der Tragelemente.

Als geeignete Anwendungen die auf der Plastizitätstheorie basierenden werden die Methoden der Graphischen Statik und der Spannungsfelder erachtet [45]. Hierzu wird der gegebenen Geometrie eines Tragwerks ein zulässiger Verlauf der inneren Kräfte durch Zug- und/oder Druckelemente einbeschrieben, welche die Resultierenden von Spannungsfeldern darstellen. Ein innerer Kräfteverlauf ist dann zulässig, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Er muss vollständig innerhalb der Geometrie des Tragwerks verlaufen und die statischen Randbedingungen erfüllen.
- An jeder Stelle des Verlaufs müssen die Bedingungen für Gleichgewicht erfüllt sein.
- Für die resultierenden Spannungsfelder müssen an jeder Stelle die Fließbedingungen eingehalten sein.

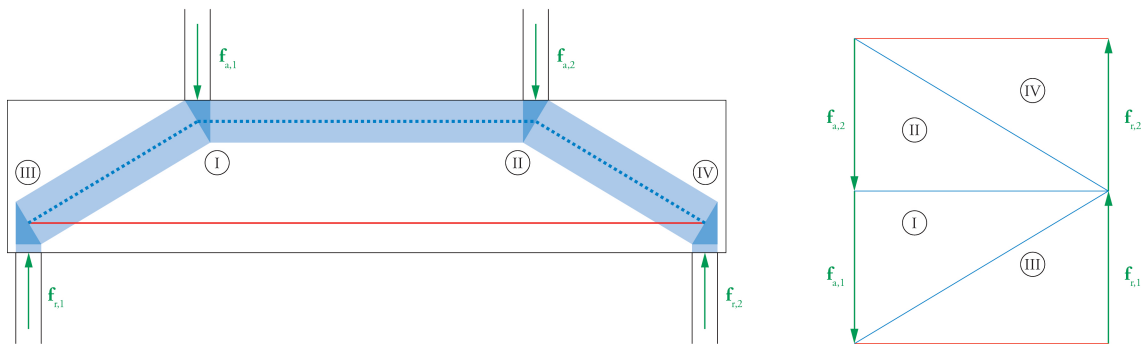


Abb. 14: a) links: Ein möglicher zulässiger Verlauf der inneren Kräfte eines durch zwei Einzellasten belasteten Einfeldträgers aus Stahlbeton mit den zugehörigen Spannungsfeldern; b) rechts: Ermittlung der Beträge der resultierenden Kräfte der Spannungsfelder mit der Methode der graphischen Statik.

Abbildung 14a zeigt beispielhaft einen zulässigen inneren Kräfteverlauf und die daraus resultierenden Spannungsfelder für einen Einfeldträger aus Stahlbeton, der durch zwei Einzellasten belastet ist. Sinnvoll in diesem Rahmen sind Kräfteverläufe, bei welchen die Kraftgrößen eindeutig durch die Formulierung des Kräftegleichgewichts in jedem Knoten ermittelt werden können. Auf diese Weise sind die inneren Kräfte lediglich an die Tragwerksgeometrie gebunden und nicht an Materialparameter. Diese erlangen erst bei der Überprüfung der Fließbedingungen Relevanz. Anstatt die Kraftgrößen mit den Gleichgewichtsbedingungen der analytischen Statik zu ermitteln, kann dies auch durch die Methode der graphischen Statik (vgl. Abb. 14b) erfolgen. Auf diese Weise stehen mit dem Verlauf der inneren Kräfte im Lageplan einerseits (vgl. Abb. 14a) und deren Grössen im Kräfteplan andererseits (vgl. Abb. 14b) zwei Diagramme nebeneinander, die es ermöglichen, auf eine anschaulich intuitive Art und Weise den Zusammenhang zwischen der Geometrie des Tragwerks und den darin wirkenden inneren Kräften herzustellen. In [45] und [87] wird gezeigt, dass diese Verfahren hinreichend genau für Tragfähigkeitsnachweise sind.

Für die hier angestrebten Entwicklungen erscheinen die beschriebenen Methoden als äusserst geeignet, da sie wie folgt in klarer Weise die eingangs des Abschnitts geforderte hierarchische Trennung der Komponenten Geometrie, Kraft und Material ermöglichen:

1. Gegebene Form
2. Annahme eines inneren Kräfteverlaufs und Bestimmung der Kraftgrössen
3. Materialisierung sowie Bemessung oder Nachweis mit Hilfe der Fließbedingungen

Unabhängig von den Zielen dieser Arbeit sei noch erwähnt, dass Methoden und Anwendungen, die auf dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie basieren, ein grosses Potential besitzen, um im interdisziplinären Diskurs zwischen Architekt und Bauingenieur bei der Entwicklung von Tragwerken zu dienen. Demgegenüber ist es mit Methoden und Anwendungen die auf der Elastizitätstheorie basieren, wie beispielsweise diejenige der Finiten Elemente, nur möglich Nachweise zu führen. Das heisst es kann damit kein Tragwerk entworfen, sondern nur seine Tauglichkeit überprüft werden.

Weiter ist zu ergänzen, dass mittels Verfahren nach der Elastizitätstheorie im Allgemeinen eine eindeutige Lösung unter der Berücksichtigung sämtlicher Parameter gefunden wird, während bei der Anwendung des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie ein zulässiger Kräfte- oder Spannungszustand für ein Tragwerk in weiten Grenzen frei gewählt werden kann. Daran können zwei wesentliche Vorteile festgestellt werden. Erstens sind, wie bereits erwähnt, die Ergebnisse unabhängig von ideellen Materialparametern, und

zweitens erfordert eine derartige Methode bei der Definition der Annahmen die Auseinandersetzung des Benutzers mit dem Tragsystem. Letzteres erscheint sehr wichtig, da diese Auseinandersetzung das Verständnis des Tragverhaltens und damit auch des Zusammenhangs zwischen Kraft und Form fördert.

1.4.2 Innere Kräfte und Geometrie

Das Hauptkriterium für die Materialeffizienz eines Tragwerks ist die Beanspruchungsart des Materials, welche durch die inneren Kräfte entsteht. Die grösste Effizienz wird erzeugt, wenn die Resultierenden der Spannungsfelder kongruent mit der Querschnittsschwerachse verlaufen. Für lineare Tragelemente ergibt dies einen Normalspannungszustand als reine Druck- oder reine Zugbeanspruchung mit konstanter Verteilung über die gesamte Querschnittsfläche (vgl. Abb. 15a). Für Flächentragwerke bedeutet dies ein Membranspannungszustand, der ebenfalls an jeder Stelle des Tragwerks auf die Querschnittshöhe bezogen, eine konstant verteilte reine Zug- oder reine Druckbeanspruchung aufweist (vgl. Abb. 15b).

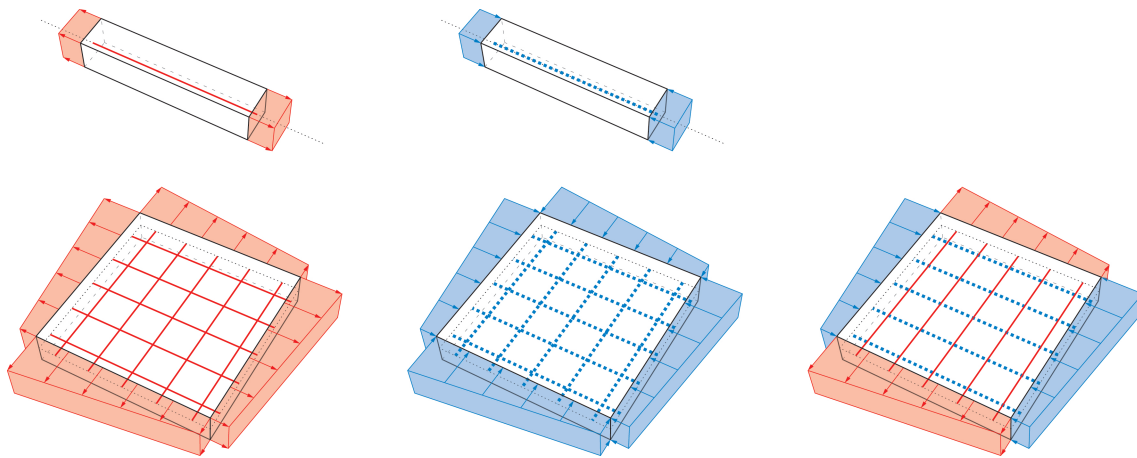


Abb. 15: a) oben: Normalspannungszustände eines linearen Tragelements infolge Zug- und Druckbeanspruchung; b) unten: Membranspannungszustände eines flächigen Tragelements infolge zweiachsiger Zug-, zweiachsiger Druck- und kombinierter Zug- und Druckbeanspruchung.

Bei den meisten Tragwerken, für die eine besonders materialeffiziente Form gesucht wurde, der demnach die in Abschnitt 1.2 erstgenannte Haltung zugrunde liegt, stellt sich infolge von Gravitationskräften als massgebend berücksichtigte Last, ein wie in Abbildung 15 dargestellter Normalspannungs- oder Membranspannungszustand ein. Eine dafür geeignete Form des Tragwerks kann beispielsweise graphisch mit Kräfteverläufen (vgl. Abb. 16b) oder experimentell mit Hängedarmen (vgl. Abb. 16a) in einfach nachvollziehbarer Weise gefunden werden.

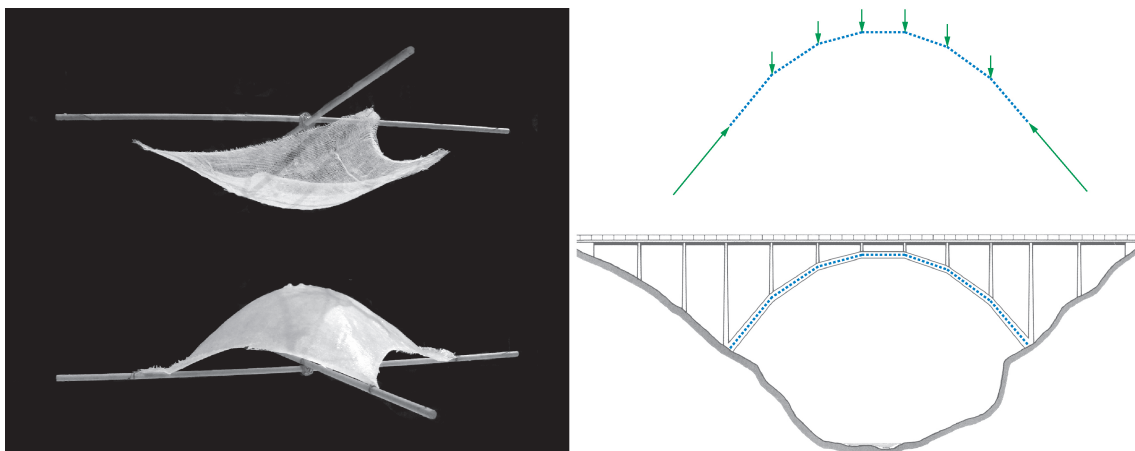


Abb. 16: a) links: Hängemodell mit Umkehrung aus den Experimenten Heinz Islers, ausgestellt auf der Biennale in Venedig, 2012; b) rechts: Entwicklung eines Kräfteverlaufs für die Lasten einer Brücke und Ermittlung einer Form mit reiner Normalkraftbeanspruchung (nach [38]).

Die graphische Ermittlung, welche vorzugsweise für eben verlaufende, lineare Tragwerke geeignet ist, beginnt mit dem Entwickeln eines zulässigen Kräfteverlaufs ohne die Existenz einer Geometrie (vgl. Abb. 16b, oben). Dieser muss jedoch dazu geeignet sein, einen Normalspannungszustand in einem Tragwerk zu ermöglichen. Die Geometrie des gesuchten materialeffizienten Tragwerks verläuft dann so, dass der Kräfteverlauf an jeder Stelle kongruent mit der Querschnittsschwerachse verläuft (vgl. Abb. 16b, unten). Durch Hängeexperimente kann in einer einfachen Weise für räumliche Flächentragwerke eine Form gefunden werden, die infolge Eigengewicht einen Membranspannungszustand mit ausschliesslich Zug aufweist, die Umkehrung der Hängeform einen solchen mit ausschliesslich Druck (vgl. Abb. 16a). Durch die Bedingung des Gleichgewichts der inneren Kräfte mit den Gravitationskräften weisen derartige Formen immer eine einfache oder doppelte Krümmung auf, die im Falle von gleichmässig verteilten äusseren Lasten parabolisch verläuft. Diesem Formenrepertoire gehören Tragwerke wie Bögen, Seile mit Bogenform, Gewölbe, Kuppeln, Schalen, Netze oder Membranen [52] an. Weist die Form eine einfache Krümmung auf, tritt der Normalspannungs- oder Membranspannungszustand jeweils nur für einen Lastfall ein, bei Flächen mit doppelter Krümmung ist dies für mehrere Lastfälle möglich.

Tragwerksgeometrien, bei welchen infolge der massgebenden Einwirkungen kein Normalspannungs- oder Membranspannungszustand möglich ist, erfordern aufgrund der höheren Beanspruchung des Querschnitts einen grösseren Aufwand materieller und konstruktiver Art bei der baulichen Umsetzung. Eine qualitative Beurteilung dieses Sachverhalts kann für lineare Tragelemente ebenfalls graphisch, mit Hilfe von Kräfteverläufen, durchgeführt werden. Dafür ist die zu untersuchende Geometrie mit einem Kräfteverlauf infolge einwirkender Lasten zu überlagern, der geeignet wäre, einen Normalspannungszustand in einem Tragwerk zu ermöglichen. Optimalerweise sind diese so zu wählen, dass sie eine möglichst geringe Abweichung zum Verlauf der Querschnittsschwerachse der Tragwerksgeometrie aufweisen. Als Beispiel hierzu zeigt Abbildung 17 zwei Beispiele von bogenartigen Druckkraftverläufen, die einem Brückentragwerk überlagert werden.

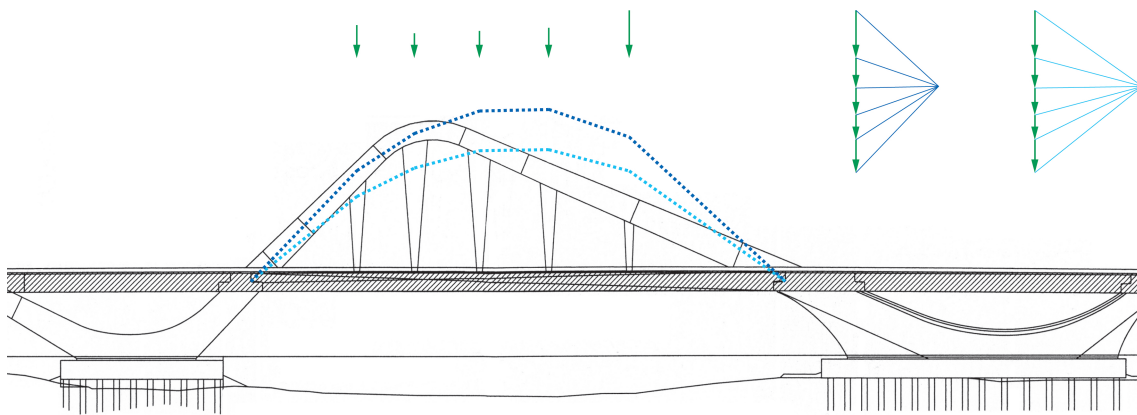


Abb. 17: *Sheikh Zayed Bridge, Abu Dhabi, Zaha Hadid, 2010 [37] mit den massgebenden einwirkenden Kräften auf das Tragwerk und zwei infolge der einwirkenden Lasten mögliche, reine Druckkraftverläufe mit zugehörigen Kräfteplänen.*

In Abhängigkeit der Exzentrizität e eines angenommenen Kräfteverlaufs zur Querschnittsschwerachse lassen sich je nach Materialeigenschaften des Tragwerks unterschiedliche Arten der Beanspruchung des Querschnitts feststellen. Beispielhaft dazu werden im Folgenden für einen Rechteckquerschnitt mit überlagertem Druckkraftverlauf, sowohl für linear elastisches als auch für starr-plastisches Materialverhalten, Beanspruchungszustände definiert.

Beanspruchungszustände für linear elastisches Materialverhalten mit Zugfestigkeit (vgl. Abb. 18a):

- I. Kräfteverlauf auf der Schwerachse des Querschnitts ($e = 0$): Druckbeanspruchung als Normalspannungszustand über die gesamte Querschnittshöhe.
- II. Kräfteverlauf im Kernbereich des Querschnitts ($0 < e \leq h/6$): Biegebeanspruchung mit linear elastischer Druckspannungsverteilung über die gesamte Querschnittshöhe.
- III. Kräfteverlauf ausserhalb des Kernbereichs des Querschnitts ($e > h/6$): Biegebeanspruchung mit linear elastischer Druck- und Zugspannungsverteilung über die gesamte Querschnittshöhe.

Beanspruchungszustände für linear elastisches Materialverhalten ohne Zugfestigkeit (vgl. Abb. 18b):

- I. Kräfteverlauf auf der Schwerachse des Querschnitts ($e = 0$): Druckbeanspruchung als Normalspannungszustand über die gesamte Querschnittshöhe.
- II. Kräfteverlauf im Kernbereich des Querschnitts ($0 < e \leq h/6$): Biegebeanspruchung mit linear elastischer Druckspannungsverteilung über die gesamte Querschnittshöhe.
- III. Kräfteverlauf ausserhalb des Kernbereichs des Querschnitts ($h/6 < e \leq h/2$): Biegebeanspruchung mit linear elastischer Druckspannungsverteilung bezüglich eines Teilquerschnitts, der übrige Querschnittsteil erfährt keine Beanspruchung (z.B. infolge Reissen).
- IV. Kräfteverlauf ausserhalb der Querschnittsgeometrie ($e > h/2$): Der Querschnitt kann keine Beanspruchung erfahren, demzufolge versagt das Tragwerk an dieser Stelle.

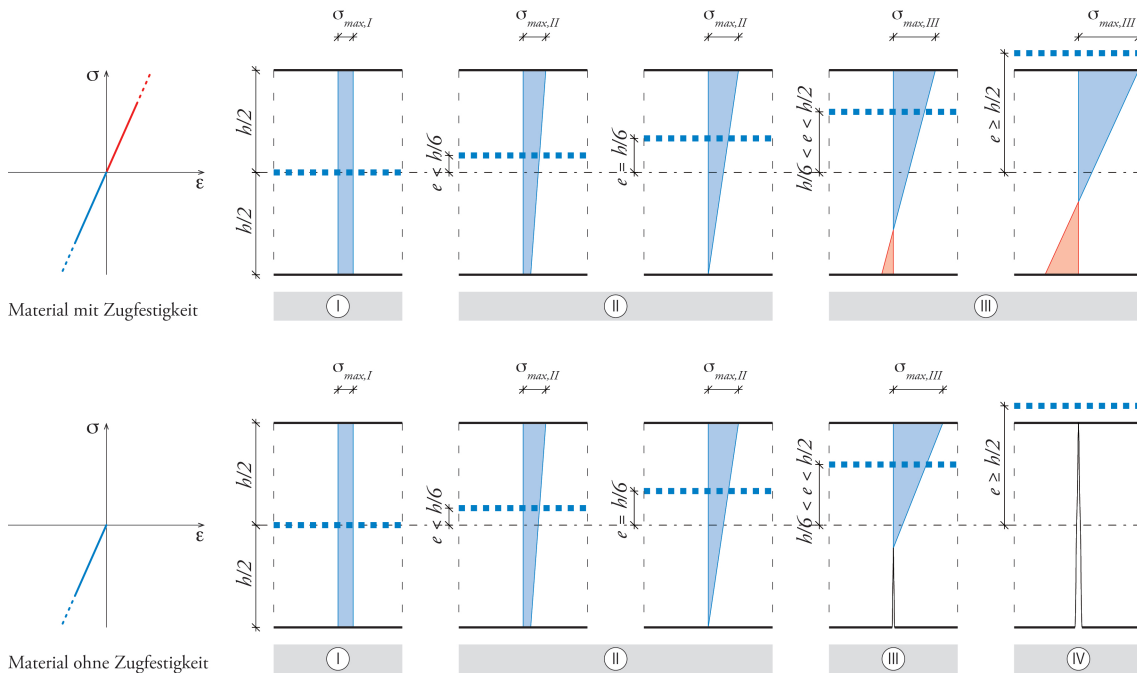


Abb. 18: Beanspruchungszustände bei linear elastischem Materialverhalten infolge eines überlagerten Druckkraftverlaufs in Abhängigkeit seiner Exzentrizität e zur Schwerachse bei einem Tragwerk mit Rechteckquerschnitt. a) oben: Material mit Zugfestigkeit; b) unten: Material ohne Zugfestigkeit.

Wenn bei linear elastischem Materialverhalten die Lage der Druckkraft, ihr Betrag und die Querschnittsgeometrie gegeben sind, ist aufgrund der Bedingungen für lineare Elastizität der Verlauf der Beanspruchung im Querschnitt eindeutig definiert. Bei starr plastischem Materialverhalten sind diesbezüglich weitere Annahmen erforderlich.

Beanspruchungszustände für starr-plastisches Materialverhalten mit Zugfestigkeit (vgl. Abb. 19a), unter der Annahme, dass jeweils die Zug- und die Druckspannung den gleichen Betrag haben:

- I. Kräfteverlauf auf der Schwerachse des Querschnitts ($e = 0$): Druckbeanspruchung als Normalspannungszustand über die gesamte Querschnittshöhe.
- II. Kräfteverlauf mit Exzentrizität zur Querschnittsschwerachse ($e > 0$): Biegebeanspruchung mit plastischer Druck- und Zugspannungsverteilung über die gesamte Querschnittshöhe.

Beanspruchungszustände für starr-plastisches Materialverhalten ohne Zugfestigkeit (vgl. Abb. 19b), unter der Annahme, dass die Druckkraft die maximal mögliche Querschnittsfläche beansprucht:

- I. Kräfteverlauf auf der Schwerachse des Querschnitts ($e = 0$): Druckbeanspruchung als Normalspannungszustand bezüglich der gesamten Querschnittshöhe
- II. Kräfteverlauf innerhalb der Querschnittsgeometrie ($0 < e \leq h/2$): Druckbeanspruchung als Normalspannungszustand bezüglich eines Teilquerschnitts, der übrige Querschnittsteil erfährt keine Beanspruchung (z.B. infolge Reissen)
- III. Kräfteverlauf ausserhalb der Querschnittsgeometrie ($e > h/2$): Der Querschnitt kann keine Beanspruchung erfahren, demzufolge versagt das Tragwerk an dieser Stelle

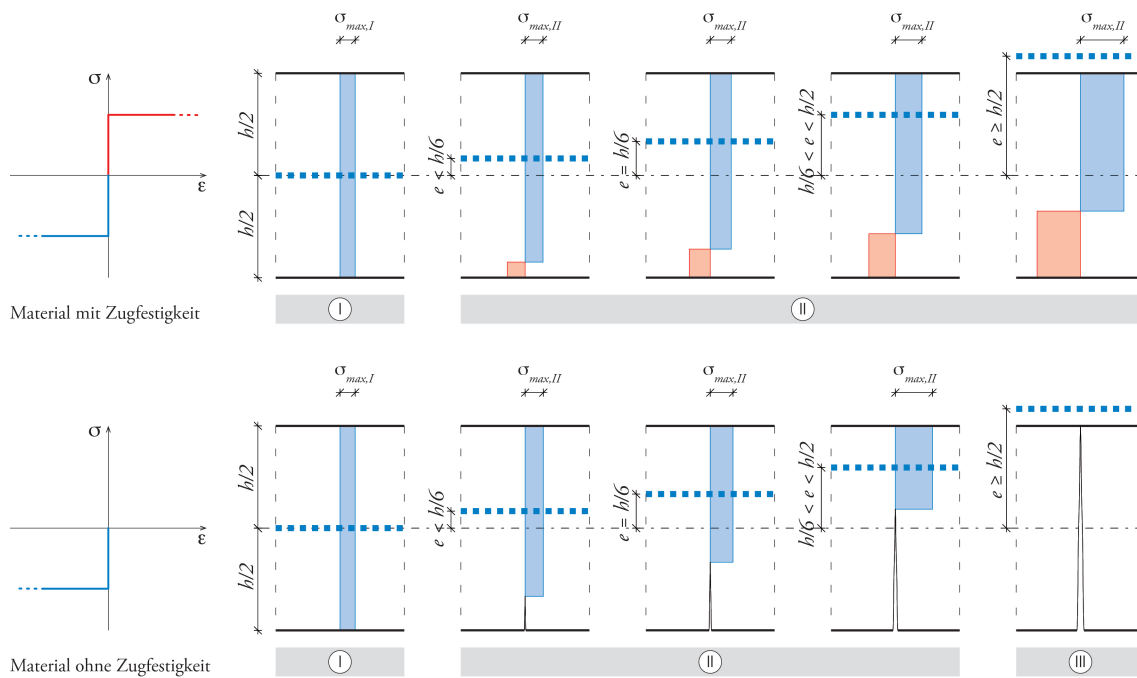


Abb. 19: Beanspruchungszustände bei starr-plastischem Materialverhalten infolge eines überlagerten Druckkraftverlaufs in Abhängigkeit seiner Exzentrizität e zur Schwerachse bei einem Tragwerk mit Rechteckquerschnitt. a) oben: Material mit Zugfestigkeit; b) unten: Material ohne Zugfestigkeit.

Dies bedeutet für das Beispiel in Abbildung 17, dass das Tragwerk Biege widerstand erfordert, da der Querschnitt Biegebeanspruchung aufweist. Für diese resultiert je nach angenommenem Druckkraftverlauf eine andere Verteilung der Intensität im Tragwerk. Der dunkelblau dargestellte Verlauf impliziert beispielsweise eine einseitige Verteilung mit hoher Intensität, der hellblau eine ausgewogenere Verteilung mit geringeren Maxima.

Für den Fall, dass das dargestellte Brückentragwerk aus einem Material ohne Zugfestigkeit wie beispielsweise Beton besteht, sind die eingezeichneten Kräfteverläufe nicht zulässig, weil sie teilweise ausserhalb der Geometrie verlaufen und infolge dessen Versagen eintritt. Da für die dargestellte Tragwerksform keine zulässigen reinen Druckkraftverläufe existieren, können nur solche gefunden werden, die bezüglich der Querschnittshöhe eine Kombination von Zug- und Druckkräften aufweisen (vgl. Abb. 20). Dies bedeutet jedoch, dass an den Stellen der Zugkraftverläufe im Tragwerksquerschnitt zusätzliche Komponenten mit Zugfestigkeit, wie beispielsweise Bewehrungsstahl im Beton, erforderlich werden. Allgemein existieren durch Kombination von Zug- und Druckkomponenten für jede beliebige Geometrie zulässige Kräfteverläufe, sofern an keiner Stelle die Fließbedingungen verletzt werden.

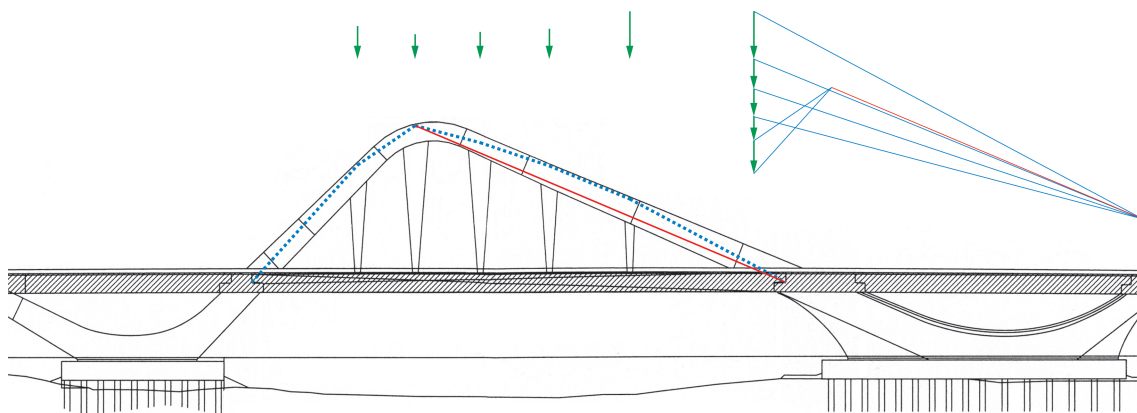


Abb. 20: Sheikh Zayed Bridge, Abu Dhabi, Zaha Hadid, 2010 [37] mit den massgebenden einwirkenden Kräften auf das Tragwerk. Für die Geometrie zulässiger Kräfteverlauf aus einer Kombination von Zug- und Druckkomponenten.

Die hier gezeigte Analyse über die Beanspruchung der Querschnitte als ebene Betrachtung eines linearen Tragwerks lässt sich unter Verwendung einer Anwendung zur räumlichen Darstellung in ähnlicher Art und Weise auf Flächentragwerke im Raum übertragen, wobei der Geometrie in diesen Fällen ein Referenzkräfteverlauf zu überlagern ist, der einen Membranspannungszustand in einem Tragwerk ermöglicht. Hierbei ist jedoch die Bandbreite weitaus vielfältiger und grösser als im ebenen Fall die Bandbreite jener, welche einen Normalspannungszustand ermöglichen.

Wenn die Materialeffizienz eines Tragwerksquerschnitts als Quotient aus der aufnehmbaren inneren Kraft und der Querschnittsfläche definiert wird, lässt sie sich aus der Exzentrizität eines Druckkraftverlaufs bezüglich der Schwerachse des Querschnitts ableiten. Bei gleich bleibender Maximalspannung σ_R des Materials verringert sich die Effizienz mit steigender Abweichung e des Kräfteverlaufs von der Querschnittschwerachse, was ebenfalls eine steigende Biegebeanspruchung bedeutet. Dies verdeutlicht die folgende Abbildung sowohl für linear-elastisches als auch für starr-plastisches Materialverhalten. Dabei tritt im Normalspannungszustand (vgl. Abb. 21a) die Maximalspannung σ_R über die ganze Querschnittshöhe verteilt auf, womit der Querschnitt optimal ausgenutzt ist. Im Gegensatz dazu sinkt die Ausnutzung in den biegebeanspruchten Zuständen (vgl. Abb. 21b und c), in welchen σ_R nur in Teilen des Querschnitts auftritt, während der übrige Anteil weniger resp. gar nicht beansprucht ist.

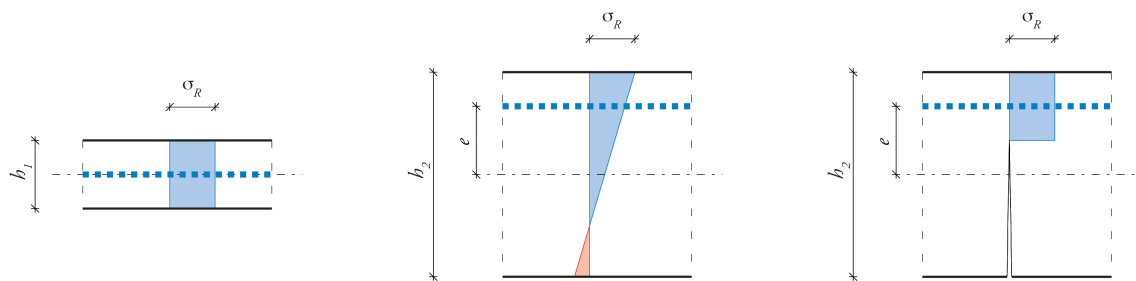


Abb. 21: Materialeffizienz eines Querschnitts. a) links: Normalspannungszustand; b) mittig: Biegebeanspruchter Zustand bei linear-elastischem Materialverhalten mit Zugfestigkeit; c) rechts: Biegebeanspruchter Zustand bei starr-plastischem Materialverhalten ohne Zugfestigkeit.

Im Folgenden wird der Zusammenhang von Biegebeanspruchung und erforderlicher Materialmenge am Beispiel des in Abbildung 22a dargestellten Systems eines linearen, gekrümmten Tragwerks aufgezeigt. Das Tragsystem erfährt Einwirkungen durch die äusseren Kräfte f_a und weist bezüglich der Ermittlung der inneren Kräfte einen Freiheitsgrad auf. Dieser wird im gezeigten Fall durch die Festlegung des Winkels β der Auflagerkraft f_r eliminiert (vgl. Abb. 22b), was einer Annahme nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie entspricht und es ermöglicht, die inneren Kräfte ausschliesslich durch die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln.

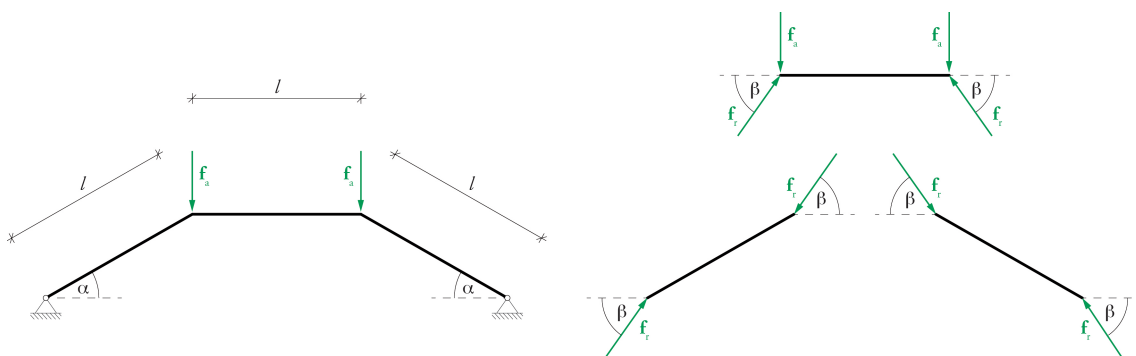


Abb. 22: a) links: Statisch unbestimmtes Beispielsystem mit einem Freiheitsgrad mit den äusseren Kräften; b) rechts: Auflagerkräfte und Kräfte an den Stabenden nach Annahme des Winkels β .

Aus den inneren Kräften resultieren die Beanspruchungen der Querschnitte und eine erforderliche Materialmenge für das Tragwerk. Als Material der stabförmigen Bauteile seien Rechteckquerschnitte in Holz angenommen. Für die Ermittlung des Materialaufwands erfolgt die Bemessung der Stäbe nach SIA 265 [2] bezüglich einer kombinierten Beanspruchung durch Normalkraft und Biegung unter der Berücksichtigung von Knicken und Kippen.

Als Anschauungsbeispiel der Materialeffizienz von biegebeanspruchten Tragwerken zeigt das folgende Diagramm (vgl. Abb. 23) die erforderliche Materialmenge durch die Funktion Φ des Neigungswinkels β der Auflagerkraft. Dargestellt ist $\Phi(\beta)$ für verschiedene Variationen des in Abbildung 22 gezeigten Tragwerks, die sich bezüglich der Neigung α der beiden Randstäbe unterscheiden.

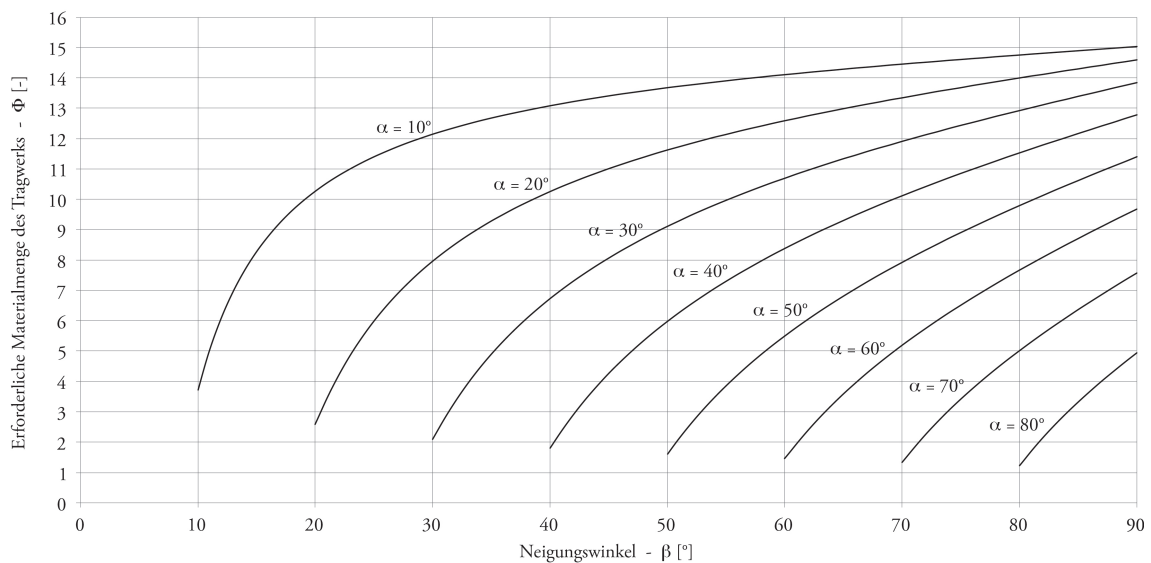


Abb. 23: Diagramme der erforderlichen Materialmenge eines Tragwerks nach dem in Abbildung 22 dargestellten System, als Funktion Φ des Neigungswinkels β der Auflagerkräfte. Dargestellt ist $\Phi(\beta)$ für verschiedene Winkel α der Neigung der Randstäbe.

Das Diagramm zeigt, dass jeweils der geringste Materialaufwand resultiert, wenn der Winkel β der Auflagerkraft \mathbf{f} , genau der Neigung α der Randstäbe entspricht. Dann herrscht ein Normalspannungszustand in allen Stäben.

1.4.3 Diskretisierung

Nahezu allen gängigen Methoden zur Ermittlung der inneren Kräfte liegt ein diskretisiertes System des realen Tragwerks zugrunde. Dazu wird die Geometrie in Elemente unterteilt, an welchen Teilkräfte ermittelt werden, die in ihrer Gesamtheit bezüglich des Tragwerks die inneren Kräfte darstellen. Die Etablierung derartiger Methoden in der Praxis und der Wissenschaft zeigt, dass die diskrete Betrachtung von Tragwerken eine hinreichende Genauigkeit darstellt. Für die Elemente existieren bezüglich der Dimension drei unterschiedliche Kategorien - lineare, flächige und volumetrische (vgl. Abb. 24) - wobei die Komplexität bei der statischen Analyse mit der Dimension zunimmt. Vielen auf FEM basierenden Methoden liegen Systeme zugrunde, welche ein Tragwerk durch volumetrische Elemente beschreiben. Die Tragsysteme der Stabstatik abstrahieren die reelle Geometrie mittels linearer Elemente, welche auf den Schwerachsen der Tragwerksquerschnitte verlaufen.

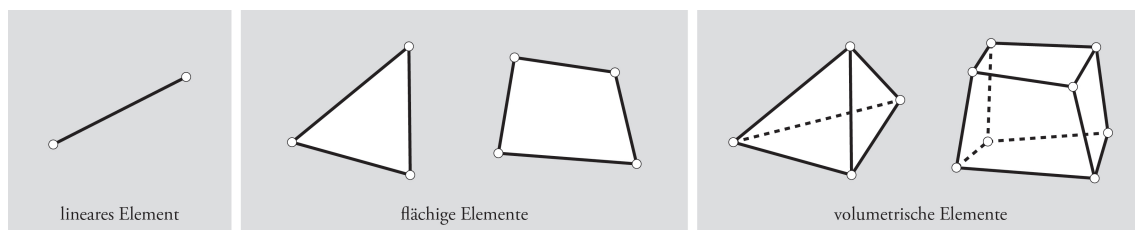


Abb. 24: Die drei bezüglich Dimension unterschiedenen Kategorien von Elementen zur Diskretisierung einer Tragwerksgeometrie.

Die Vorteile einer Zerlegung des Tragwerks in diskrete Elemente sind, wenn eine geeignete Methode zugrunde liegt, neben der guten algorithmischen Beschreibbarkeit vor allem auch die höhere Anschaulichkeit und Verständlichkeit. Als geeigneter Elementtyp für die Diskretisierung der räumlich gekrümmten Flächen-

tragwerke, welche in dieser Arbeit fokussiert werden, erscheint ein lineares, gerades Element, da dies der einfachste Elementtyp ist. Ein einfaches Element ist auch deshalb sinnvoll, da im Rahmen des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie dafür in leicht verständlicher Weise Annahmen zur Elimination der Freiheitsgrade im statischen System vorgenommen werden können.

Ein weiterer Vorteil der stabförmigen Diskretisierung von Flächentragwerken ist, dass diesbezüglich zahlreiche reelle Tragwerkstypen als Referenz existieren und es möglich wird, aus diesen ein System für die in dieser Arbeit betrachteten Tragwerke abzuleiten.

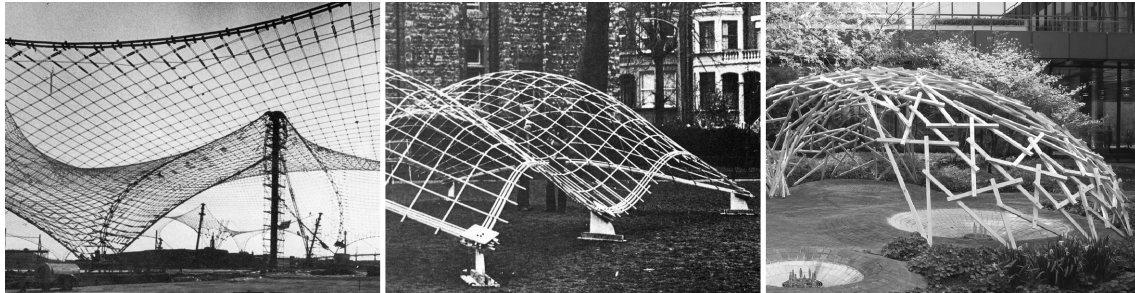


Abb. 25: a) links: Seilnetz des deutschen Pavillons auf der EXPO, Montreal, Frei Otto, 1967 [48]; b) mittig: Gitterschale zu Versuchszwecken, Frei Otto, 1962 [47]; c) rechts: Hebelstabwerk im Rahmen eines studentischen Workshops an der ETH Zürich, 2011 [72].

In Abbildung 25 sind die drei Typen solcher Referenztragwerke aufgezeigt, die sich bei Annahme von gelenkigen Verbindungen bezüglich der Beanspruchung in den Stabquerschnitten wie folgt unterscheiden:

- Seilnetze: Zugbeanspruchung als Normalspannungszustand
- Gitterschalen: Zug- oder Druckbeanspruchung, jeweils als Normalspannungszustand
- Hebelstabwerke: Biegebeanspruchter Zustand

Bei den in dieser Arbeit betrachteten Flächentragwerken kann eine lokal unterschiedliche Beanspruchung einerseits durch Membranspannungszustände und andererseits durch mehr oder weniger starke Biegung auftreten. Die stabförmig diskrete Systemisierung ermöglicht es, die Komplexität der kombinierten Beanspruchung von Membranspannungszustand und Biegung der Fläche auf eine Kombination von Normalspannungszustand und Biegung des Stabes zu reduzieren. Eine derartige systemhafte Beschreibung kann sowohl als diskretes Tragwerk ausgebildet werden, als auch die Resultierenden der inneren Kräfte eines Tragwerkskontinuums darstellen.

Für ein stabförmig diskretes Tragwerk erfordert eine Biegebeanspruchung diskrete Elemente mit entsprechender Biegetragfähigkeit und je nach Tragwerkstyp eine biegesteife Ausbildung der Knoten, in denen die Elemente gefügt werden. Dies äussert sich durch eine höhere erforderliche Materialmenge der Elemente und durch konstruktiv aufwändigere Knoten. Bei einer Tragwerksgeometrie, für welche innerer Kräfteverläufe existieren, die infolge der äusseren Einwirkungen ausschliesslich Normalspannungszustände in den Stäben erzeugen, ist die erforderliche Materialmenge geringer und es genügen für das Gleichgewicht einfachere, in statischem Sinne gelenkige, Knotenverbindungen. Bei gebauten Tragwerken dieser Art ist zu beobachten, dass oftmals aus Gründen der einfacheren Produktion alle Verbindungen und Elemente identisch ausgeführt werden. Da für ihre Querschnittswahl die maximale Beanspruchung im Tragwerk massgebend ist, sind unter Umständen viele Bereiche überdimensioniert, woraus eine Erhöhung des Materialaufwands resultiert.

Wenn das stabförmig diskrete System die Resultierenden der inneren Kräfte eines kontinuierlichen Flächentragwerks abbildet, bedeutet der Biegeanteil der Stabelemente senkrecht zur Fläche des Tragwerks eine Biegebeanspruchung dessen. Ist diese gering, ist bei Materialien ohne Zugfestigkeit unter Umständen eine Beanspruchung gemäss der Zustände II oder III in Abbildung 18b resp. des Zustands II in Abbildung 19b möglich. Ansonsten sind Massnahmen zur Aufnahme der Biegezugkräfte erforderlich, bei Stahlbeton beispielsweise durch Bewehrung. Im Gegensatz zu den Zugkräften infolge eines Membranspannungszustands, kann bei stark Biegebeanspruchten Stahlbetontragwerken, die Lage der Bewehrung eine Exzentrizität zur Querschnittsschwerachse aufweisen. Im Allgemeinen ist als Konsequenz von biegebeanspruchten, kontinuierlichen Flächentragwerken, vergleichbar wie in Abbildung 21 gezeigt, ein grösserer Materialaufwand, und im Speziellen bei Stahlbetontragwerken zusätzlich, ein höherer Bewehrungsgrad wahrscheinlich.

Bezüglich der angestrebten Optimierung des Konstruktions- und Materialaufwands erscheinen bezüglich der in Abbildung 25 dargestellten Tragwerksarten einerseits Gitterschalen und andererseits Hebelstabwerke geeignete Referenzen zur Entwicklung eines stabförmig diskreten Tragsystems. Bei Gitterschalen erfolgt die Verbindung der Stabelemente durch gelenkige Knoten, wodurch sie keine Biegetragfähigkeit besitzen und daher sehr materialeffizient ausgebildet werden können. Bei einer biegesteifen Konstruktion der Knoten werden solche Tragwerke auch als Roste bezeichnet. Da sich Gitterschalen und Roste nur in der Knotenausbildung unterscheiden, werden die Systeme von beiden zusammenfassend als Einfache Gitter bezeichnet. Hebelstabwerke besitzen ebenfalls Biegetragfähigkeit, jedoch sind im Gegensatz zu Rosten keine konstruktiv aufwändigen, biegesteifen Knoten erforderlich, sondern es genügen einfache gelenkige.

1.5 Entwicklungen dieser Arbeit

Es wurde festgestellt, dass skulpturale Tragwerksformen der zeitgenössischen Architektur häufig einen sehr hohen Material- und Konstruktionsaufwand erfordern. Dies erscheint ein unbefriedigender Zustand, da derartige Geometrien oftmals durch ihre doppelte Krümmung der Oberfläche morphologische Ähnlichkeiten zu Flächentragwerken aufweisen, deren Form nach dem Verlauf der inneren Kräfte optimiert wurde. Da bei diesen die Krümmung unmittelbar daraus resultiert, in den Tragwerksquerschnitten eine Beanspruchung durch Normalspannungs- oder Membranspannungszustände zu erzeugen, wodurch das Tragwerk sehr materialeffizient ausgebildet werden kann, scheinen bei vielen zeitgenössischen Bauten diesbezüglich noch Möglichkeiten der Optimierung vorhanden zu sein. Um diese zu eruieren, wurde in Abschnitt 1.3 das übergeordnete Ziel formuliert, ein Modell zu entwickeln, welches das Potential einer gegebenen Form zur Abtragung der Kräfte auslotet und ein Optimum bezüglich Material- und Konstruktionsaufwand sucht. Mechanische Grundlage ist dabei der statische Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie, im Rahmen dessen die Freiheitsgrade bei der Bestimmung der inneren Kräfte durch Annahmen eliminiert werden. Da diese innerhalb eines Wertebereichs variierbar sind, können für das gleiche Tragwerk unterschiedliche Zustände der inneren Kräfte erzeugt werden, wodurch das Tragverhalten innerhalb eines Spektrums beeinflussbar ist. Das angestrebte Optimierungsmodell soll denjenigen Zustand der inneren Kräfte suchen, bei welchem das Minimum an Material- und Konstruktionsaufwand resultiert.

In dieser Arbeit werden zwei grundlegenden Komponenten dafür entwickelt, sowie der Ansatz des Optimierungsmodells aufgezeigt. Eine der entwickelten Komponenten ist ein System zur Abstraktion des reellen, räumlich gekrümmten Flächentragwerks, die zweite ist eine geeignete Methode zur Bestimmung der inneren Kräfte infolge der äusseren Einwirkungen.

Tragsystem

Die gegebene Geometrie wird durch ein geeignetes Tragsystem aus diskreten Stabelementen modelliert, um eine Bestimmung der inneren Kräfte mit begrenzter Komplexität zu erzielen. Dabei muss das System bezüglich der Beanspruchung in den Stabquerschnitten sowohl Biegung als auch durch Normalspannungszustände ermöglichen, wofür das Einfache Gitter und das Hebelstabsystem geeignet erscheinen. Zur Erörterung der Tauglichkeit werden diese beiden Systeme in Kapitel 2 bezüglich der relevanten Eigenschaften untersucht und verglichen. Aus den Erkenntnissen der Evaluation beider Systeme wird in Kapitel 3 ein für das Optimierungsmodell geeignetes Tragsystem entwickelt.

Methode zur Bestimmung der inneren Kräfte

Für die Ermittlung der inneren Kräfte infolge der einwirkenden Lasten wird in Kapitel 4 eine für das Tragsystem geeignete Analysemethode entwickelt, welche eine Variation des Tragverhaltens im Rahmen des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie ermöglicht. In Kapitel 5 erfolgt die Diskussion dieser Methode.

Ansatz des Optimierungsmodells

Aus den inneren Kräften wird die Beanspruchung des Tragwerks ermittelt, woraus der erforderliche Materialaufwand resultiert. Dies, sowie die Art und Weise der Beurteilung der Resultate, wird in Kapitel 6 aufgezeigt. Darauf basierend wird der Zusammenhang der variablen Parameter des Tragsystems und der Materialmenge eines daraus resultierenden Tragwerks, sowie ein Ansatz der diesbezüglichen Optimierung aufgezeigt.

2 Vergleich von Systemen stabförmiger Flächentragwerke

In diesem Kapitel werden die Systeme Einfaches Gitter und Hebelstabsystem bezüglich Struktur, Geometrie, Tragverhalten, Konstruktion und historischer Entwicklung untersucht, verglichen sowie evaluiert, um daraus im folgenden Kapitel 3 ein Tragsystem für das angestrebte Optimierungsmodell zu entwickeln.

Aus den verglichenen Systemen resultieren beiderseits diskrete Flächentragwerke, welche aus kurzen Stäben verbunden sind und Räume überdecken oder umschliessen. Meistens weisen diese Tragwerke in Relation zur Stablänge relativ grosse Spannweiten auf. Vorteile der verhältnismässig geringen Bauteilgrössen sind der einfache Transport und der Umstand, dass derartige Tragwerke je nach Verbindungstechnik relativ schnell und ohne schweres Gerät aufgebaut werden können. Insbesondere wenn die Stäbe aus Holz sind, ist es denkbar, dass hierfür Ausschussware aus anderen Produktionen verwendet wird. Unter bestimmten Voraussetzungen ist die Verwendung gleicher Bauteilgrössen möglich.

2.1 Struktur und Geometrie

Beide hier verglichene Systeme von Flächentragwerken bestehen aus zwei Typen von Subsystemen: Die linearen Subsysteme "Stäbe", welche durch die punktförmigen Subsysteme "Knoten" gefügt sind. Mittels Interaktionspunkten wird die Fügung zweier Subsysteme beschrieben, wobei diese nur zwischen Stab und Knoten bestehen kann. Dadurch existiert im Subsystem Knoten für jeden anschliessenden Stab ein Interaktionspunkt.

2.1.1 Einfaches Gitter

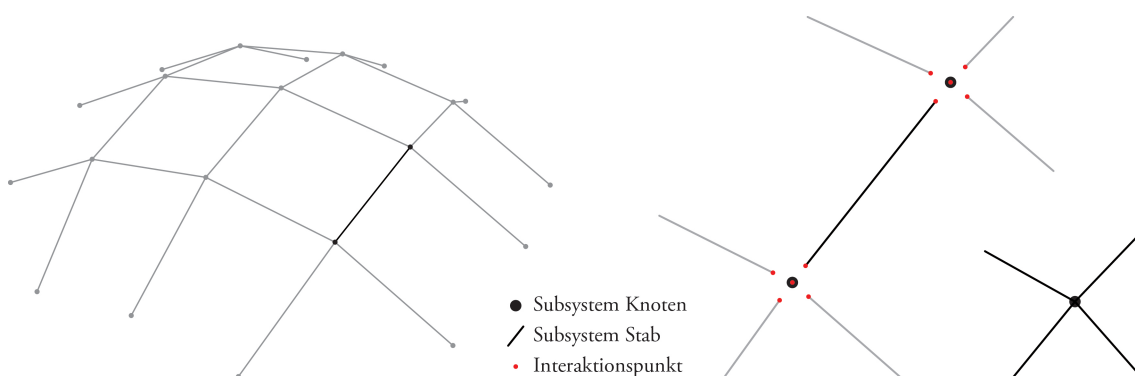


Abb. 26: a) links: System Einfaches Gitter; b) mittig: Subsysteme Stab und Knoten; c) rechts: Singuläre Verbindung.

Die Subsysteme der Stäbe des Einfachen Gitters weisen ausschliesslich an ihren beiden Enden Interaktionspunkte auf (vgl. Abb. 26b). An die Knoten dieses Systems können prinzipiell beliebig viel Stäbe angeschlossen sein und demzufolge darauf auch entsprechend beliebig viele Interaktionspunkte liegen. Deshalb wird eine derartige Verbindung aus Knoten und Stäben in dieser Arbeit als singuläre Verbindung (vgl. Abb. 26c) bezeichnet.

Die Stäbe von Einfachen Gittern umschreiben geschlossene Polygone, die innerhalb eines Gesamtsystems regelmässig, also aus gleichen Kantenlängen und gleichen Winkeln bestehend, und/oder unregelmässig sein können. Dabei beschreibt jeder Stab genau eine Verbindungskante von zwei Vielecken. Die Gesamtfläche des Systems kann sich aus gleichen (vgl. Abb. 27a) und/oder verschiedenartigen (vgl. Abb. 27b) Polygonen zusammensetzen.

Mit dem Winkel zwischen den Stabelementen am Knoten kann die Krümmung des Systems beeinflusst werden. Durch Variation der Polygontypen, der Elementlängen und der Winkel in den Knoten können durch das System des Einfachen Gitters beliebige Flächen im Raum erzeugt werden.

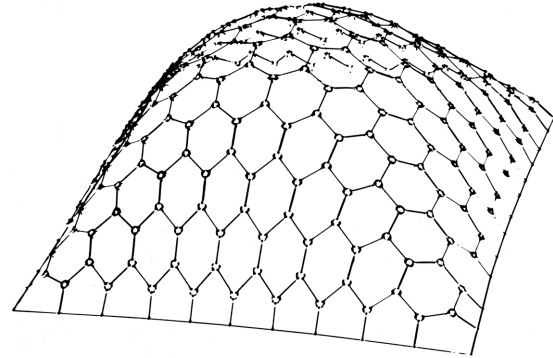


Abb. 27: a) links: Tacoma Dome, Tacoma, McGranahan Messinger Ass., 1983 [30], Tragwerk mit dem System eines Einfachen Gitters, bei welchem die Stäbe gleiche, regelmässige Dreiecke umschreiben; b) rechts: Einfaches Gitter, bei welchem die Stäbe verschiedenartige Sechsecke umschreiben [47].

2.1.2 Hebelstabsystem

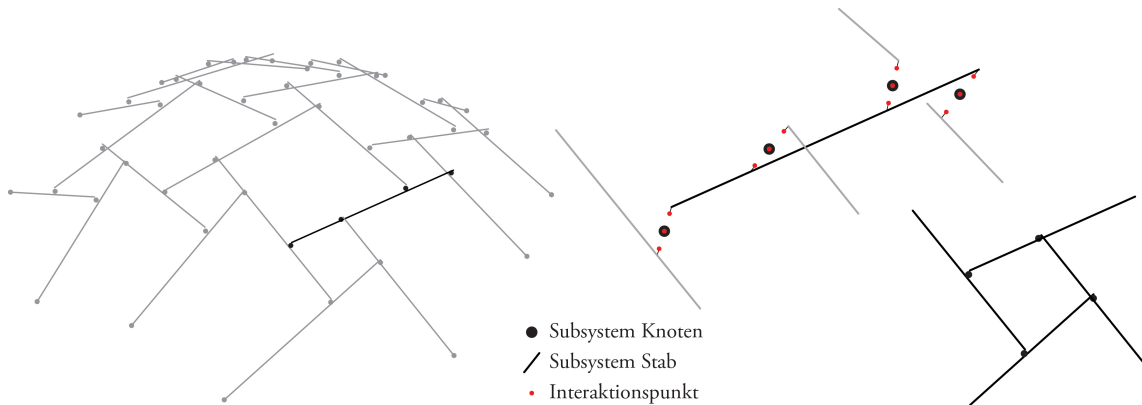


Abb. 28: a) links: Hebelstabsystem; b) mittig: Subsysteme Stab und Knoten; c) rechts: Reziproke Verbindung.

Im Vergleich zum Einfachen Gitter erscheinen die Elemente des Hebelstabsystems verwoben in der Struktur. Hierbei weisen die Stäbe drei oder vier Interaktionspunkte auf, in welchen sie an Knoten angeschlossen sind (vgl. Abb. 28b). Diese sind einerseits zwei "Endinteraktionspunkte", welche jeweils an einem Stabende liegen, und andererseits ein oder zwei "Innere Interaktionspunkte", welche sich an einer beliebigen Stelle zwischen den beiden Stabenden befinden. Stäbe im Randbereich von Hebelstabsystemen können drei Interaktionspunkte aufweisen, alle übrigen umfassen vier. An jeden Knoten dieses Systems schliessen genau zwei Stäbe an, einer davon mit einem Endinteraktionspunkt, der andere mit einem inneren. Zwei Stäbe, welche über einen Knoten miteinander verbunden sind, werden hier Nachbarstäbe genannt. Prinzipiell ist die Lage des Knotens nicht exakt definiert, jedoch wird sie in dieser Arbeit auf dem halben senkrechten Abstand zwischen den Achsen der Nachbarstäbe festgelegt (vgl. Abb. 28b). Die einzige Ausnahme bilden die Auflagerknoten des Gesamtsystems. Diese und auch der entsprechende Endinteraktionspunkt des Stabs liegen auf dessen Achsenende.

Im Englischen wird das Hebelstabsystem meist als Reciprocal Frame System bezeichnet (z.B. in [59]). Die Reziprozität besteht hierbei in der zyklischen Verbindung von Stäben und Knoten, die in dieser Arbeit als reziproke Verbindung (vgl. Abb. 28c) bezeichnet wird. Diese kann im mathematisch positiven Drehsinn (vgl. Abb. 29, rote Pfeile) oder negativen Drehsinn (vgl. Abb. 29, blaue Pfeile) ausgebildet werden. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass von jedem beteiligten Stab ein Endinteraktionspunkt und dessen nächstliegender innerer involviert ist. Eine reziproke Verbindung inklusive der daran beteiligten Stäbe wird Grundsystem genannt (vgl. Abb. 32b). Dabei wird ein geschlossenes Vieleck umschrieben, welches regelmässig oder unregelmässig sein kann und hier als Grundpolygon bezeichnet wird. Wenn ein Grundpolygon n Stäbe aufweist, werden das entsprechende Grundsystem und die reziproke Verbindung im Folgenden als n -stäbig bezeichnet. Hebelstabsysteme können aus gleichen oder verschiedenartigen Grundsystemen zusammengesetzt werden, wobei durch die Fügung weitere Vielecke entstehen, die hier Komplementärpolygone genannt werden (vgl. Abb. 30).

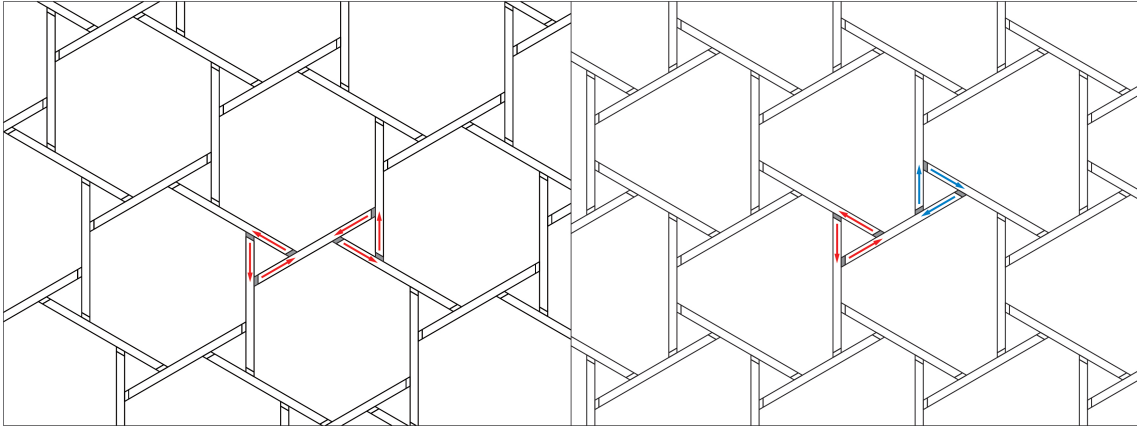


Abb. 29: a) links: Hebelstabwerk mit reziproken Verbindungen positiven Drehsinns; b) rechts: Hebelstabwerk mit reziproken Verbindungen positiven und negativen Drehsinns.

Für die Ausbildung eines Hebelstabsystems besteht ein Variantenreichtum bezüglich der Struktur, wobei die Gesamtheit aller Grund- und Komplementärpolygone seine Fläche definiert. Da jeder Stab mindestens zwei Verbindungskanten von Grund- resp. Komplementärpolygonen beschreibt, existiert eine Abhängigkeit bei der Kombination verschiedenartiger Vielecke.

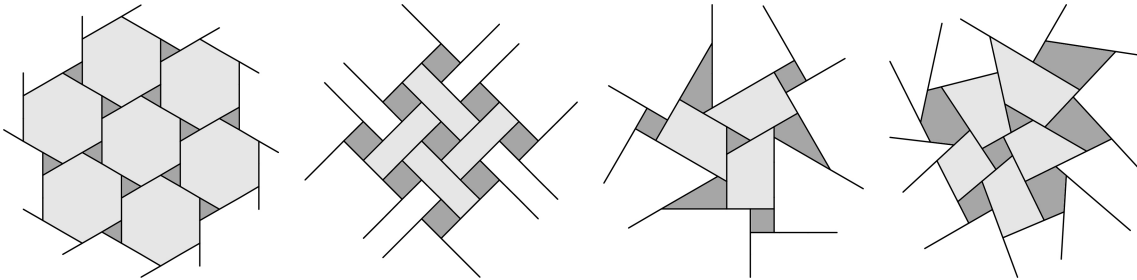


Abb. 30: Beispiele für das Variantenreichtum des Hebelstabsystems (dunkelgrau: Grundpolygone; hellgrau: Komplementärpolygone).

Die Bezeichnung Hebelstabsystem leitet sich aus der Art und Weise ab, wie das entsprechende Tragwerk aufgebaut wird (vgl. Abb. 31). Begonnen wird mit der Fügung von Stäben zu einem einzelnen Grundsystem. Dieses wird sukzessive durch die Ausbildung weiterer Grundsysteme ergänzt. Dabei wird jedes dadurch fertiggestellt, dass beim Schließen des Grundpolygons der letzte Stab eingehebelt wird und damit die reziproke Verbindung aktiviert wird.

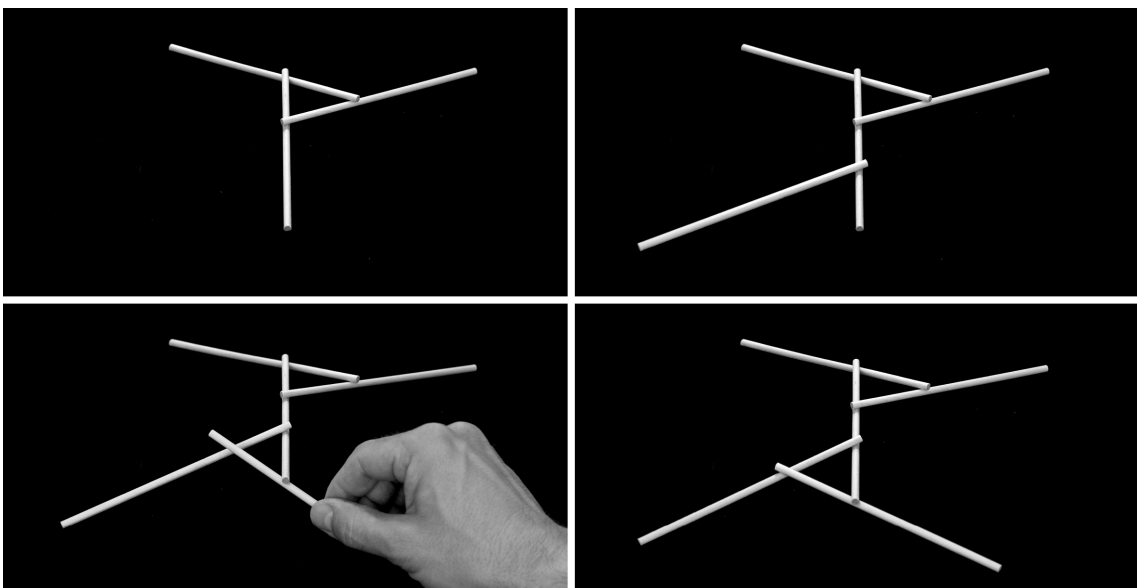


Abb. 31: Prinzip des Aufbaus eines Hebelstabwerks.

Zwei massgebende Parameter, durch welche die Geometrie eines Hebelstabsystems definiert ist, sind die Abstände, welche in Abbildung 32b durch a und d beschrieben werden. Dabei wird die Distanz der Lotfußpunkte zwischen einem Endinteraktionspunkt und dessen nächstliegendem inneren auf der Stabachse mit a bezeichnet, und der senkrechte Abstand von Achsen zweier Stäbe, die durch einem Knoten miteinander verbunden sind, mit d (vgl. Abb. 32b).

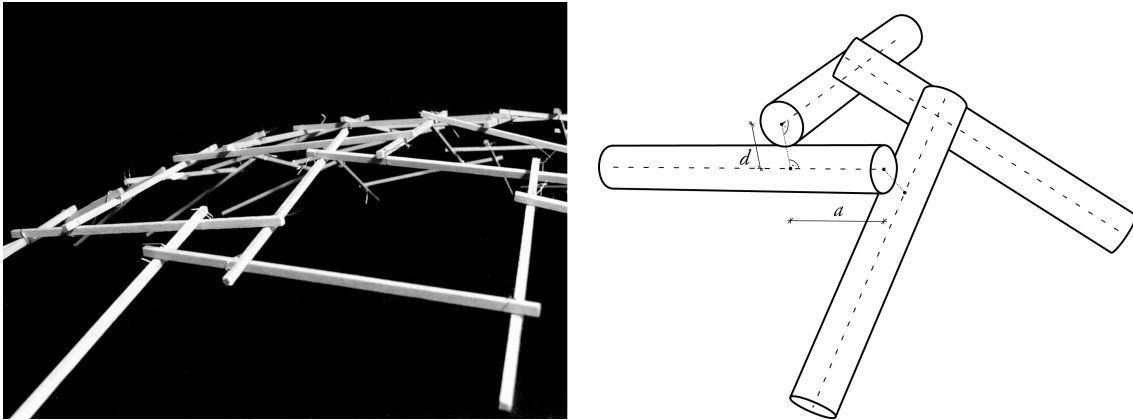


Abb. 32: a) links: Beispiel eines Hebelstabwerks mit konvex gekrümmter Geometrie [60]; b) rechts: 4-stabiges Grundsystem mit den geometrischen Parametern a und d .

Durch die zwei beschriebenen Parameter kann die Krümmung des Hebelstabwerks gesteuert werden. Im Falle eines Tragwerks mit der einfachsten Fügungsart der Stäbe, dem gegenseitigen Aufliegen, wird der Abstand d durch die Stabdicken festgelegt, woraus eine konvexe Krümmung des Gesamttragwerks resultiert (vgl. Abb. 32a).

Bei anderen Fügungsmethoden, wie beispielsweise seitlichem Verbolzen (vgl. Abb. 33a) oder Ausklinken der Stabelemente (vgl. Abb. 33b), sind die Abstände d unabhängig von den Stabdicken. Dies bedeutet, dass das geometrische Spektrum, innerhalb dessen die Krümmung eines Hebelstabwerks steuerbar ist, von der Art und Weise der konstruktiven Fügung der Stäbe im Tragwerk abhängt.

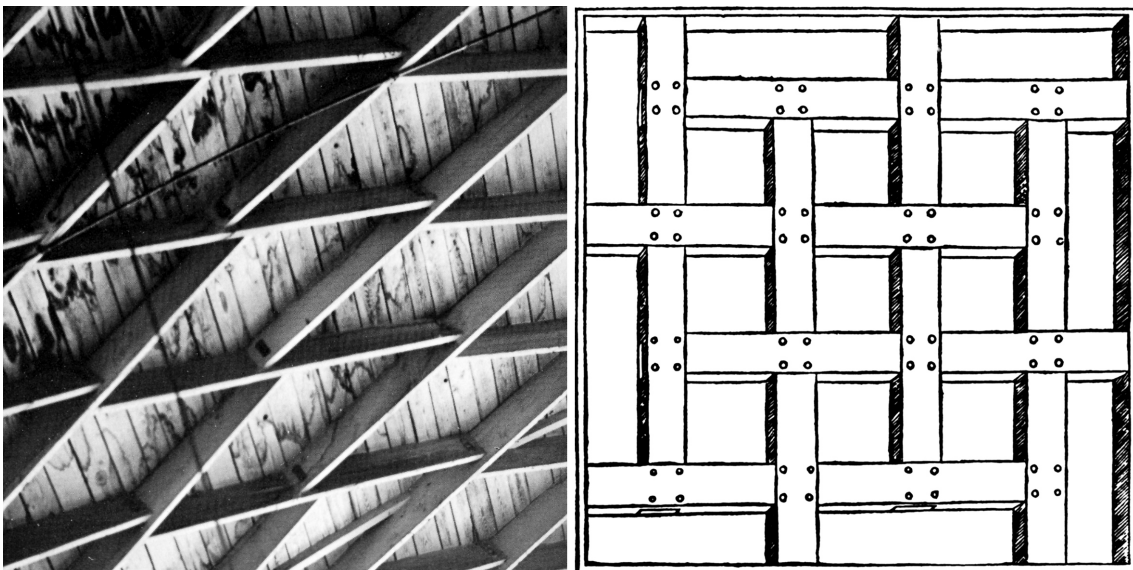


Abb. 33: a) links: Dach als Zollinger-Bauweise [49], einem Tragwerk mit seitlich verbolzten Stäben, das ebenfalls auf dem Hebelstabsystem basiert; b) rechts: Vorschlag Sebastiano Serlios für ein ebenes Deckentragwerk nach dem Hebelstabsystem mit ausgeklinkten Stäben [69].

Die bisher beschriebenen Hebelstabssysteme bilden gekrümmte oder ebene Flächentragwerke aus. Ein Spezialfall sind die linearen Systeme, die ebenfalls als ebene resp. gerade (vgl. Abb. 43c) oder gekrümmte (vgl. Abb. 34 und Abb. 35) Tragwerke ausgebildet werden können. Bei diesen werden jeweils nur zwei Stabelemente reziprok miteinander verbunden.

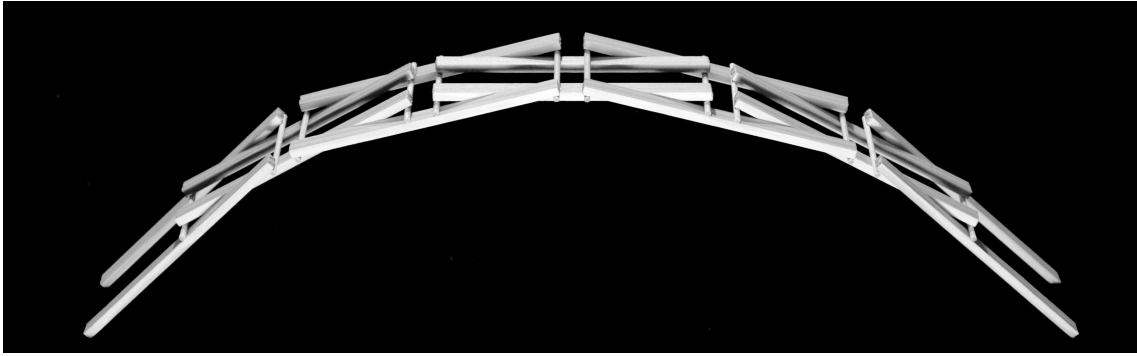


Abb. 34: Beispiel eines linearen, gekrümmten Hebelstabwerks.

Das lineare Hebelstabsystem wird insbesondere deshalb eingeführt, da anhand dessen die Abhängigkeiten verschiedener Parameter anschaulich und einfach beschrieben werden können, während diese bei flächigen Systemen von höherer Komplexität geprägt sind. Auf diese Art wird im Folgenden der Zusammenhang der Parameter a und d mit der Systemkrümmung dargestellt. Diese Krümmung wird hierbei durch einen Kreisbogen beschrieben, welcher die Achsen dreier nebeneinander liegender Stäbe des linearen Systems tangiert (vgl. Abb. 35). Sein Radius ist wie folgt definiert:

$$R = (l - a_0 - a_1) \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{4}{c_0^2} - 1\right) \cdot \left(\frac{4}{c_1^2} - 1\right)}}{\sqrt{\frac{4}{c_0^2} - 1} + \sqrt{\frac{4}{c_1^2} - 1}}, \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{d_k}{a_k}. \quad (1)$$

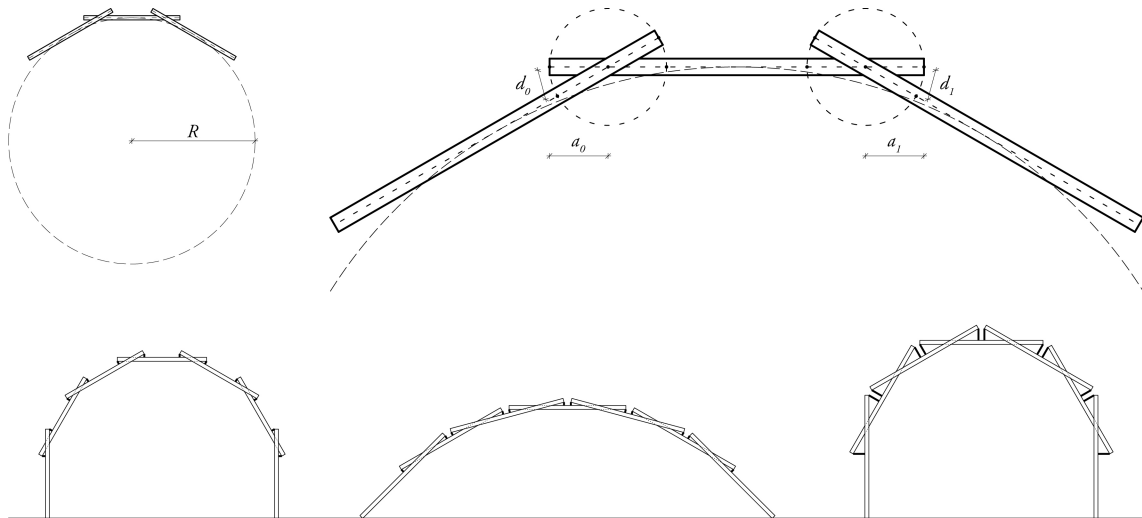


Abb. 35: Krümmungsverhalten eines linearen Hebelstabwerks. a) oben: Veranschaulichung der geometrischen Parameter a , d und R ; b) unten: Darstellung des Einflusses von a und d auf den Radius R .

In Gleichung (1) lassen sich für c folgende Zustände unterscheiden:

$d \neq 0 \wedge a \neq 0$: c resp. R beschreiben die Krümmung des Systems

$d = 0 \wedge a \neq 0$: Krümmung $c = 0$, ebenes System, Radius R ist nicht definiert

$d = 0 \wedge a = 0$: Krümmung kann nicht aus den Parametern a und d bestimmt werden. Zwischen den zwei Stäben besteht eine singuläre Verbindung.

Wenn im gesamten linearen Hebelstabsystem die Parameter a und d sowie die Stablängen gleich sind, wie beispielsweise in jenen aus Abbildung 35b, ist der Radius an jeder Stelle des Systems:

$$R = \left(\frac{l}{2} - a\right) \cdot \sqrt{\frac{4}{c^2} - 1}.$$

2.2 Tragverhalten und Konstruktion

Bei den Tragwerken der hier verglichenen Systeme, linear oder flächig ausgebildet, befinden sich alle Stäbe bezüglich des Lastabtrags hierarchisch auf einer Ebene, wodurch keine Primär- und/oder Sekundärtragelemente existieren. Das Tragverhalten und die Kinematik des Systems werden neben der Form (vgl. Abschnitt 1.4.2) massgeblich durch die konstruktive Ausformulierung der Knoten beeinflusst. Des weiteren bewirkt die unterschiedliche Fügungsart der Stäbe beim Hebelstabsystem im Vergleich zum Einfachen Gitter (vgl. Abschnitt 2.1) ein andersartiges Tragverhalten.

Zur diesbezüglichen Analyse der Systeme erfolgt die Bestimmung der inneren Kräfte resp. der Kräfte und Momente an den Interaktionspunkten. Dazu werden die Bedingungen für das Kräfte- und das Momentengleichgewicht in jedem Subsystem nach den allgemein gültigen Regeln der Mechanik, in vektorieller Notation für den Euklidischen Anschauungsraum \mathbb{R}^3 , formuliert.

Das Kräftegleichgewicht verlangt, dass die Resultierende aller Kräfte im System null ist:

$$\sum \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Das Momentengleichgewicht verlangt, dass die Resultierende aller Momente im System null ist (einwirkende Momente und Momente der einwirkenden Kräfte bezüglich eines beliebigen Punktes B):

$$\sum \mathbf{m}_B = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Diese Bedingungen ergeben für jedes Subsystem sechs Gleichungen, womit aus den bekannten Kraft- und Momentengrössen sechs unbekannte Koeffizienten ermittelt werden können. Wenn mehr Unbekannte existieren, ist das Subsystem statisch unbestimmt, und die Freiheitsgrade können nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie (vgl. Abschnitt 1.4.1) durch geeignete Massnahmen reduziert werden. In den Interaktionspunkten werden Kräfte und Momente übertragen, die hier als Interaktionsgrössen resp. als Interaktionskräfte und -momente bezeichnet werden. Damit ist es möglich, durch Gleichgewichtsbetrachtungen, sukzessive fortschreitend über alle Stäbe und Knoten die Kräfte und Momente im Gesamtsystem zu bestimmen.

Generell wird für den Rahmen dieser Arbeit die Vorgabe getroffen, dass äussere Einwirkungen nur in den Subsystemen der Knoten auftreten, eine Annahme wie sie beispielsweise auch bei der statischen Analyse von Fachwerken üblich ist. Eine Belastungssituation, bei der an anderen Stellen Einwirkende auftreten, muss nach den Regeln der Mechanik in ein äquivalentes Kräftesystem umgeformt werden, bei welchem die Vorgabe erfüllt ist.

2.2.1 Einfaches Gitter

Je nachdem, ob die Knoten eines Einfachen Gitters gelenkig (vgl. Abb. 36a) oder biegesteif (vgl. Abb. 36b) ausgebildet sind, existiert ein massgeblicher Unterschied im Tragverhalten. Die Tragwerke von Einfachen Gittern mit gelenkigen Knoten werden, wie bereits erwähnt, als Gitterschalen bezeichnet, diejenigen mit biegesteif ausgebildeten als Roste.

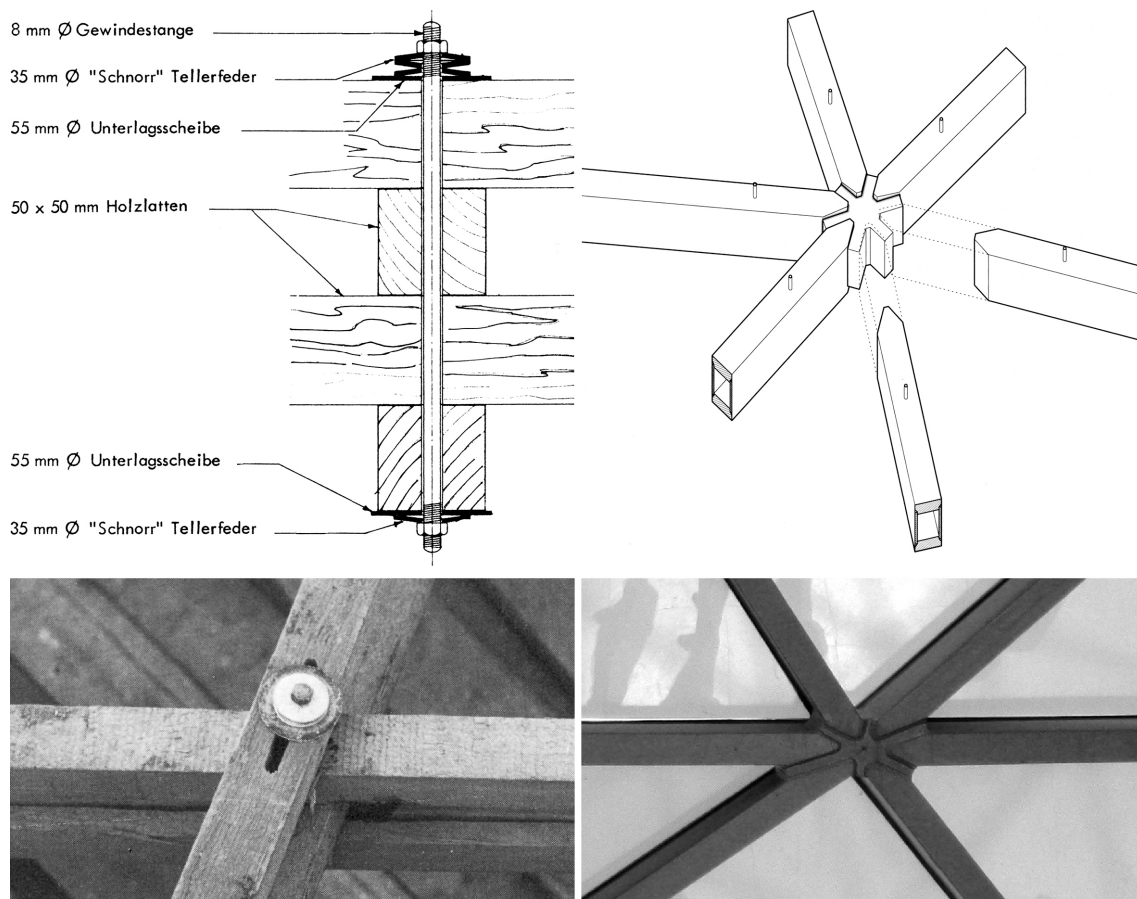


Abb. 36: a) links: Gelenkig ausgebildeter Knoten der Gitterschale des Daches der Multihalle in Mannheim (vgl. Abb. 7) [49]; b) rechts: Geschweisster, und damit biegesteif ausgebildeter Knoten des Rostes des Daches über dem Innenhof des British Museums in London [19].

Aus den unterschiedlichen Eigenschaften der Knoten resultieren für Gitterschalen und Roste massgebliche Unterschiede in Bezug auf die Gleichgewichtsbetrachtung der Subsysteme und demnach auch für das Tragverhalten des Gesamtsystems.

Gitterschale

Subsystem Knoten:

- Die gelenkige Ausbildung führt zum Wegfall der Momentengleichgewichtsbedingungen (3), und es resultiert ein zentrales Kräftesystem [17].
- Dieses umfasst Interaktionskräfte und eventuell weitere Kräfte durch äussere Einwirkungen.
- Die Anzahl der Interaktionskräfte ist von den anschliessenden Stäben abhängig.
- Je nach Anzahl der unbekanntem Interaktionskräfte können Freiheitsgrade bezüglich der Gleichgewichtsbedingungen existieren.

Subsystem Stab:

- Das Kräftesystem umfasst an beiden Stabenden jeweils eine Interaktionskraft.
- Aufgrund der Gleichung (2) sind die beiden Interaktionskräfte betragsmässig gleich gross und entgegengesetzt in ihrer Wirkungsrichtung. Da keine Interaktionsmomente auftreten, bedingt Gleichung (3), dass beide Resultierenden auf der Stabachse wirken.
- Ist die Interaktionskraft an einem Stabende bekannt, so kann jene am anderen Ende eindeutig bestimmt werden.
- Da die Kräfte des Subsystems auf der Achse des Stabs verlaufen, resultiert eine Beanspruchung als Normalspannungszustand.

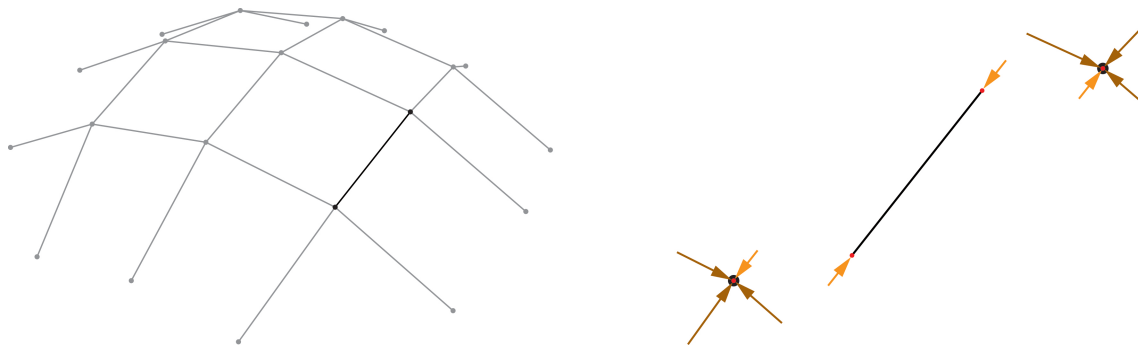


Abb. 37: Einfaches Gitter mit Kräften in den Subsystemen Knoten und Stab, wenn das System als Gitterschale ausgebildet ist. a) links: Gesamtsystem; b) rechts: Subsysteme des Stabs und der zwei anschliessenden Knoten, jeweils mit Interaktionskräften.

Bei Gitterschalen sind die Wirkungslinien der Interaktionskräfte an den Knoten durch die Achsen der angeschlossenen Stäbe vorgegeben, wodurch eine Abhängigkeit zwischen Kräften und Geometrie existiert. Dies führt dazu, dass in den Subsystemen Knoten nicht für alle möglichen Interaktionskräfte im Zusammenhang mit eventuellen äusseren Einwirkungen ein Gleichgewichtszustand möglich ist. Dieser Eigenschaft zufolge ist in Tragwerken von Gitterschalen nur für eine begrenzte Anzahl von Lastfällen Gleichgewicht möglich, für andere bildet sie ein kinematisches System.

Eine Zerlegung der einwirkenden Kräfte in Komponenten tangential zur Fläche des Tragsystems sowie senkrecht dazu lässt unterschiedliche Einflüsse dieser beiden auf die Kinematik des Systems erkennen. Ob für die senkrechten Komponenten ein Gleichgewicht möglich ist, hängt aus den bereits in Abschnitt 1.4.2 dargelegten Gründen von der Form ab, welche die Oberfläche des Gitters beschreibt. Bezüglich der tangentialen Komponenten hängt ein mögliches Gleichgewicht von der Kantenanzahl der Polygone ab, aus welchen die Oberfläche besteht. Dabei sind nur Dreiecke bezüglich aller Belastungen in ihrer Ebene unverschieblich, während dies bei Polygonen mit mehr Kanten nur für eine begrenzte Anzahl von Lastfällen gilt, weshalb Gitterschalentragwerke deren Fläche entsprechend viele Dreiecke enthält, eine geringere Kinematik aufweisen. Dies zeigt das in Abbildung 38a dargestellte Diagramm durch den Zusammenhang von Last und Verformung bei Gitterschalen, einerseits wenn die Stäbe ihrer Oberfläche Vierecke umschreiben, und andererseits für den Fall, dass die Vierecke durch Auskrenzungen stabilisiert werden und sich demnach die Oberfläche aus Dreiecken zusammensetzt.

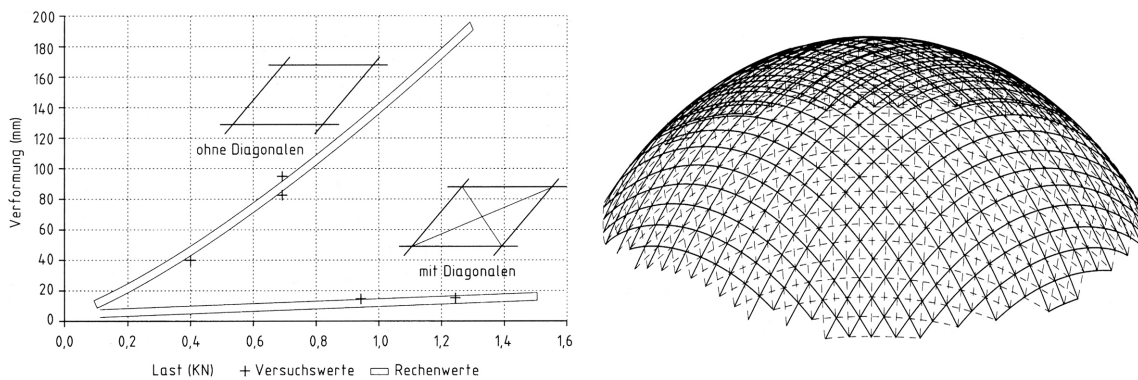


Abb. 38: Vergleich des kinematischen Verhaltens zweier Gitterschalen mit gleicher Form. Einerseits besteht die Oberfläche aus Vierecken, andererseits aus Dreiecken. a) links: Verformung in Abhängigkeit der Belastung [30]; b) rechts: Oberfläche der Gitterschale, bestehend aus Vierecken (nur Stäbe) sowie aus Dreiecken (Stäbe mit Auskrenzungen) [30].

Die Kinematik bezüglich der Tangentialebene einer Gitterschale kann für den Bau Vorteile bedeuten. Beispielsweise wurde bei der Multihalle in Mannheim (vgl. Abb. 7) das Tragwerk auf dem Baugrund als ebenes Netz mit quadratischen Maschen hergestellt. Anschliessend wurde es, ermöglicht durch die Kinematik des Gitters, in seine endgültige Form gedrückt. Nach dem Fixieren der Auflager und Auskreuzung einiger Vierecksmaschen ermöglicht die Gitterschale für unterschiedliche Belastungssituationen einen Gleichgewichtszustand.

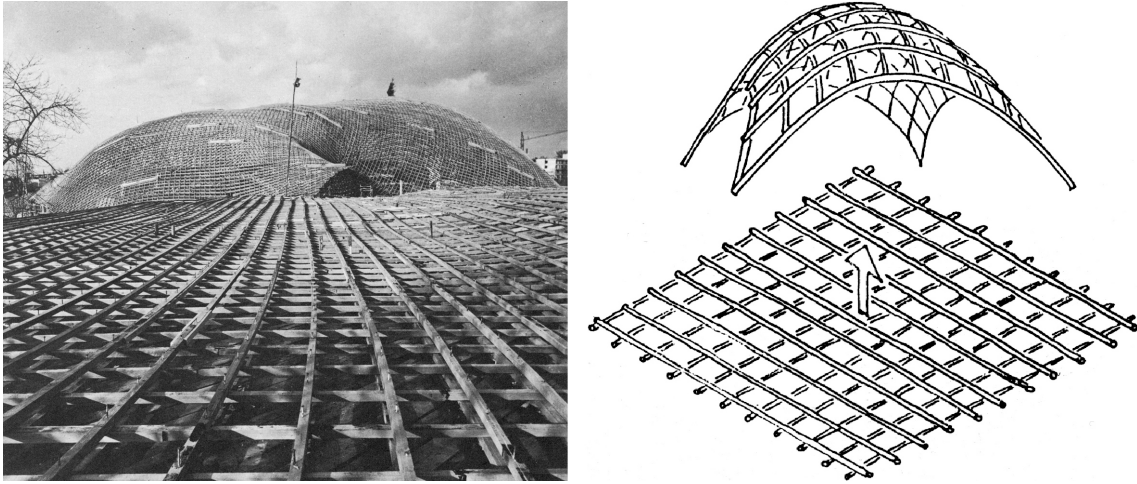


Abb. 39: a) links: Im Vordergrund eben liegendes Netz mit quadratischen Maschen, im Hintergrund aufgerichtete Gitterschale [49]; b) rechts: Prinzip der Verformung eines Netzes mit quadratischen Maschen durch Veränderung der Maschenwinkel [47].

Rost

Subsystem Knoten:

- Da die Ausbildung biegesteif ist, gelten alle sechs Gleichgewichtsbedingungen (2) und (3), woraus ein allgemeines Kräftesystem [17] resultiert.
- Dieses umfasst Interaktionskräfte und -momente sowie eventuell weitere äussere Einwirkungen.
- Die Anzahl der Interaktionsgrössen ist von den anschliessenden Stäben abhängig.
- Je nach Anzahl der unbekannt Interaktionsgrössen können Freiheitsgrade existieren.

Subsystem Stab:

- Das Kräftesystem umfasst an beiden Stabenden jeweils eine Interaktionskraft und ein -moment.
- Aufgrund von Gleichung (2) sind auch hier beide Interaktionskräfte betragsmässig gleich gross und entgegengesetzt in der Wirkungsrichtung. Jedoch sind die beiden Wirkungslinien lediglich parallel zueinander und müssen nicht identisch mit der Stabachse sein, da ein durch dieses Kräftepaar erzeugtes freies Moment durch die Interaktionsmomente an den Stabenden ins Gleichgewicht gebracht werden kann.
- Sind die Interaktionsgrössen an einem Stabende bekannt, können jene am anderen Ende eindeutig bestimmt werden.
- Die Kräfte und Momente am Subsystem bewirken im Allgemeinen eine Biegebeanspruchung des Stabs. Des Weiteren kann Torsionsbeanspruchung auftreten.

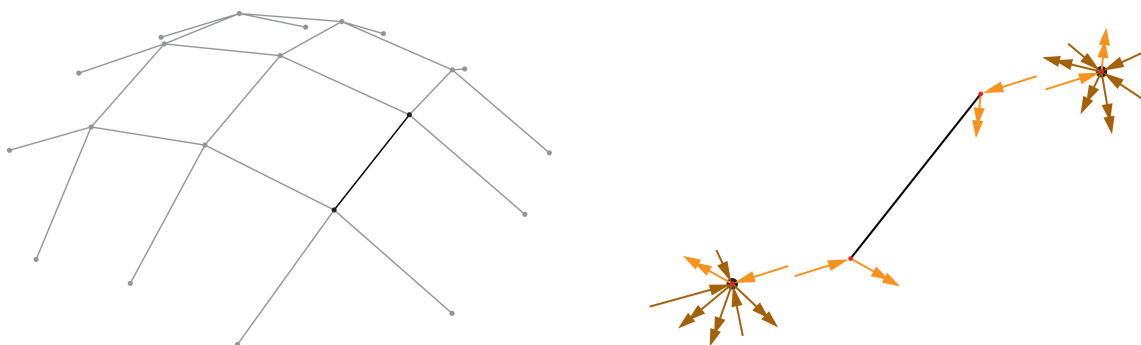


Abb. 40: Einfaches Gitter mit Kräften in den Subsystemen Knoten und Stab, wenn das System als Rost ausgebildet ist. a) links: Gesamtsystem; b) rechts: Subsysteme des Stabs und der zwei anschliessenden Knoten, jeweils mit Interaktionskräften und -momenten.

Da bei Gitterrosten die Wirkungslinien der Interaktionskräfte an den Enden der Stäbe nicht auf deren Achsen liegen müssen, sind hier Kraft und Form unabhängig, unter der Bedingung, dass die inneren Kräfte und Momente von den entsprechenden Bauteilen des Tragwerks aufgenommen werden können.

Einerseits ist die Momententragungsfähigkeit der Knoten und Stäbe des Gitterrostes nicht unbegrenzt, und andererseits sind die Knoten der Gitterschale in konstruktiver Hinsicht, wie beispielsweise die in Abbildung 36a gezeigten, selten ideal gelenkig ausgebildet. Dies hat zur Folge, dass das aus dem Einfachen Gitter entstandene Tragwerk innerhalb eines Spektrums anzusiedeln ist, das durch die Extreme "Gitterschale" und "Rost" definiert wird.

2.2.2 Hebelstabsystem

Auch das Hebelstabsystem bildet ein gitterartiges Flächentragwerk aus. Eine gewisse Faszination an diesem bewirkt das augenscheinlich gegenseitige Tragen der Stäbe, wobei jeder Stab am Ende auf zwei anderen aufliegt, während er selbst ein oder zwei weitere trägt. Diese hierarchische Abfolge des Tragens und Belastens schliesst sich durch die reziproken Verbindungen zu einem infiniten Zyklus der Lastabfolge. Die Randstäbe, welche mit einem Ende auf den Auflagern des Gesamttragwerks lagern, unterbrechen dort die zyklischen Folgen von Tragen und Lasten des Hebelstabsystems. Die Bezeichnungen "Tragen" und "Lasten" implizieren nicht zwingend, dass die Stäbe aufeinander liegen, wie beispielsweise im Falle des in Abbildung 32a dargestellten Hebelstabwerks, sondern es bedeutet, dass die Bauteile kraftschlüssig miteinander verbunden sind.

Aufgrund der speziellen geometrischen Fügung der Stäbe zueinander ist das System biegesteif, auch wenn die Knoten statisch gelenkig ausgebildet werden. Dadurch sind konstruktiv einfache Verbindungstechniken möglich, wie beispielsweise ganz ohne mechanische Verbindungsmittel nur über Druckkontakt und Reibung (vgl. Abb. 31), durch einfaches Zusammenbinden der Stäbe (vgl. Abb. 32a) oder durch Ausklinken dieser an den Kontaktpunkten (vgl. Abb. 41a). Für höhere Ansprüche sind tragfähigere Verbindungen wie beispielsweise Verbolzen (vgl. Abb. 41b) erforderlich. Durch den Einsatz von biegesteifen Knotenkonstruktionen wird zusätzlich die Biegesteifigkeit des Tragwerks erhöht, was häufig jedoch auch zu einem höheren Konstruktionsaufwand führt.



Abb. 41: Beispiele für konstruktive Knotenausbildungen bei Hebelstabwerken. a) links: Ausklinkungen der Stabelemente an den Kontaktpunkten [72]; b) rechts: Aufeinander aufliegende Stäbe, ergänzend verschraubt durch Metallbolzen [72].

In gleicher Weise wie in Abschnitt 2.2.1 für das Einfache Gitter beschrieben, werden auch hier die Interaktionskräfte und -momente durch die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen (2) und (3) in den Subsystemen Stab und Knoten bestimmt. Daraus lassen sich folgende Eigenschaften für das Tragverhalten von Hebelstabsystemen ableiten.

Subsystem Knoten:

- Bei gelenkiger Ausbildung resultiert ein zentrales Kräftesystem, bei biegesteifer ein allgemeines.
- Da der Knoten nur mit zwei Stäben verbunden ist, existieren zwei Interaktionskräfte und bei biegesteifer Knotenausbildung zusätzlich zwei Interaktionsmomente. Eventuell sind weitere Kräfte durch äussere Einwirkungen möglich.
- Sind die Interaktionskräfte und -momente zu einem Stab hin bekannt, können jene zum zweiten eindeutig bestimmt werden.

Subsystem Stab:

- Das Kräftesystem umfasst Interaktionskräfte und gegebenenfalls -momente an allen drei oder vier Interaktionspunkten des Stabs.
- Es gelten die sechs Gleichgewichtsbedingungen (2) und (3). Im Vergleich zu Einfachen Gittern kann keine Aussage zu Abhängigkeiten der einzelnen Kräfte getroffen werden.
- Je nach Anzahl der unbekannteren Interaktionsgrössen können Freiheitsgrade existieren.
- Sowohl Belastungen durch Kräfte und Momente kombiniert, als auch nur Kräfte bewirken eine Biegebeanspruchung des Stabs. Des Weiteren kann Torsionsbeanspruchung auftreten.

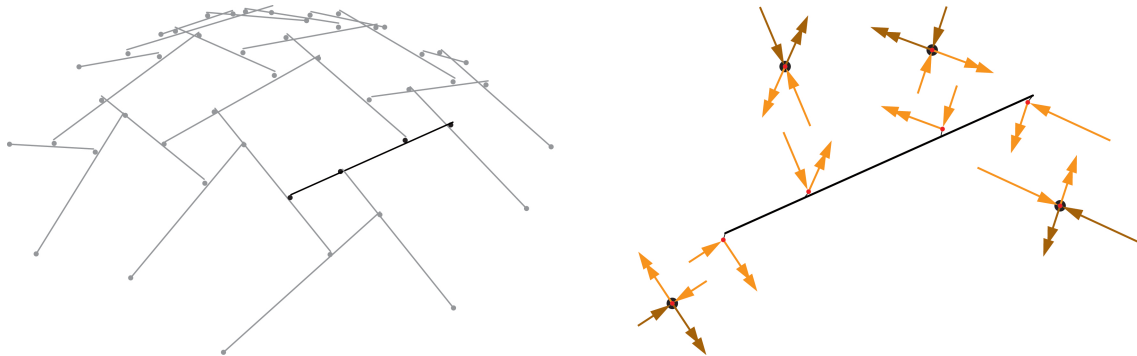


Abb. 42: Hebelstabsystem mit Kräften in den Subsystemen Knoten und Stab. a) links: Gesamtsystem; b) rechts: Subsysteme des Stabs und der vier anschliessenden Knoten, jeweils mit Interaktionskräften und -momenten.

Beim Hebelstabsystem ist aufgrund der Biegesteifigkeit die Existenz einer Gleichgewichtslösung der Kräfte und Momente für eine bestimmte Lastsituation nicht an die Form des Tragwerks gebunden. Diese Eigenschaft ist vergleichbar mit dem Rost, jedoch im Unterschied zu diesem entsteht beim Hebelstabsystem auch infolge tangentialer Kraftkomponenten an seiner Oberfläche Biegebeanspruchung der Stäbe. Bezüglich der Kinematik dieser Komponenten gelten, bei der Ausbildung gelenkiger Knoten, ähnliche Aussagen wie bei Gitterschalen: Dreiecke als Grund- oder Komplementärpolygone sind für jegliche Belastung unverschieblich, Vielecke mit höherer Kantenzahl werden für bestimmte Lastfälle kinematisch. Durch sukzessive Gleichgewichtsbetrachtungen in den Subsystemen des Hebelstabsystems lassen sich an allen Interaktionspunkten die Kräfte und Momente bestimmen. Aus diesen Interaktionsgrössen lassen sich die inneren Kräfte resp. die Schnittgrössen der Bauteile des Tragwerks bestimmen.

Im Folgenden wird der Zusammenhang der Interaktionskräfte eines Hebelstabsystems mit den Schnittgrössen Biegemoment und Querkraft gezeigt. Dies erfolgt am Beispiel eines ebenen linearen Hebelstabsystems (vgl. Abb. 43c), welches so ausgebildet ist, dass das Gesamtsystem als einfacher Balken wirkt. Für diese vergleichende Darstellung wurden die Wirkungslinien der Interaktionskräfte als senkrecht festgelegt, wodurch in den Gleichgewichtsbedingungen die Freiheitsgrade eliminiert sind. Abbildung 43a zeigt das System eines einfachen Balkens unter einer konstanten Linienlast q , Abbildung 43b das gleiche Tragsystem unter einer zu q äquivalenten Belastung durch acht Einzelkräfte Q als Teilresultierende der Linienlast. In Abbildung 43c wird das zum einfachen Balken vergleichbare lineare Hebelstabsystem unter einer zu q äquivalenten Belastung gezeigt. Hierbei wurde die Linienlast in 16 Teilresultierende umgeformt, sodass jedes Stabelement die gleiche Belastung erfährt. Dabei bilden die Interaktionskräfte innerhalb einer reziproken Verbindung Kräftepaare mit zugehörigen Hebelarmen. Aus diesen lassen sich die Schnittgrössen des Gesamtsystems bestimmen, welche in diesem Fall nur Biegemomente und Querkräfte umfassen. Der unten angestellte Vergleich der drei Systeme bezüglich dieser beiden Schnittgrössen zeigt eine Übereinstimmung unter Beachtung des Einflusses der Diskretisierung der einwirkenden Last.

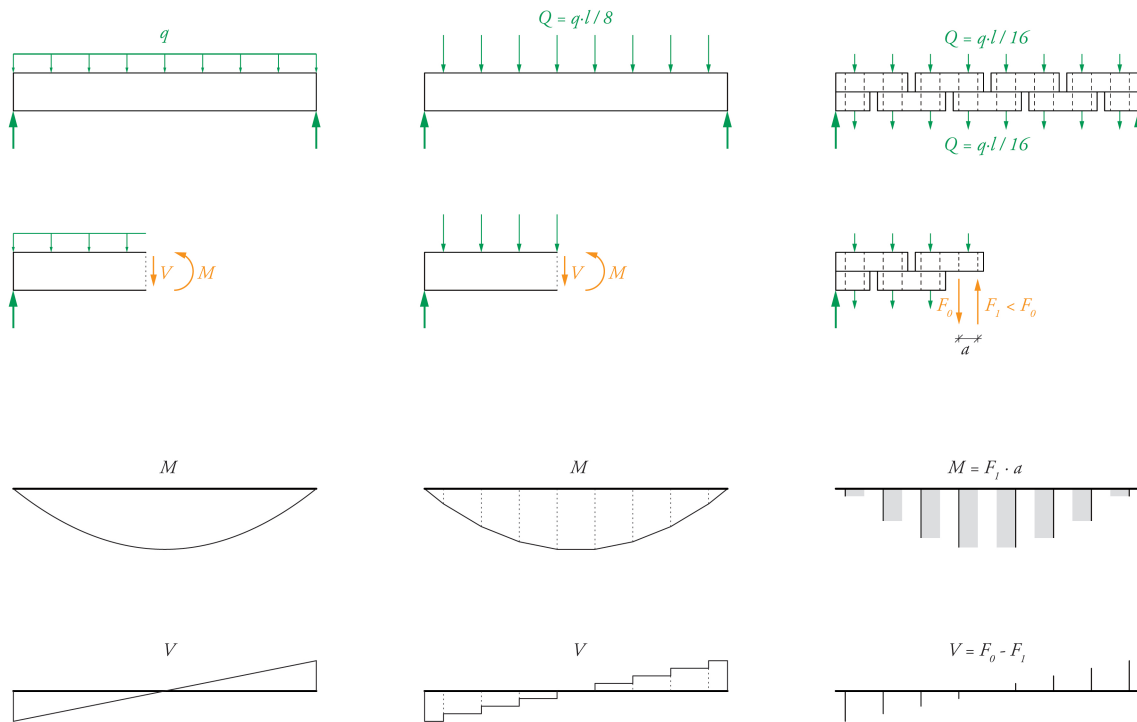


Abb. 43: Vergleich der Biegemomente und Querkräfte eines einfachen Balkens. a) links: Schnittgrössenermittlung infolge gleichmässig verteilter Last; b) mittig: Schnittgrössenermittlung infolge Teilresultierender der verteilten Last; c) rechts: Schnittgrössenermittlung infolge Teilresultierender der verteilten Last, aus den Interaktionskräften eines äquivalenten ebenen, linearen Hebelstabsystems.

Das anschliessende Beispiel veranschaulicht den für das Tragverhalten des Hebelstabsystems massgebenden Zusammenhang zwischen der Grösse eines Grundpolygons und den Interaktionskräften resp. den maximalen Biegemomenten in den Stäben infolge Kraftkomponenten in der Tangentialebene an das System und senkrecht dazu. Dazu wird das in Abbildung 44a gezeigte ebene, 3-stäbige Grundsystem betrachtet, bei welchem in jedem Zustand die Stablänge l und der Abstand a aller drei Stäbe gleich sind. Das System wird durch die vertikalen und horizontalen äusseren Einwirkenden Q_V und Q_H belastet. In Abbildung 44b ist das Subsystem eines Stabs bezüglich der vertikal einwirkenden Kräfte dargestellt, in Abbildung 44c bezüglich der horizontal Einwirkenden.

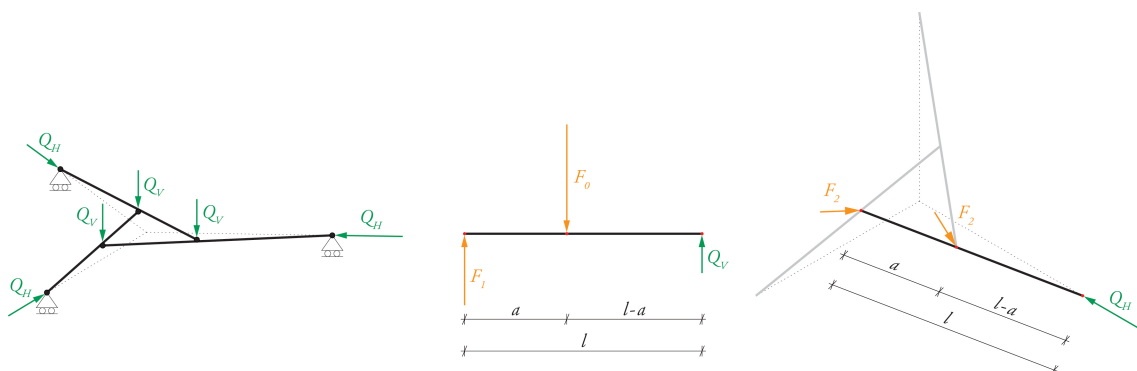


Abb. 44: a) links: 3-stäbiges Grundsystem mit den äusseren Einwirkenden, vertikal Q_V und horizontal Q_H ; b) mittig: Subsystem eines Stabs, vertikal betrachtet, mit den Interaktionskräften F_0 und F_1 ; c) rechts: Subsystem eines Stabs, horizontal betrachtet, mit den Interaktionskräften F_2 .

Durch die Variation des Parameters a wird die Kantenlänge des regelmässigen Grundpolygons verändert (vgl. Abb. 45c). Die Diagramme in Abbildung 45a und 45b zeigen den Einfluss der Vergrösserung des Grundpolygons auf die Interaktionskräfte und die maximalen Biegemomente in den Stäben. Dabei ist sowohl für den Betrag von F_0 als auch für jenen des Biegemoments $M_{V,max}$ senkrecht zur Tragwerksebene eine Abnahme festzustellen, während der Betrag von F_2 gleich bleibt und jener des Biegemoments $M_{H,max}$ in der Tragwerksebene zunimmt.

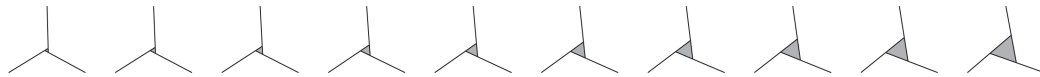
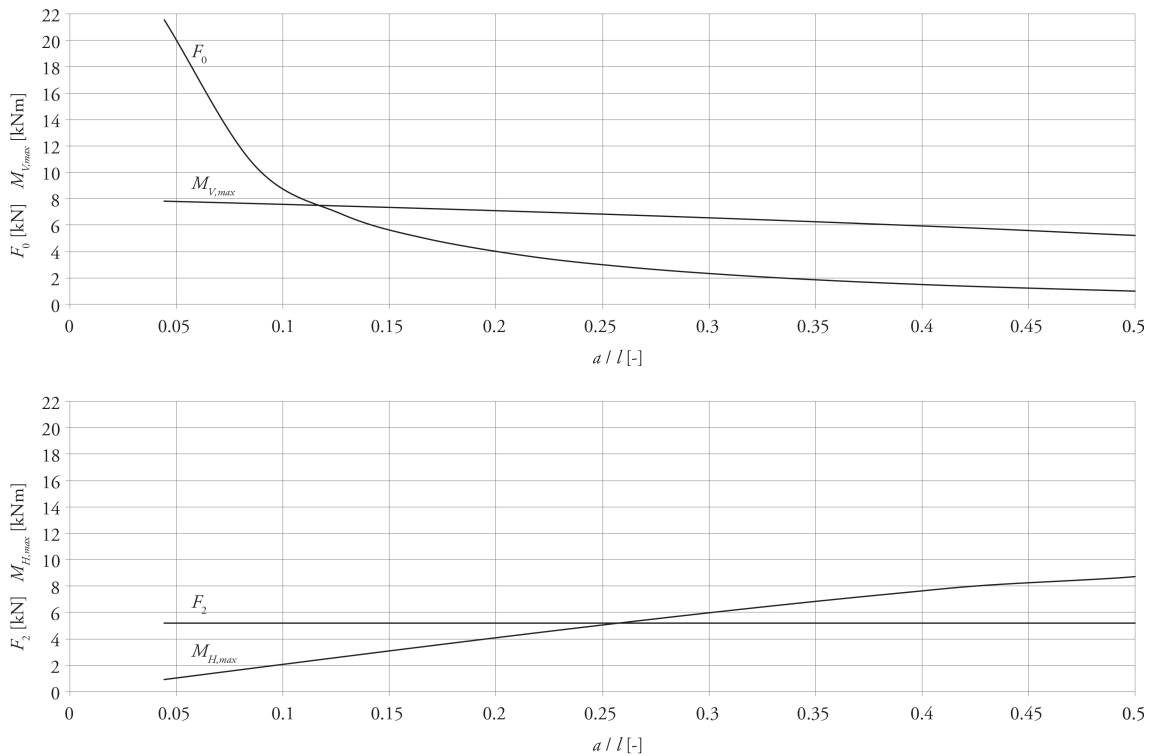


Abb. 45: Verhalten des Systems bei Vergrößerung der Kantenlänge des regelmässigen Grundpolygons. a) oben: Diagramm des Einflusses auf F_0 und $M_{V,max}$; b) mittig: Diagramm des Einflusses auf F_2 und $M_{H,max}$; c) unten: Veränderung der Systemkonfiguration.

2.3 Geschichte

2.3.1 Einfaches Gitter

Die stabförmig diskreten Tragwerke des Systems, das in dieser Arbeit als Einfaches Gitter bezeichnet wird, entstanden aus der Weiterentwicklung von kontinuierlichen Flächentragwerken, wie beispielsweise Kuppeln oder Gewölben, die baugeschichtlich schon sehr früh zur Überspannung von grösseren Distanzen entwickelt wurden. Derartige Tragwerke waren monolithisch aus Stein gemauert (z.B. Klostersgewölbe des Doms in Florenz, 1436) oder in einfachem, unbewehrtem Beton gegossen (z.B. Kuppel des Pantheons in Rom, 125 n. Chr.).

Das früheste dokumentierte Gebäude, bei welchem ein Kuppel- oder Gewölbeträgerwerk nicht massiv ausgeführt wurde, sondern in stabförmige Elemente aufgelöst wurde, ist die hölzerne Kuppel des Felsendoms in Jerusalem (vgl. Abb. 46a). Diese, aus dem Jahr 691 n. Chr. stammende Konstruktion, ist zweischalig ausgebildet und weist einen Innendurchmesser von 20.4 m auf [30]. Ein späteres Beispiel ist die im folgenden Abschnitt 2.3.2 gezeigte Bohlenkuppel von Philibert de l'Orme (vgl. Abb. 53b). Diese beiden oder vergleichbare Konstruktionen in Holz weisen jedoch nicht das Tragverhalten des Einfachen Gitters auf, da sie hierarchisch tragend aufgebaut sind, wie in den beiden erwähnten Beispielen aus primär tragenden radialen Bindern und dazwischen gespanntem Sekundärträgerwerk. Als im 19. Jahrhundert der Bautypus des Glashauses architektonisch grosse Bedeutung erlangte und durch die Entwicklung des Materials Stahl entsprechende bautechnische Voraussetzungen gegeben waren, entstand eine Vielzahl von gläsernen Kuppeln mit einem fein aufgelösten gitterartigen Eisenträgerwerk [35]. Die ersten dieser Art (vgl. Abb. 46b) wurden ebenfalls noch in einer hierarchischen Ordnung der Tragelemente ausgebildet.

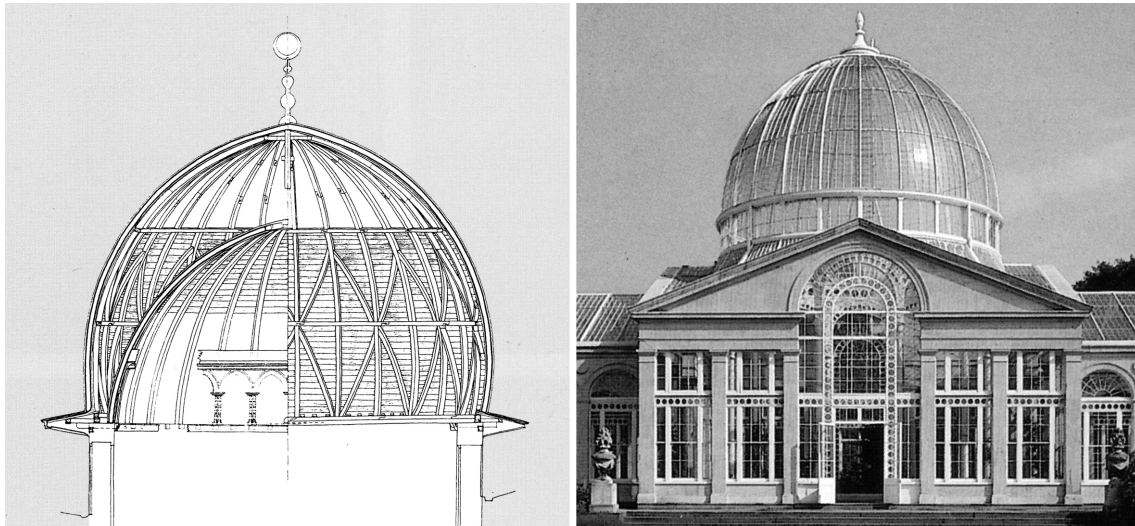


Abb. 46: a) links: Zedernholzkuppel des Felsendoms, Jerusalem, 691 n. Chr. [30]; b) rechts: Eisen-Glas-Kuppel des Palmenhauses im Syon Park, London, Charles Fowler, 1827 [30].

Eine der ersten kuppelartigen Tragwerke, bei denen die sphärische Fläche aus nicht-hierarchisch tragenden Stabelementen konstruiert wurde, ist die von Georg Moller (1784-1852) entworfene Metallkuppel des Doms in Mainz (vgl. Abb. 47a). Diese wurde 1828 errichtet und bereits 1870 wieder abgerissen. Das Gitter bestand hierbei aus Stäben, welche Vierecke umschrieben. Es waren jedoch weitere auskrenzende Elemente nötig, die das Tragen unterstützten, insbesondere infolge asymmetrischer Lasten [23]. Befreit von diesen Zusatzelementen sind die wenig später von Johann Wilhelm Schwedler (1823–1894) entwickelten Kuppeln (vgl. Abb. 47b), bei welchen die Gitterstruktur der Oberfläche aus Dreiecken besteht. Die erste realisierte Schwedler-Kuppel war das Tragwerk der Überdachung des Gasbehälters in der Holzmarktstrasse in Berlin, das 1863 gebaut und 1932 wieder rückgebaut wurde. Die in Abbildung 47b gezeigte Gasometerüberdachung ist die älteste noch existierende Kuppel nach dem Prinzip Schwedlers. Weil dieser mit dem von ihm entwickelten Kuppeltragwerk den Schritt vom radialen Bindersystem zum Schalentragsystem vollzieht, werden diese Tragwerke in [34] als Urtyp jener stabförmigen Flächentragwerke gesehen, deren Systeme hier als Einfache Gitter bezeichnet werden.

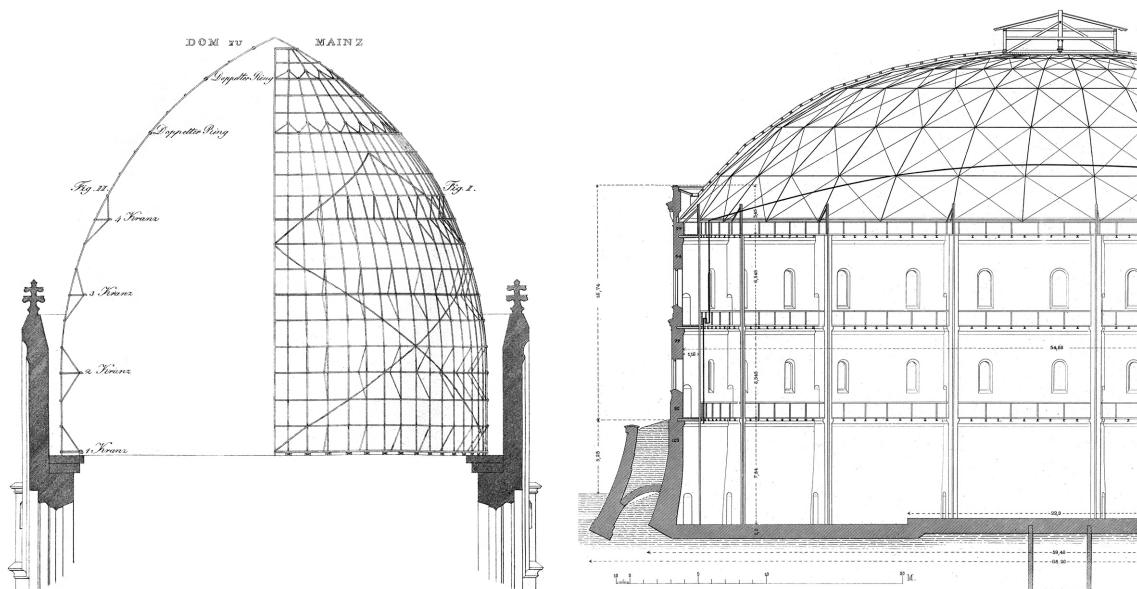


Abb. 47: a) links: Kuppel des Doms, Mainz, Georg Moller, 1828 [44]; b) rechts: Kuppel des Gasometers in der Fichtrasse, Berlin, Johann Wilhelm Schwedler, 1874 [67].

Häufig wird als Errungenschaft in der Geschichte des Kuppel- und Gewölbebaus, sowohl für kontinuierliche als auch für stabförmig diskret konstruierte Tragwerke, das von Franz Dischinger (1887-1953) und Walther Bauersfeld (1879–1959) entwickelte System Zeiss-Dywidag genannt. Dabei wird ein Stahlnetz mit

dreiecksförmigen Maschen als Armierung in der entsprechenden Kuppel- oder Gewölbeform aufgebaut und anschliessend einbetoniert. Mit diesem Verfahren entstanden Bauten mit grossen Spannweiten bei minimaler Schalendicke. Eines der bekanntesten ist das Dach des Planetariums Zeiss in Jena aus dem Jahr 1932. Für die Entwicklungsgeschichte von gitterartigen Kuppeln ist dies darum interessant, weil bereits das "Armierungstragwerk" so leistungsfähig war, dass es mehrere Personen tragen konnte (vgl. Abb. 48b). Baugeschichtlich betrachtet blieb die morphologische Ausprägung von Tragwerken dieser Art lange Zeit überwiegend bei rotatorischen oder geradlinig translatorischen Formen, nicht zuletzt weil kein Bedürfnis aus der Architektur vorhanden zu sein schien (vgl. Abschnitt 1.1). Als eine der Ausnahmen sind die Hallen der Hüttenwerke in Vyksa aus dem Jahr 1897 (vgl. Abb. 48a) von Vladimir G. Šuchov (1853-1939) zu nennen.

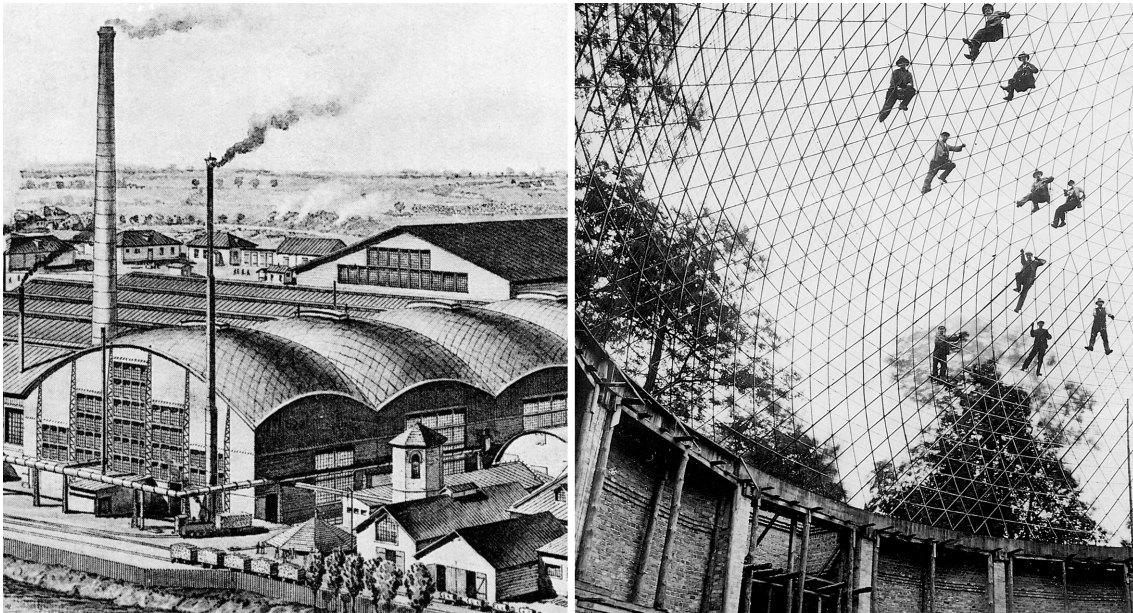


Abb. 48: a) links: Hüttenwerke, Vyksa, Vladimir Grigorevič Šuchov, 1897 (Lithographie ca. 1900) [24]; b) rechts: Armierung im Zeiss-Dywidag-System der Kuppel des Planetariums, Jena, Franz Dischinger und Walther Bauersfeld, 1925 [30].

Mitte des 20. Jahrhunderts entwickelte sich mit den Arbeiten von beispielsweise Frei Otto (*1925), Heinz Isler (1926-2009) oder Félix Candela (1910-1997) eine Formensprache, die diese Regularität verliess, indem nicht die traditionellen architektonischen Formen nachgebildet wurden, sondern andere formale Begründungen gesucht wurden. Hier sei dazu die Vorgehensweise Frei Ottos genannt, der die Tragwerke der Natur erforschte und diese auf das Bauen zu übertragen suchte. Otto war auch massgeblich an der Weiterentwicklung von kontinuierlichen Schalenträgwerken, hin zu stabförmig diskreten Konstruktionen beteiligt. Eines der aus bautechnischer Sicht beeindruckendsten dieser Art ist die Multihalle in Mannheim aus dem Jahr 1975 (vgl. Abb. 7).

2.3.2 Hebelstabsystem

Es existieren seit vielen Jahrhunderten Baukonstruktionen, wie beispielsweise die des nordamerikanischen indianischen Tipis, welche in gewisser Weise die Eigenschaften des Hebelstabsystems aufweisen. Jedoch den historischen Ursprung dieses Tragsystems zu definieren gestaltet sich schwierig, da viele der Bauten nicht dokumentiert sind. Da die meisten aus Holz gebaut waren, sind diese über die Jahre hinweg dem natürlichen Zerfallsprozess oder Bränden zum Opfer gefallen. Aus diesen Gründen beschränken sich historische Nachweise auf wenige textliche Dokumentationen und noch weniger bildliche Illustrationen. [60]

In der Literatur (z.B. [11], [65]) werden häufig die massgebenden Ursprünge des Hebelstabsystems dem ostasiatischen Raum zugeschrieben. Deshalb werden im Folgenden die wichtigsten Beispiele der Entwicklung dort und im Vergleich dazu für den europäischen Raum aufgezeigt.

Ostasiatischer Raum

Oft als älteste historische Dokumentation eines Hebelstabwerks wird die grosse Bogenbrücke im Zentrum des Gemäldes "Life along the Bian River at the Pure Brightness Festival" (vgl. Abb. 49) von Zhang Zeduan (11. - 12. Jh.) erwähnt. Dieses zeigt die lebendigen Szenen während des Festes entlang des Bian Kanals in Bianjing, der Hauptstadt der Nördlichen Song-Dynastie. Die abgebildete Brücke wurde 1032 in Qingzhou in der Provinz Shandong entwickelt und 1040 gebaut [76]. Ihr Konstruktionstyp, auch als Regenbogenbrücke bezeichnet, aus sich überlappenden Baumstämmen stellt gemäss der Definition in Abschnitt 2.1.2 ein Tragwerk nach dem linearen Hebelstabsystem dar. Diese ursprüngliche Brücke existiert heute nicht mehr, jedoch wurde an gleicher Stelle im Jahr 1999 ein originalgetreuer Nachbau erstellt [56].

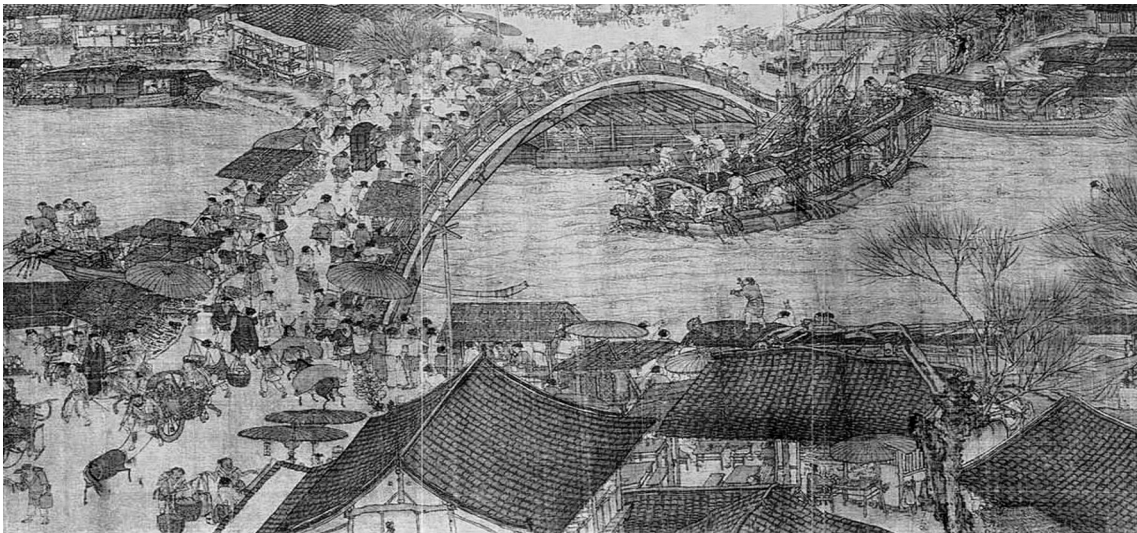


Abb. 49: Zhang Zeduan: *Life along the Bian River at the Pure Brightness Festival* [76].

Während sich lineare Konstruktionen wie die Regenbogenbrücke eher auf China zurückführen lassen, haben flächige Hebelstabwerke ihren Ursprung eher in Japan. Historische Nachforschungen lassen annehmen, dass der buddhistische Mönch Chogen (1121-1206) für die Dachtragwerke von Tempelbauten die Technik entwickelte, mit welcher sich Holzbalken in einem kreisförmig geschlossenen System selbst tragen [11]. Diese Dächer, vergleichbar zu Abbildung 50a, entsprechen einem Grundsystem gemäss der Definition in Abschnitt 2.1.2 und werden in der Literatur auch als Mandala-Dach bezeichnet.

Auch bei den Bauten mancher zeitgenössischer Architekten fanden Hebelstabwerke ihre Anwendung, beispielsweise Shigeru Ban [43], und vor allem Kazuhiro Ishii [60] [27] sind dabei zu erwähnen. Letzterer zeigt in den Dachkonstruktionen seiner Gebäude zahlreiche Varianten des Hebelstabsystems. Sein diesbezüglich populärstes Werk sind die Gebäude für das Puppentheater in Seiwa (vgl. Abb. 50). Hier wird die Ausstellungshalle (vgl. Abb. 50a) von einem Mandala-Dach überdeckt und der Theatersaal (vgl. Abb. 50b) von einem ebenen Hebelstabwerk bestehend aus Grund- und Komplementärpolygonen als Vierecke identischer Grösse.

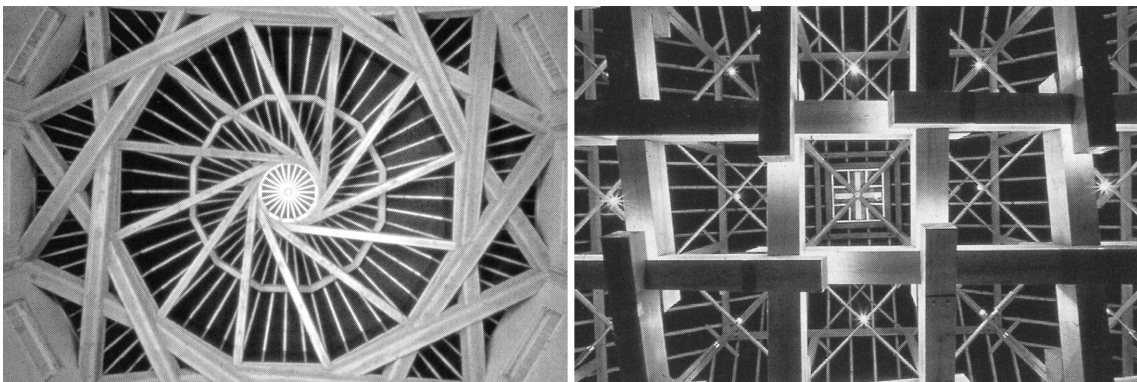


Abb. 50: *Puppentheater, Seiwa, Kazuhiro Ishii, 1992* [27]. a) links: *Dach der Ausstellungshalle*; b) rechts: *Dach des Theatersaals*.

Bezüglich derartiger Tragwerke scheinen für statische Berechnungen keine Standardmethoden zu existieren. Dies zeigt die Tatsache, dass die Genehmigungsbehörden mit den beiden Dachkonstruktionsweisen von Ishiis Puppentheater erhebliche Probleme hatten und ihre Zustimmung erst gaben, nachdem sie ein 1:30 Modell geprüft hatten [27].

Europäischer Raum

In Europa tauchten in den aus der ersten Hälfte des 13. Jahrhunderts stammenden Skizzenbüchern [14] des gotischen Baumeisters Villard de Honnecourt (13. Jh.) erstmals Konstruktionen auf, die auf dem Hebelstabsystem basieren. Darin enthaltene Zeichnungen zeigen Lösungen für Deckentragwerke aus Holzbalken, die kürzer sind als die Spannweite der Decke [65]. In Abbildung 52a ist ein solcher Vorschlag dargestellt, zu welchem Honnecourt folgende Aufgabenstellung formuliert hat: "Wie kann man, mit Holz das zu kurz ist, einen Turm oder ein Haus bauen?" [8]

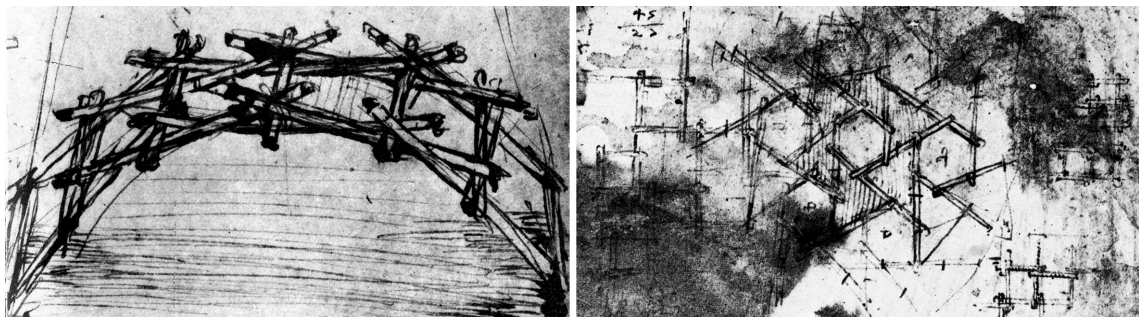


Abb. 51: a) links: Leonardo da Vincis Vorschlag für ein Brückentragwerk aus dem 15. Jh. [53]; b) rechts: Skizzen aus dem 15. Jh. Leonardo da Vincis von flächigen Hebelstabwerken [53].

Nach der Lösung ähnlicher Aufgabenstellungen suchte später in der Renaissance auch der Universalgelehrte Leonardo da Vinci (1452-1519). Dies zeigen zahlreiche seiner Skizzen, in welchen Vorschläge für Brückenkonstruktionen (vgl. Abb. 51a) oder räumliche Flächentragwerke (vgl. Abb. 51b) dargestellt sind, die aus kurzen Stäben bestehen. Seine Brückenkonstruktion ist dem Prinzip nach identisch mit der in Abbildung 49 Dargestellten aus dem 11. Jahrhundert. Aus diesem Grund hat sich dafür neben "Regenbogenbrücke" auch der Begriff "Leonardo-Brücke" etabliert. Ebenfalls mit der Frage, wie eine Decke mit Balken überspannt werden könnte, welche wesentlich kürzer als die Gesamtspannweite sind, beschäftigte sich der Renaissance-Architekt Sebastiano Serlio (1475-1554). Eine seiner Ideen dazu ist die in Abbildung 33b dargestellte Konstruktion aus "Book 1: On Geometrie" (1545), dem ersten Teil seines Traktats "Seven Books on Architecture" [70].

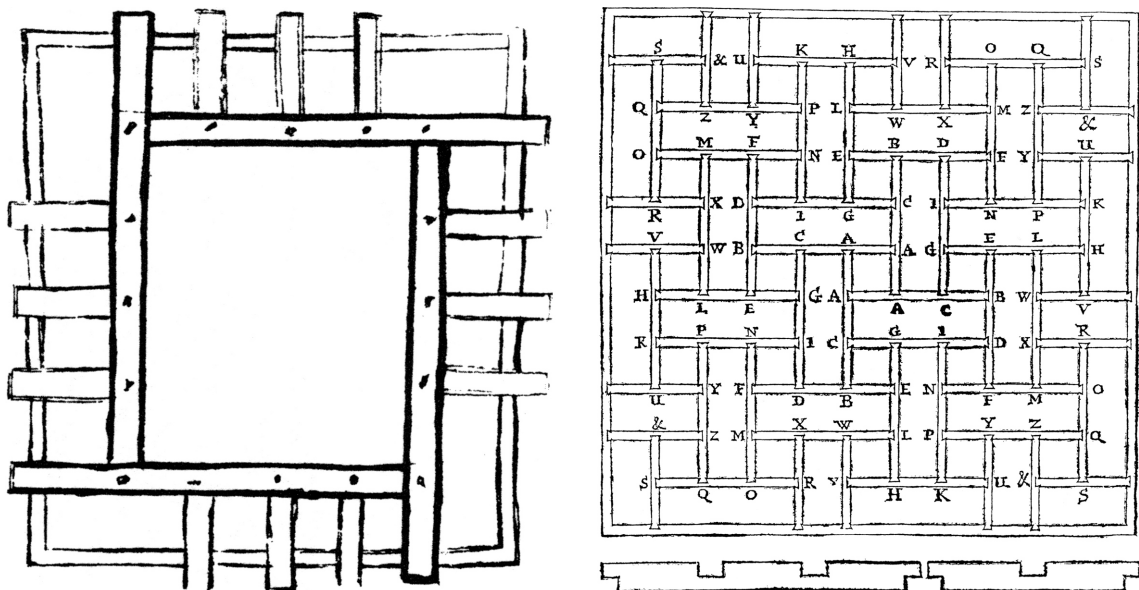


Abb. 52: a) links: Von Villard de Honnecourt im 13. Jh. entwickeltes Deckensystem [14]; b) rechts: Hebelstabsystem von John Wallis aus dem 17. Jh. [81].

Ab 1652 entwickelte John Wallis (1616-1703) ein ebenes Hebelstabwerk, bei welchem die Stabelemente mit Schwalbenschwanzverbindungen ineinander gesteckt wurden (vgl. Abb. 52d). Darüber hinaus begann er sich mit den inneren Kräften eines solchen Tragwerks zu befassen. Dazu formulierte er die Kräfte in den Knotenverbindungen als Unbekannte und löste sie in einem dementsprechend grossen Gleichungssystem, welches er aus den Bedingungen für Gleichgewicht formulierte. Seine Entwicklungen dazu wurden 1695 in seinem Werk "Opera Mathematica" [81] veröffentlicht.

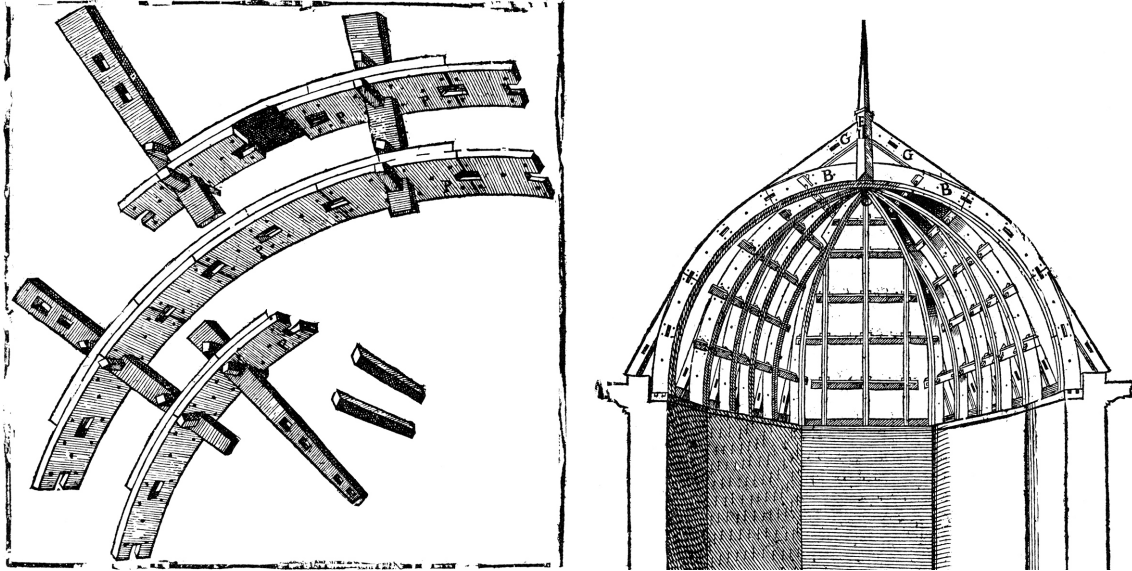


Abb. 53: Konstruktionsprinzip der Bohlenbögen nach Philibert de l'Orme, 1561 [15]. a) links: Kuppelförmiges Dachtragwerk mit Bohlenbögen; b) rechts: Fügungsmethode der Bohlenstücke.

Im Jahr 1561 veröffentlichte Philibert de l'Orme (1514-1577) eine Dachkonstruktion, welche auf Bögen basiert, die aus einem Verband von gekrümmten Bohlenstücken bestehen (vgl. Abb. 53a) [66]. Durch die spezielle überlappende Fügungstechnik entstehen bogenartige, biegebeanspruchbare Sparren, deren Länge unabhängig von den verfügbaren Holzmassen ist (vgl. Abb. 53b). Ein solcher Sparren basiert gemäss der Definition in Abschnitt 2.1.2 auf einem linearen Hebelstabsystem. Dachkonstruktionen mit de l'Ormeschen Bohlenbögen wurden später von zahlreichen Baumeistern, wie beispielsweise Jacques Guillaume Legrand (1743-1808), Jacques Molinos (1743-1831) oder David Gilly (1748-1808), weiterentwickelt.

Die bereits in Abschnitt 2.1.2 erwähnte Zollinger-Bauweise (vgl. Abb. 33a) ist eine Konstruktionsart, welche ebenfalls auf dem Hebelstabsystem basiert. Diese hauptsächlich für Dachtragwerke angewandte Bauweise wurde von Friedrich Zollinger (1880-1945) entwickelt und 1923 unter seinem Namen patentiert [84]. In den 1970er und 1980er Jahren wurden weitere Patente für Tragsysteme eingereicht, denen das Hebelstabsystem zugrunde liegt. Eine Zusammenstellung derer befindet sich in [65].



Abb. 54: a) links: Education Center "The Core" - Garden Eden Project, St. Austell, Nicholas Grimshaw, 2005 [18]; b) rechts: Pavillon der Serpentine Gallery, London, Álvaro Siza und Eduardo Souto de Moura, 2005 [71].

Viele der ebenen Holz-Trägerroste (vgl. Abb. 54), die in heutiger Zeit erstellt werden, basieren auf dem Hebelstabsystem. Dies ist darauf zurückzuführen, dass eine Bauweise nach dem Einfachen Gitter biegesteife Knoten erfordern würde, was im Holzbau einen relativ grossem Aufwand und einen hohen Stahlanteil in der Konstruktion der Verbindung bedeutet.

Aufgrund der faszinierenden Einfachheit des Systems aus sich selbst tragenden Stäben erfährt das Hebelstabsystem seit einigen Jahren eine grosse Beliebtheit an Hochschulen, sowohl im studentischen Bereich auf experimenteller Basis als auch in der Forschung. Zu Ersterem finden sich zahlreiche Arbeiten in Olga Popovic Larsens "Reciprocal Frame Architecture" [60]. Bezüglich Forschung sind vor allem die Arbeiten von John Chilton an der Nottingham Trent University und von Olivier Baverel an der École Nationale des Ponts et Chaussées in Paris zu erwähnen. Einen guten aktuellen Überblick über Hebelstabwerke und vergleichbare Systeme mit einer umfangreichen Literaturliste gibt die Publikation von Alberto Pungale "The principle of structural reciprocity: history, properties and design issues" [61].

2.4 Evaluation der Systeme

Durch die folgende Evaluation der verglichenen stabförmig diskreten Flächentragwerke sollen Erkenntnisse gewonnen werden, auf Basis derer in Kapitel 3 das Tragsystem für das angestrebte Modell zur Optimierung des Konstruktions- und Materialaufwands entwickelt wird. Die essentielle Anforderung an das System ist, wie in Abschnitt 1.4.2 dargelegt, die Möglichkeit der Ausbildung ausreichender Biegesteifigkeit, damit die Gestalt unabhängig von den inneren Kräften entwickelbar ist. Da die Biegebeanspruchbarkeit jedoch einen höheren Material- und Konstruktionsaufwand erfordert als die Beanspruchung durch einen Normalspannungszustand, soll der Grad der Biegesteifigkeit an jeder Stelle des Systems nur so hoch wie erforderlich ausgebildet werden. Demzufolge muss das Tragsystem bezüglich dieser Eigenschaft eine lokale Variabilität ermöglichen.

Im Hinblick auf die Entwicklungen dieser Arbeit sind für die in diesem Kapitel verglichenen Systeme die folgenden Vor- und Nachteile festzustellen.

a) Erzeugung der Biegesteifigkeit des Systems:

- + Hebelstabsystem: Durch den Parameter der Kantenlänge a eines Grundpolygons können bei gleichbleibenden äusseren Einwirkungen die Beträge der Knotenkräfte und der maximalen Momente im Stab gesteuert werden. Es können demnach mit gleichen Knotentypen innerhalb des Systems lokal unterschiedliche Tragfähigkeiten ausgebildet werden.
- Einfaches Gitter: Die Biegesteifigkeit wird durch die konstruktive Knotenausbildung gesteuert.

b) Knotenausbildung:

- + Hebelstabsystem: Es sind einfache, gelenkige Knoten möglich.
- Einfaches Gitter: Nur wenn keine Biegesteifigkeit des Systems erforderlich ist, sind einfache gelenkige Knoten möglich (Gitterschale), ansonsten werden aufwändigere, ebenfalls biegebeanspruchbare Knoten erforderlich (Rost).

c) Interaktionskräfte an Knoten, senkrecht zur Tangentialebene an das Flächentragwerk wirkend:

- + Hebelstabsystem: Die Knoten können keine Momente übertragen. Es entsteht nur Biegebeanspruchung in den Stäben.
- Einfaches Gitter: Nur bei Rosten möglich. Die Knoten können Momente übertragen und es entsteht Biegebeanspruchung der Stäbe.

d) Interaktionskräfte an Knoten, in der Tangentialebene an das Flächentragwerk wirkend:

- Hebelstabsystem: Es entsteht Biegebeanspruchung der Stäbe.
- + Einfaches Gitter: Bei gelenkiger Knotenausbildung entsteht nur Normalkraft in den Stäben, sofern Gleichgewicht möglich ist.

Das Fazit dieser Evaluation ist, dass das Prinzip des Einfachen Gitters mit biegesteifen Knoten (Rost) aufgrund des Konstruktionsaufwands nicht geeignet ist, um ein Tragsystem für das Optimierungsmodell zu entwickeln. Das Hebelstabsystem ist bezüglich der Art und Weise, wie die Biegesteifigkeit erzeugt wird, aufgrund der in a) und b) genannten Kriterien prinzipiell sehr gut geeignet. Durch zulässige Annahmen nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie ist eine Variation der Interaktionskräfte im Rahmen des Optimierungsmodells möglich. Da das Ziel die Minimierung des Konstruktions- und Materialaufwands ist, sollte eine Wirkungsrichtung der Interaktionskräfte an den Knoten angestrebt werden, bei welcher ihre Komponenten senkrecht zur Tangentialebene an das Flächentragwerk möglichst klein sind, sodass die Biegung bezüglich dieser Richtung minimiert wird. Dies hat jedoch zur Folge, dass die in der Tangentialebene wirkenden Komponenten grösser werden, woraus der unter d) genannte Aspekt als wesentlicher Nachteil des Hebelstabsystems resultiert.

3 Tragsystem

3.1 Verknüpfung der Systeme

Die Konsequenz aus der Evaluation in Abschnitt 2.4 für das Tragsystem dieser Arbeit ist das Anstreben einer Vereinigung der Vorteile beider verglichenen Systeme. Dabei ist der Hauptunterschied, der sich auf die meisten Systemeigenschaften auswirkt, die Verbindung der Stäbe: beim Einfachen Gitter die singuläre (vgl. Abschnitt 2.1.1) und beim Hebelstabwerk die reziproke (vgl. Abschnitt 2.1.2). Demzufolge muss das entwickelte Tragsystem in der Lage sein, beide auszubilden. Dies ermöglicht der hier eingeführte Parameter r der Öffnungsweite, mit welchem die Stabkonfiguration einer Verbindung beschrieben wird, und mit $r \geq 0$ die singuläre durch eine Art zyklisches Öffnen in eine reziproke Verbindung überführt wird. Vergleichbares wurde bereits in den Arbeiten von Baverel et al. [6] [5] [7] [16] aufgezeigt (vgl. Abb. 55).

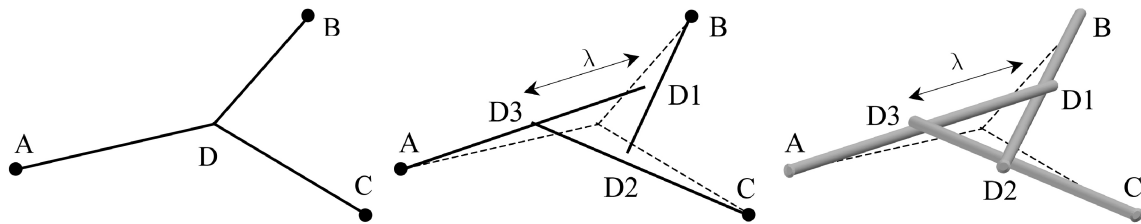


Abb. 55: Prinzip der Überführung einer singulären Verbindung in eine reziproke nach Baverel et al. [6].

Bei der in Abbildung 55 gezeigten Variation der Öffnungsweite bleiben die als Punkte A, B und C bezeichneten Auflager des Systems unverändert, was dazu führt, dass die Stablängen angepasst werden müssen. Durch Parallelverschieben der Stäbe kann die Öffnungsweite variiert werden ohne dabei die Stablängen zu verändern, jedoch verschieben sich die Auflagerpunkte des Gesamtsystems. Auf beide Arten lassen sich durch den Parameter der Öffnungsweite eindimensionale Spektren beschreiben, deren Ränder beiderseits durch Systeme mit singulären Verbindungen und die Zwischenbereiche durch solche mit reziproken definiert sind. Zwei derartige Spektren sind in Abbildung 56 beispielhaft für die Variation der Öffnungsweite r durch Parallelverschieben der Stäbe dargestellt.

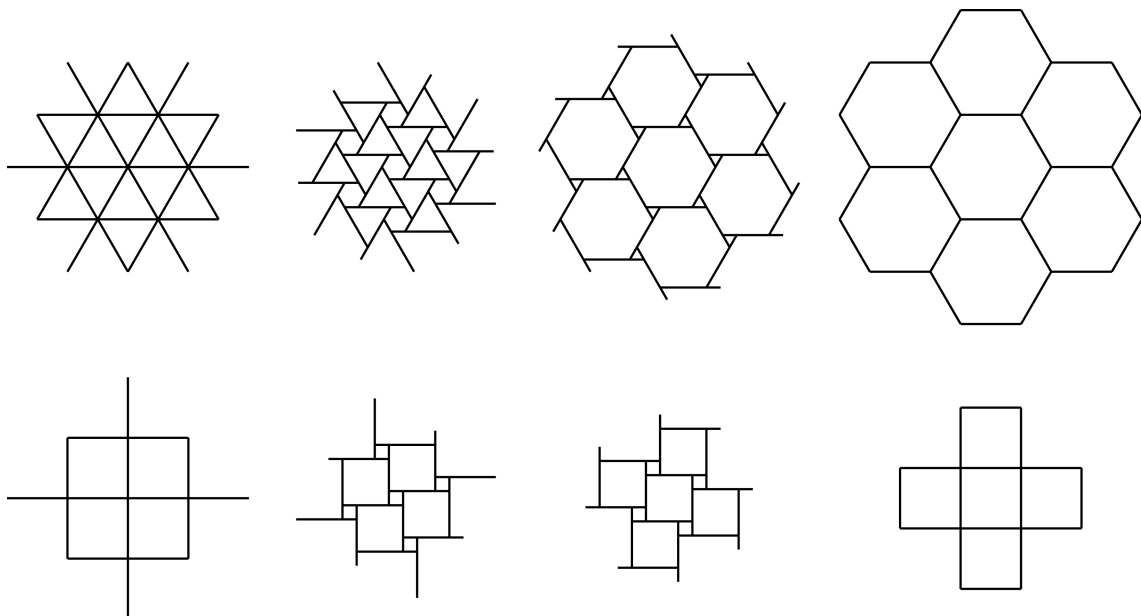


Abb. 56: Beispiele zweier Spektren des Tragsystems mit Veränderung der Öffnungsweite durch Parallelverschieben der Stäbe. a) oben: 6-stäbige resp. 3-stäbige Verbindungen; b) unten: 4-stäbige Verbindungen.

Diese Darstellungen der Spektren verdeutlichen, dass das Einfache Gitter gleitend über das Hebelstabssystem wiederum in ein Einfaches Gitter transformiert werden kann. Mit einer derartigen Betrachtungsweise sind diese Bezeichnungen nicht mehr als Typologien zu verstehen, sondern vielmehr als parametrische Zustände eines Tragsystems.

3.2 Einstellen der Öffnungsweite

Um in jeder Verbindung dem Wert des Parameters der Öffnungsweite r eine eindeutige Stabkonfiguration zuweisen zu können, wird dem Tragsystem ein Referenzgitter mit singulären Verbindungen zugrunde gelegt. Ausgehend von diesem kann durch Zuweisen eines Wertes $r \geq 0$ mittels einer geeigneten Methode, individuell an jeder Verbindung, eine eindeutige Stabkonfiguration für den spezifischen Wert der Öffnungsweite ermittelt werden.

Für eine vergleichbare Aufgabenstellung existieren bereits Methoden. Beispielsweise wird in [82] eine Vorgehensweise aufgezeigt, mit welcher die Grössen der Grundpolygone von Hebelstabsystemen festgelegt werden. Ausgangslage hierbei sind definierte Punkte in einer ebenen Referenzfläche, um welche Kreise konstruiert werden, deren Durchmesser in Abhängigkeit der Grundpolygongrössen variieren. Durch die Beschreibung von Stäben als Tangenten an diese Kreise entsteht ein ebenes Hebelstabsystem, aus welchem durch die Projektion auf eine räumliche Fläche ein räumliches System entsteht (vgl. Abb. 57).

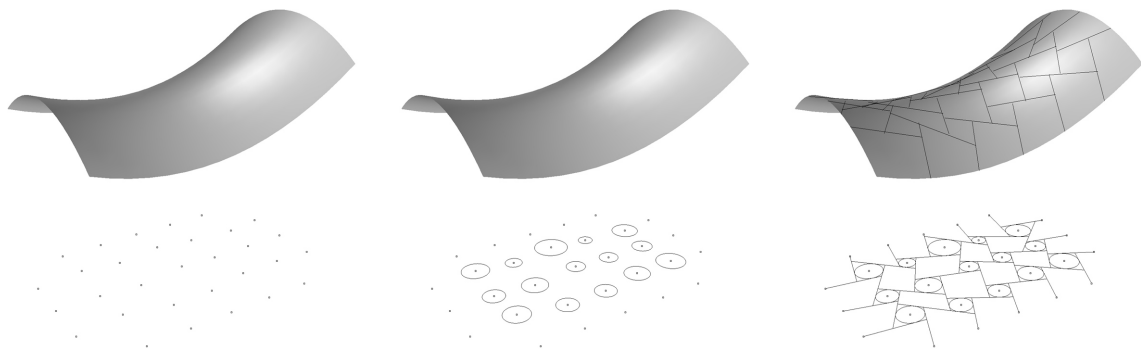


Abb. 57: Methode zur Festlegung der Grössen von Grundpolygonen bei Hebelstabsystemen [82]. a) links: Punkte in ebener Referenzfläche; b) mittig: Kreise um Punkte mit Durchmessern je nach Grundpolygongrössen; c) rechts: Ebenes Hebelstabsystem mit Stäben als Tangenten an die Kreise, sowie Projektion auf Fläche.

Der Ansatz dieser Methodik scheint für das hier entwickelte Tragsystem geeignet, da das Einstellen der Öffnungsweite an jeder Verbindung individuell und unabhängig von den Nachbarverbindungen vorgenommen werden kann, was beispielsweise beim Vorgehen wie in Abbildung 56 gezeigt nicht gegeben ist. Die Methode des Einstellens der Öffnungsweite in der vorliegenden Arbeit wird gegenüber der in Abbildung 57 gezeigten weiterentwickelt um den gestellten Anforderungen gerecht zu werden.

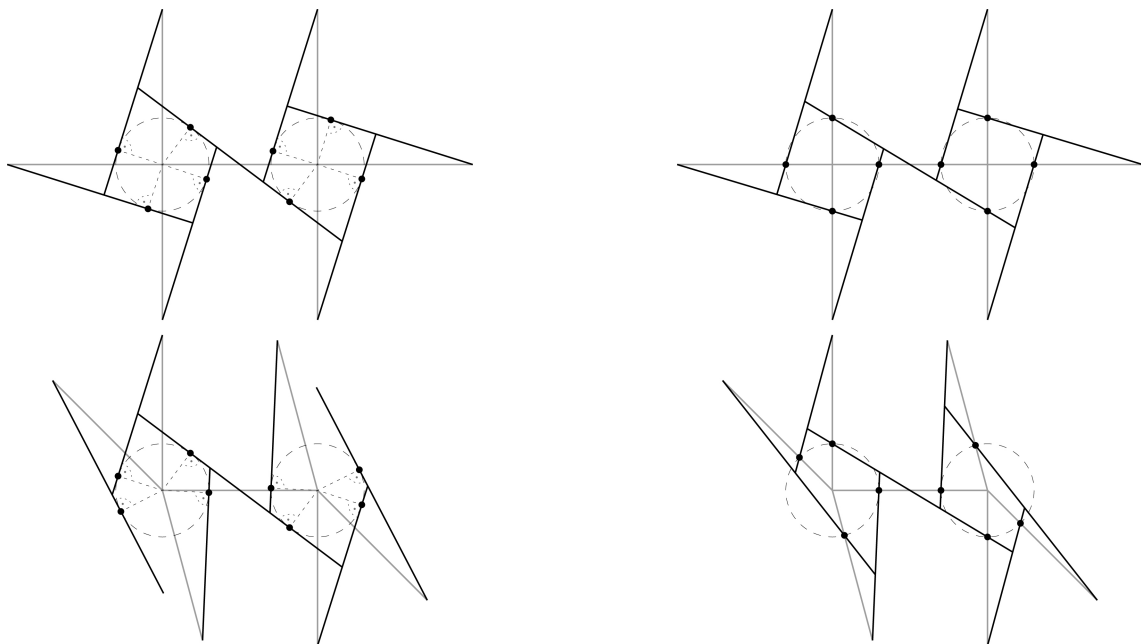


Abb. 58: Einstellen der Öffnungsweite einer Verbindung bei je zwei unterschiedlichen Referenzgittern. a) links: Tangentenmethode nach [82]; b) rechts: Methode der Kugelschnittpunkte dieser Arbeit.

Im hier entwickelten Tragsystem soll ein räumliches Referenzgitter vorliegen, das auf der Oberfläche der vorgegebenen Form liegt, da die Projektion eines ebenen Systems erstens zu unerwünschten Verzerrungen führen kann und zweitens nicht immer eindeutig möglich ist. Aufgrund des räumlichen Referenzgitters werden die Öffnungsweiten nicht durch Kreise sondern durch Kugeln definiert. Des Weiteren können bei der Konstruktion der Stäbe als Tangenten Fälle entstehen, bei welchen keine eindeutige Stabkonfiguration ermittelt werden kann. Beispielsweise wenn zwei nebeneinanderliegende Winkel zwischen Stäben sehr stark unterschiedlich sind, kann gegebenenfalls kein geeigneter Knotenpunkt zwischen einem Stab und seinem Nachbarstab ermittelt werden (vgl. Abb. 58a, unten). Um für ein grösseres Spektrum von singulären Verbindungen und Parametern r eine eindeutige Stabkonfiguration ermitteln zu können, ergeben sich die Stäbe in der Vorgehensweise dieser Arbeit nicht aus Tangenten, sondern durch die Schnittpunkte der Kugel mit dem zyklisch nächstliegenden Stab. Dies ist in Abbildung 58b als ebene Projektion der Tangentenmethode gegenübergestellt.

Eine weitere Festlegung, die getroffen werden muss um einem Wert r der Öffnungsweite eindeutig die Stabkonfiguration einer reziproken Verbindung zuweisen zu können, ist der zyklische Drehsinn. Hierbei wird, wie bereits in Abschnitt 2.1.2 erwähnt, zwischen einer mathematisch positiven und negativen Richtung unterschieden (vgl. Abb. 29). Bei einem räumlich betrachteten Referenzgitter wird zur eindeutigen Beschreibung dessen einen Vektor, der den positiven Drehsinn definiert, benötigt. Unter anderem dazu wird hier, wie in Abbildung 59 dargestellt, der Normalenvektor \mathbf{n}_v einer Verbindung definiert, für dessen Betrag $|\mathbf{n}_v| = 1$ gilt.

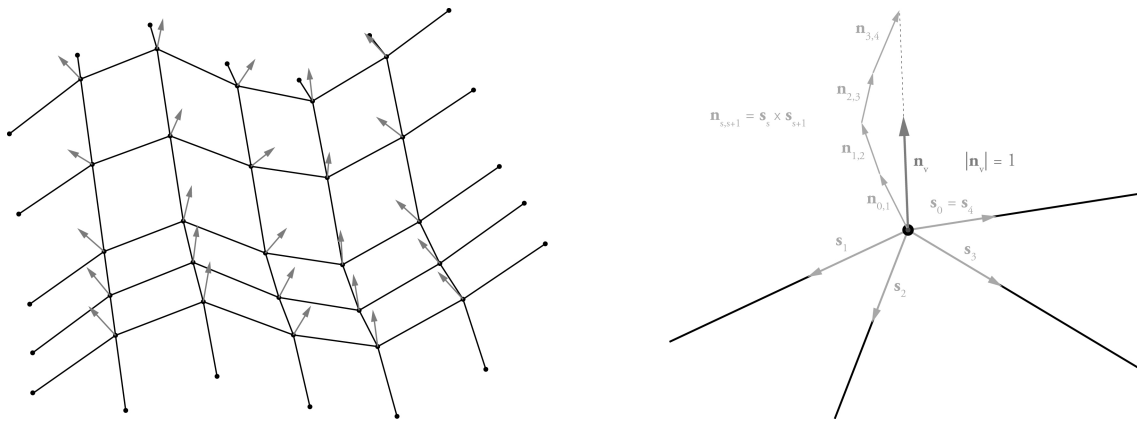


Abb. 59: a) links: Normaleneinheitsvektoren an den Verbindungen eines Referenzgitters; b) rechts: Ermittlung eines Normalenvektors \mathbf{n}_v .

Die Voraussetzungen, um mit der Methode der Kugelschnittpunkte eine eindeutige Stabkonfiguration aus der Öffnungsweite der Verbindung ermitteln zu können sind: Ein Referenzgitter mit singulären Verbindungen, die Normalenvektoren der Verbindungen, ein zulässiger Wert des Parameters r und die Definition des Drehsinns. Die Schritte zur Ermittlung der Stabkonfiguration einer Verbindung mit dieser Methode lassen sich wie folgt definieren (vgl. Abb. 60).

1. Einschreiben der Kugeln mit dem jeweiligen Radius r um den Knoten der entsprechenden singulären Verbindung des Referenzgitters.
2. Bestimmung der Schnittpunkte der Kugeln mit denjenigen Stäben, welche an die jeweilige Verbindung anschliessen.
3. Festlegen der neuen Stabachsen, sodass diese jeweils an ihrem Ende durch zwei Kugelschnittpunkte verlaufen. Dabei ist beiderseits der Schnittpunkt zu wählen, welcher sich auf dem im Drehsinn nächstliegenden Nachbarstab befindet.
4. Ermittlung der Lotfusspunkte von jeweils zwei benachbarten Stäben. Daraus resultieren auf jeder Stabachse vier Lotfusspunkte, wobei Ausnahmen bei den Stäben im Randbereich des Systems auftreten können.
5. Festlegen der neuen Stablängen, sodass diese jeweils zwischen den beiden äusseren Lotfusspunkten verlaufen.
6. Festlegung der Interaktionspunkte und Knoten auf dem halben Abstand der Lotfusspunkte zweier benachbarter Stäbe.

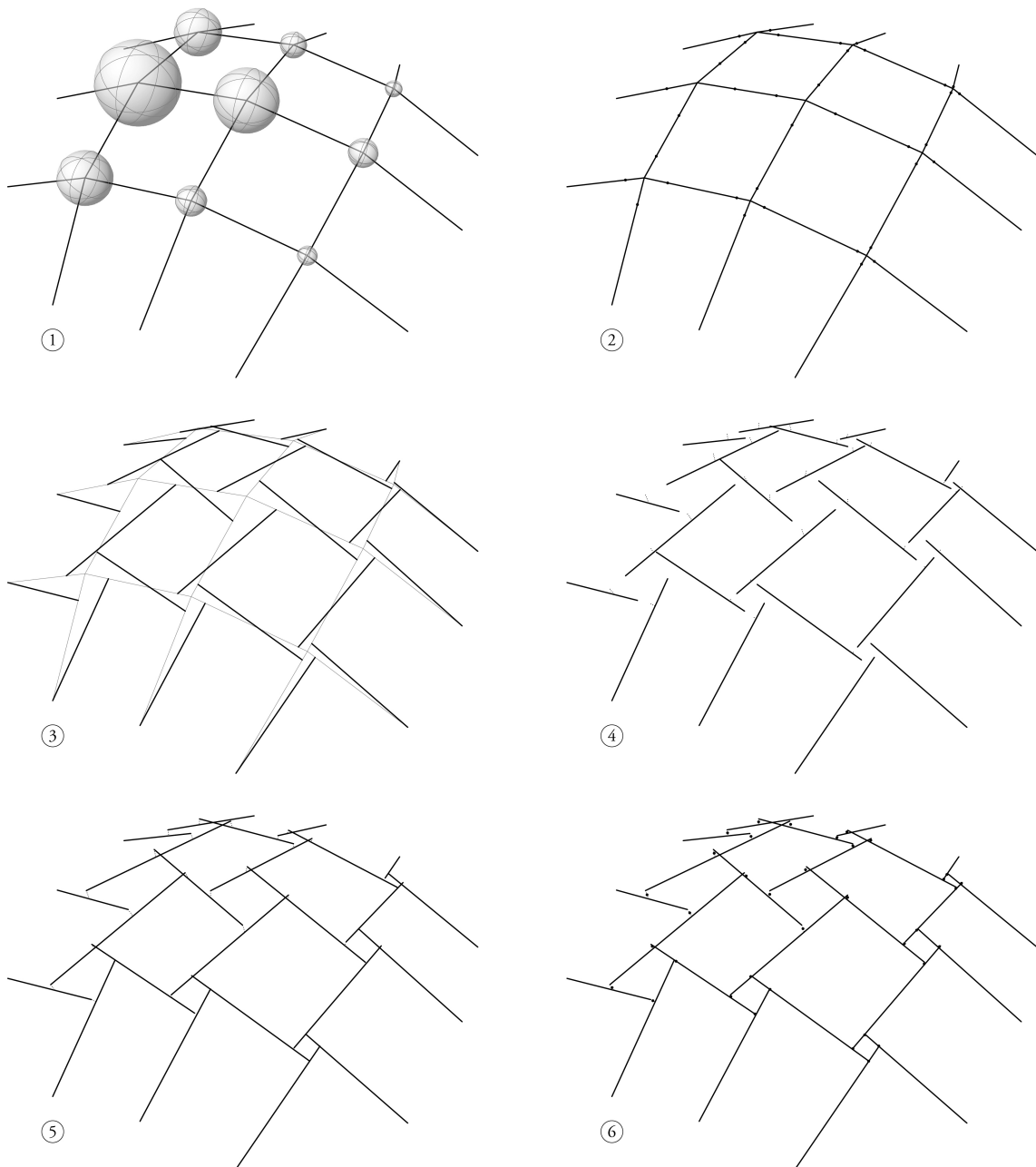


Abb. 60: Sechs Schritte der Methode der Kugelschnittpunkte zur Bestimmung einer eindeutigen Stabkonfiguration aus der Öffnungsweite der Verbindung.

Ein Wert für den Parameter r der Öffnungsweite wird dann als zulässig bezeichnet, wenn ihm eine eindeutige Stabkonfiguration zugewiesen werden kann, und demnach alle dargelegten sechs Schritte eindeutig durchführbar sind. Aufgrund von Schritt 1 kann als maximal möglicher Wert von r die minimale Länge der Stäbe, welche an die Verbindung anschliessen, festgelegt werden. Der Wertebereich des Parameters r definiert sich demnach wie folgt:

$$0 \leq r \leq \min(l_0, l_1, \dots, l_{n-1}). \quad (4)$$

Im Rahmen der durchgeführten Forschungsarbeit war zu beobachten, dass für $r \geq 0.5 \cdot \min(l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ häufiger Fälle mit unzulässigen Werten von r eintreten können, da der oben angegebene Schritt 5 nicht durchgeführt werden kann. Dies tritt aus vergleichbaren Gründen auf wie in Abbildung 58a unten für die Tangentenmethode gezeigt.

Bezüglich des Tragverhaltens bedeutet eine grössere Öffnungsweite, wie in Abschnitt 2.2.2 gezeigt, dass aufgrund des grösseren Hebelarms der Interaktionskräfte infolge senkrecht zu Tangentialebene des Tragwerks wirkender Kräfte, eine geringere Biegebeanspruchung der Stäbe und damit eine höhere Traglast resultiert (vgl. Abb. 44 und 45). Die singuläre Verbindung beschreibt den Grenzwert $r = 0$, wobei die Interaktionskräfte keinen Hebelarm aufweisen und demnach vom Tragwerk kein Biegemoment aufgenommen werden kann.

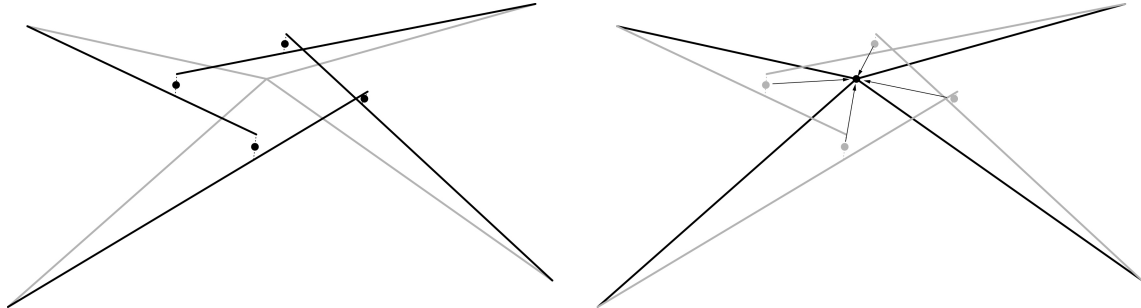


Abb. 61: a) links: Beispiel einer 4-ständigen reziproken Verbindung mit einer Öffnungsweite $r > 0$. Die Verbindung umfasst vier Knoten; b) rechts: Beispiel der entsprechenden singulären Verbindung resp. der reziproken Verbindung mit einer Öffnungsweite $r = 0$. Die Verbindung umfasst vier Knoten, die in einem Punkt überlagert sind.

Abbildung 61 zeigt, dass eine reziproke Verbindung durch Zusammenführen aller involvierten Endinteraktionspunkte und den jeweils auf dem Stab nächstliegenden inneren Interaktionspunkte, in eine singuläre Verbindung überführt werden kann. Der in Abschnitt 2.1.1 definierte Knoten eines Einfachen Gitters, an dem n Stäbe anschliessen, stellt in dieser Betrachtungsweise die Überlagerung von n Knoten dar. Demzufolge kann die singuläre Verbindung auch als reziproke Verbindung mit Öffnungsweite $r = 0$ bezeichnet werden.

3.3 Definition des Tragsystems

Wie in Abschnitt 2.4 dargelegt, ist für die Optimierung der Beanspruchung in den Stäben eine lokale Variabilität des Grads der Biegesteifigkeit des Systems erforderlich, was durch den in diesem Kapitel eingeführten Parameter der Öffnungsweite ermöglicht wird. Das Optimierungsmodell sucht in Abhängigkeit eines gegebenen Referenzgitters (vgl. Abb. 62a) für jede Verbindung des Systems eine geeignete Öffnungsweite, sodass genau die erforderliche Biegesteifigkeit erreicht wird und demnach ein minimaler Material- und Konstruktionsaufwand resultiert (vgl. Abb. 62b).

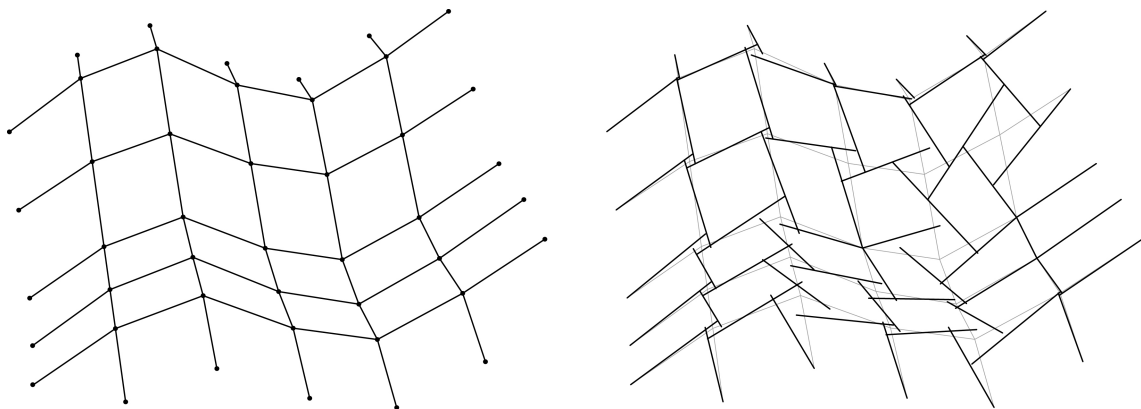


Abb. 62: a) links: Referenzsystem in Abhängigkeit der vorgegebenen Form der räumlichen Fläche; b) rechts: An den lokal erforderlichen Grad der Biegesteifigkeit angepasstes Tragsystem.

In dieser Arbeit wird die Annahme getroffen, dass die Auflager des Referenzsystems identisch mit jenen des optimierten Systems sind. Ein plausibles Gegenargument wäre die Erhaltung der Stablängen, vergleichbar zu Abbildung 56, was jedoch bei einem System, welches in jeder Verbindung eine individuelle Öffnungsweite aufweisen kann, sowieso nur in Ausnahmefällen möglich ist.

Im Folgenden werden die Subsysteme genauer betrachtet. Die Lage der Knoten wird gemäss Abschnitt 2.1.2 auf dem halben senkrechten Abstand zwischen den Achsen der beiden anschliessenden Stäbe liegend festgelegt. Das Subsystem Knoten ist demnach eindeutig beschreibbar durch die Koordinaten seiner Lage, sowie den zwei entsprechenden Interaktionspunkten, deren Koordinaten identisch mit denen des Knotens selbst sind. Das Subsystem Stab ist aufgrund der in Abschnitt 3.2 dargelegten Methode durch den Verlauf seiner Achse, sowie derer von den vier Nachbarstäben, geometrisch eindeutig bestimmt. Die Stäbe des Tragsystems lassen sich bezüglich der unterschiedlichen Eigenschaften des Subsystems in innere Stäbe und Randstäbe, sowie jede der beiden Untergruppen nochmals in drei Typen klassifizieren (vgl. Abb. 63).

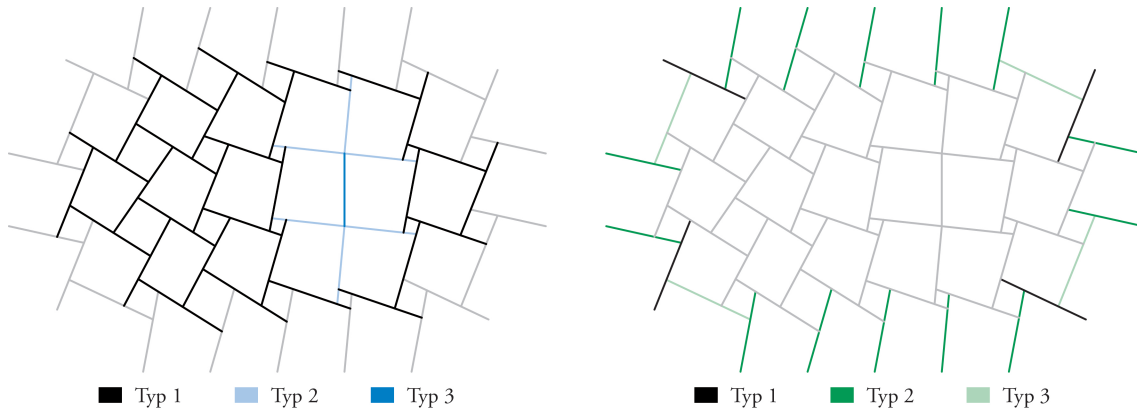


Abb. 63: a) links: Untergruppe der inneren Stäbe mit den drei definierten spezifischen Typen; b) rechts: Untergruppe der Randstäbe mit den drei definierten spezifischen Typen.

3.3.1 Subsysteme der inneren Stäbe

Als innere Stäbe werden hier alle Stäbe bezeichnet, die sich nicht im Randbereich des Tragsystems befinden. Die drei Typen dieser Kategorie unterscheiden sich, wie im Folgenden gezeigt, lediglich durch die Verbindungen an den beiden Stabenden, die jeweils reziprok ($r > 0$) oder singular ($r = 0$) sein können (vgl. Abb. 63a).

Typ 1: Die Verbindungen an beiden Stabenden sind reziprok ausgebildet.

Typ 2: Die Verbindung an einem Stabende ist reziprok ausgebildet, die am anderen singular.

Typ 3: Die Verbindungen an beiden Stabenden sind singular ausgebildet.

Typ 1

Dieser Typ der inneren Stäbe kann für das Tragsystem als Allgemeinfall eines Subsystems betrachtet werden.

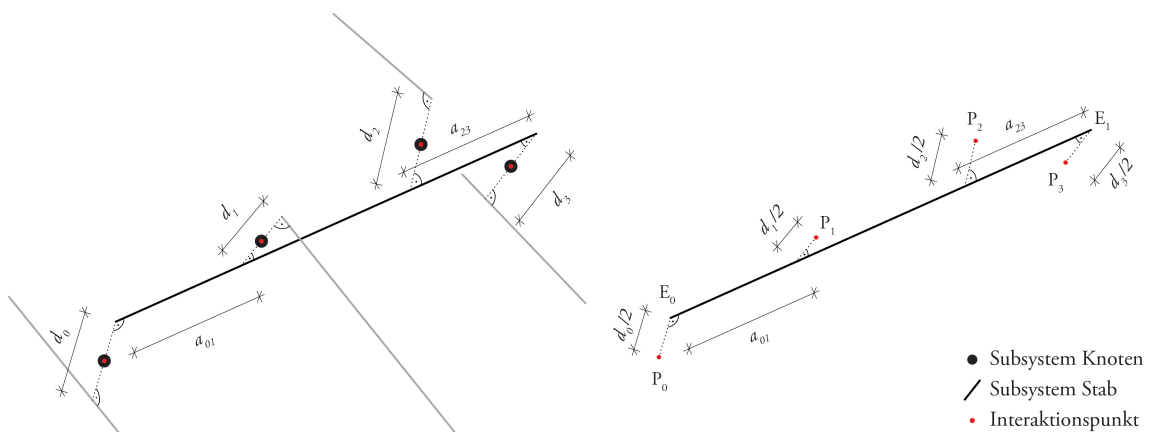


Abb. 64: Innerer Stab, Typ 1. a) links: Subsysteme Stab und Knoten; b) rechts: Parameter des Subsystems Stab.

Für diesen Typ werden die folgenden, allgemeingültigen Parameter definiert. Die anderen, in Abbildung 63 gezeigten fünf Typen lassen sich als parametrische Sonderfälle beschreiben.

d_0, d_1, d_2, d_3 : Senkrechter Abstand der Stabachse mit jener des jeweiligen Nachbarstabs

P_0, P_1, P_2, P_3 : Interaktionspunkte zu den anschliessenden Knoten, per Definition in der Hälfte des senkrechten Abstands zum Nachbarstab

a_{01}, a_{23} : Abstand der Lotfusspunkte von P_0 und P_1 , resp. P_2 und P_3 auf der Achse des Subsystems

E_0, E_1 : Endpunkte der Achse des Subsystems, entspricht dem Lotfusspunkt von P_0 resp. P_3

Typ 2

$d_0 = d_1 = 0, a_{01} = 0, E_0 = P_0 = P_1$ (analoges gilt für singuläre Verbindung bei E_0)

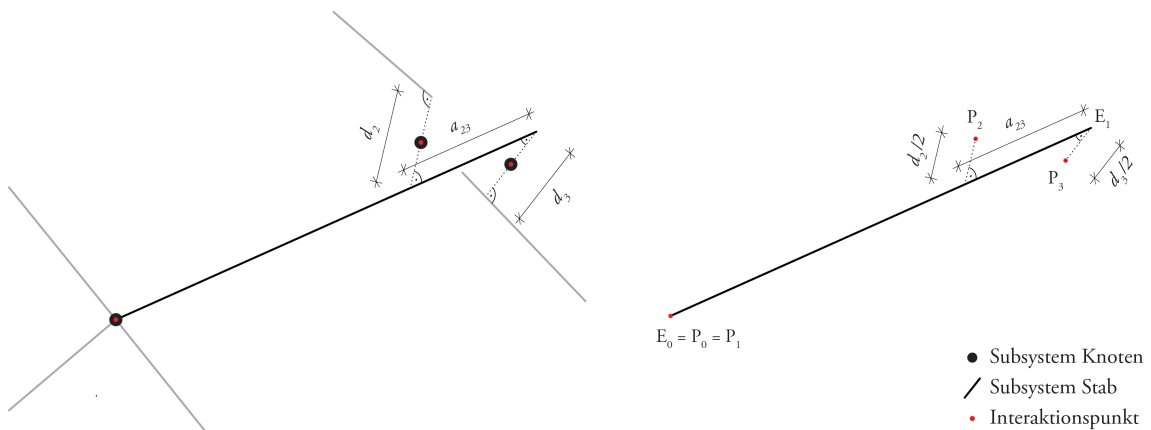


Abb. 65: Innerer Stab, Typ 2. a) links: Subsysteme Stab und Knoten; b) rechts: Parameter des Subsystems Stab.

Typ 3

$d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = 0, a_{01} = a_{23} = 0, E_0 = P_0 = P_1, E_1 = P_2 = P_3$

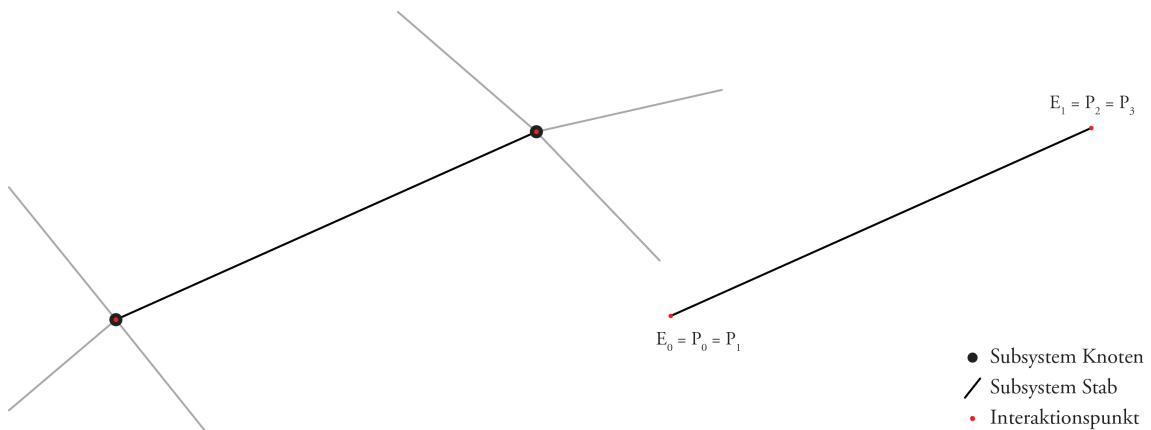


Abb. 66: Innerer Stab, Typ 3. a) links: Subsysteme Stab und Knoten; b) rechts: Parameter des Subsystems Stab.

3.3.2 Subsysteme der Randstäbe

Als Randstäbe werden jene Stäbe definiert, welche sich nahe der Auflager des Gesamtsystems befinden (vgl. Abb. 63b). Die Randstäbe erfahren hier eine spezifische Betrachtung, da sie einerseits mit den Knoten der Auflager des Tragsystems verbunden sind, und/oder andererseits nur insgesamt drei anschliessende Knoten besitzen. Letzteres ist der Fall, wenn ein Stabende Teil einer Verbindung ist, die nicht reziprok

geschlossen ist. Eine solche wird hier als offene Verbindung bezeichnet. Auf einem der daran beteiligten Stäbe existiert ein Innerer Interaktionspunkt, der mit keinem Knoten verbunden ist. Dieser wird hier freier Interaktionspunkt genannt und kann nur für P_1 oder P_2 eintreten. Da ein freier Interaktionspunkt für das System keine Bedeutung hat, ist dafür keine geometrische Spezifikation erforderlich.

Offene Verbindungen treten im Tragsystem dieser Arbeit nur auf, wenn einer der darin enthaltenen Interaktionspunkte mit einem Auflagerknoten des Gesamtsystems verbunden ist und damit die geschlossene Reziprozität der Verbindung unterbricht. Abbildung 67 zeigt verschiedene Situationen von offenen Verbindungen mit den entsprechenden Auflagerknoten, den freien Interaktionspunkten, sowie einer theoretischen Vervollständigung zu einer reziproken Verbindung.

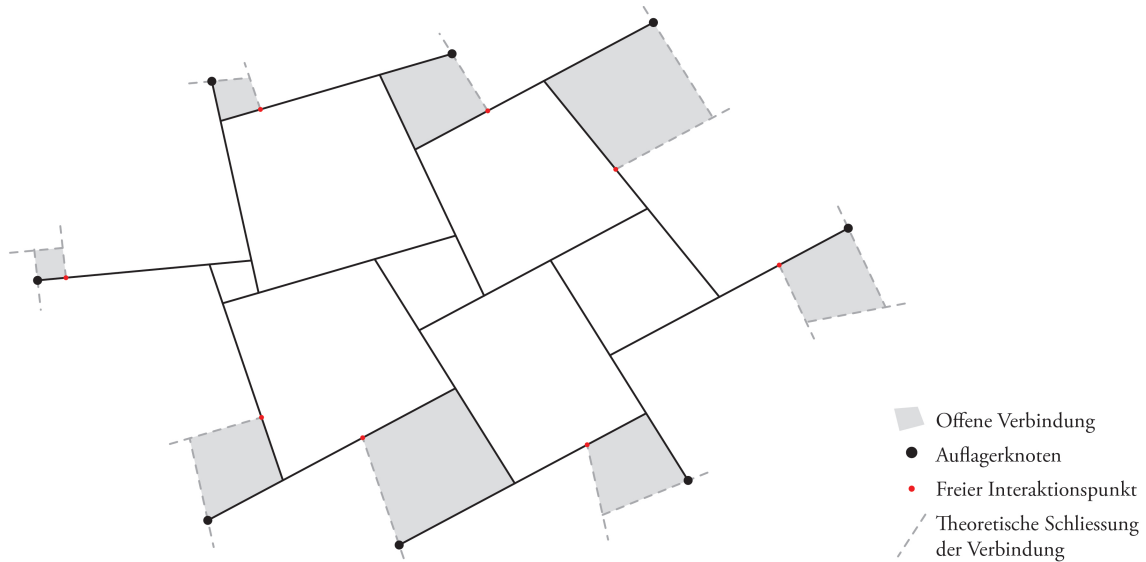


Abb. 67: Beispiele offener Verbindungen in den Randbereichen des Tragsystems, sowie deren theoretischer Schließungen zu reziproken Verbindungen.

Aus den obigen Erläuterungen ergibt sich, dass bei Randstäben an einem Ende immer eine reziproke oder singuläre Verbindung existiert und am anderen eine offene. Nach der Art, wie ein Randstab in die offene Verbindung eingebunden ist, lassen sich wie im Folgenden aufgezeigt drei Typen klassifizieren.

- Typ 1: Am Endinteraktionspunkt erfolgt der Anschluss an einen Auflagerknoten, am nächstliegenden Inneren Interaktionspunkt schliesst mittels eines Knotens ein Nachbarstab an.
- Typ 2: Am Endinteraktionspunkt erfolgt der Anschluss an einen Auflagerknoten, der nächstliegende Innere Interaktionspunkt ist ein freier.
- Typ 3: Am Endinteraktionspunkt erfolgt der Anschluss an einen Nachbarstab mittels eines Knotens, der nächstliegende innere Interaktionspunkt ist ein freier.

Typ 1

$$d_0 = 0, E_0 = P_0$$

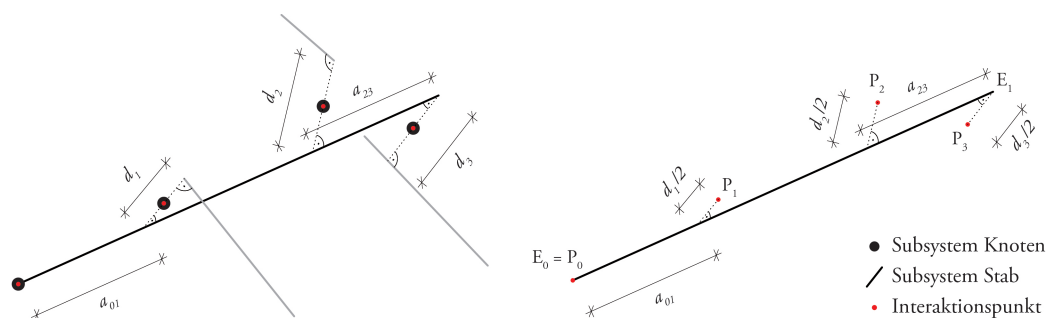


Abb. 68: Randstab, Typ 1. a) links: Subsysteme Stab und Knoten; b) rechts: Parameter des Subsystems Stab.

Typ 2

$d_0 = 0$, d_1 nicht bestimmt, a_{01} nicht bestimmt, $E_0 = P_0$, P_1 nicht bestimmt

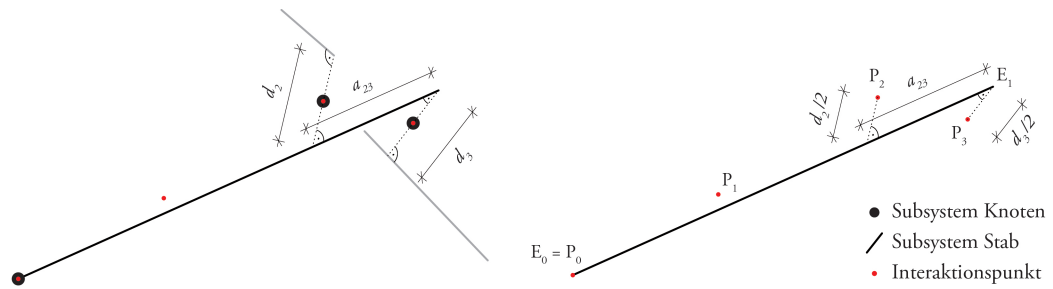


Abb. 69: Randstab, Typ 2. a) links: Subsysteme Stab und Knoten; b) rechts: Parameter des Subsystems Stab.

Typ 3

d_1 nicht bestimmt, a_{01} nicht bestimmt, P_1 nicht bestimmt

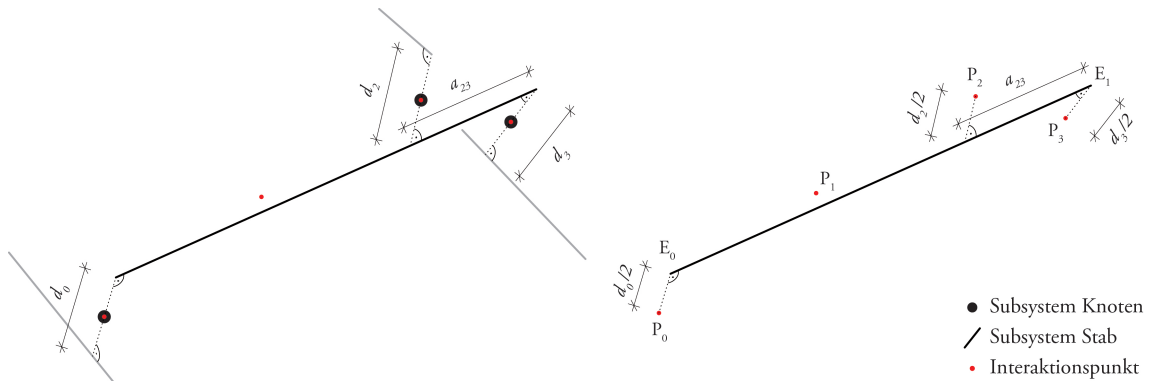


Abb. 70: Randstab, Typ 3. a) links: Subsysteme Stab und Knoten; b) rechts: Parameter des Subsystems Stab.

Das in diesem Abschnitt für die Typen 1 bis 3 beschriebene (vgl. Abb. 68 bis 70), gilt ebenso wenn die Eigenschaften der Enden E_0 und E_1 vertauscht sind.

3.3.3 Sonderfall ebenes System

Ein Sonderfall des Tragsystems ist die ebene Ausbildung (vgl. Abb. 71), wobei alle Stabachsen des Systems in einer Ebene liegen. Auch hierfür lassen sich die Subsysteme als parametrischer Zustand des Allgemeinfall wie folgt darstellen.

$d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = 0$, $E_0 = P_0$, $E_1 = P_3$, $P_1, P_2 \in \overline{E_0E_1}$

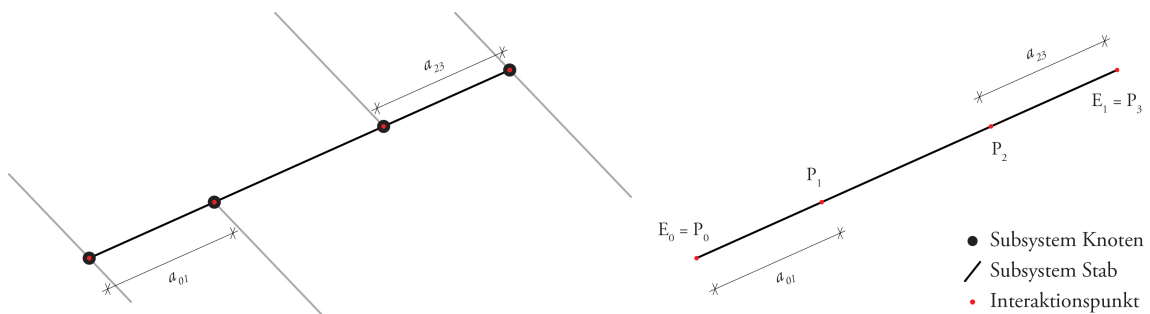


Abb. 71: Ebenes System. a) links: Subsysteme Stab und Knoten; b) rechts: Parameter des Subsystems Stab.

3.3.4 Sonderfall lineares System

Auch ein lineares System als Sonderfall des Tragsystems kann gebildet werden. Dies hat zwar im Rahmen des Optimierungsmodells für Flächentragwerke hier keine Bedeutung, jedoch dient es in Kapitel 6 zur einfachen Veranschaulichung von Zusammenhängen. Als wesentlicher Unterschied zum flächigen sind im linearen System ein Stab und dessen anschließende Knoten nicht mehr aus dem Verlauf seiner Achse und jenen der vier Nachbarstäbe definiert. Im linearen Sonderfall sind die Stabachsen unabhängig von der Öffnungsweite, welche sich nur auf die Stablänge auswirkt. Des Weiteren definiert d nicht den orthogonalen Abstand von Nachbarstäben, sondern wie in Abbildung 72a gezeigt, ist dieser so gelegt, dass der Winkel zu beiden Nachbarstäben gleich ist.

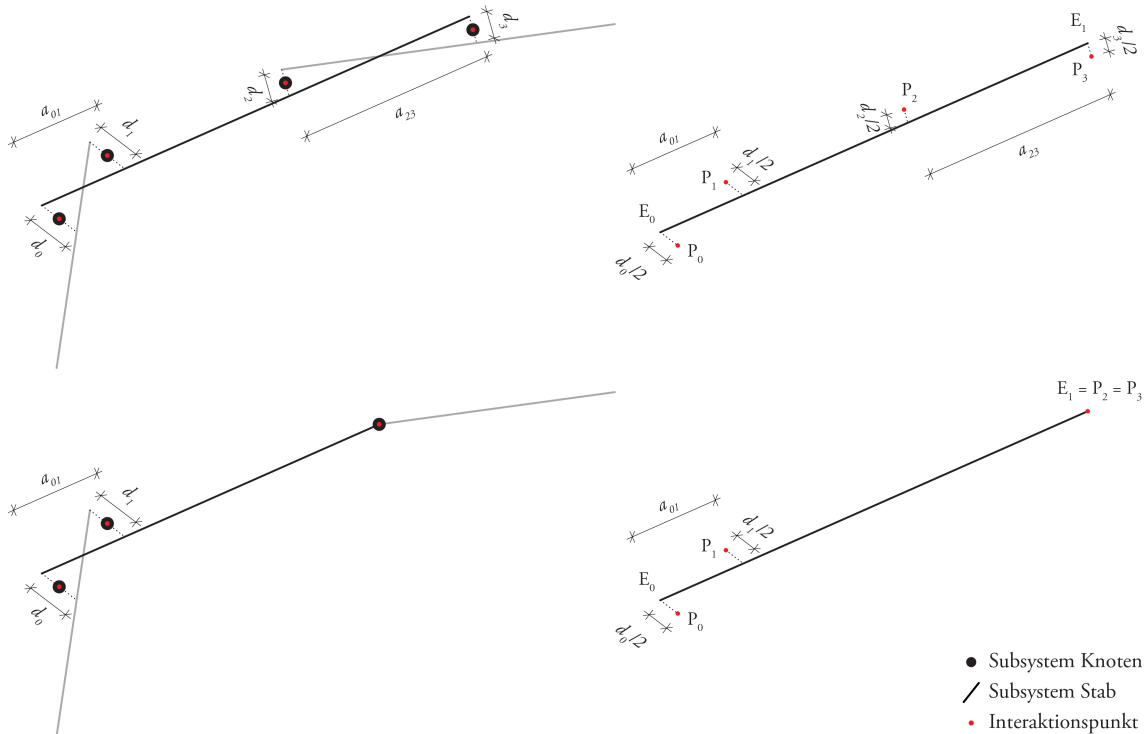


Abb. 72: Lineares System. a) links: Subsysteme Stab und Knoten, oben mit beiderseits reziproken Verbindungen, unten nur an einem Ende eine reziproke und am anderen eine singuläre Verbindung; b) rechts: Parameter des Subsystems Stab für diese zwei exemplarisch dargestellten Typen.

In Abbildung 72 sind beispielhaft zwei Typen für die Subsysteme der Stäbe dargestellt. Die anderen in Abschnitt 3.3.1 und 3.3.2 beschriebenen Typen existieren ebenfalls für diesen Sonderfall.

3.4 Krümmung des Systems

Die Krümmungen der Fläche des Tragsystems sind festgelegt durch die Wahl des Referenzgitters, wo sie anhand der Winkel zwischen den Stäben qualitativ bestimmt werden können. Aus der lokalen Veränderung der Lage der Stäbe bei der individuellen Einstellung der Öffnungsweiten in den Verbindungen können geringfügige Krümmungsänderungen resultieren, welche jedoch die formalen Charakteristika des Gesamtsystems grundsätzlich nicht verändern. Wenn jedoch nach der Optimierung eine zu starke Änderung der Gesamtform der Fläche entsteht, kann an den entsprechenden Stellen das Netz des Referenzgitters verdichtet werden.

In einigen Fällen kann es erforderlich sein, am Subsystem eines Stabes Aussagen über die Systemkrümmung zu treffen. Dies ist, wie in Abschnitt 2.1.2 für das Hebelstabsystem beschrieben, analog anhand des Verhaltens der Parameter a und d zueinander möglich.

Eine Aussage über die Stärke der Krümmung kann mit dem bereits in Abschnitt 2.1.2 definierten Quotient c getroffen werden, für den hier gilt:

$$c = \frac{d_0 + d_1}{a_{01}} + \frac{d_2 + d_3}{a_{23}}.$$

Dabei beschreibt c nur qualitativ die Krümmung des Systems an einem Stab. Auf eine quantitative, geometrisch korrekte Beschreibung wird hier verzichtet, da dies im Rahmen des Optimierungsmodells nicht von Bedeutung ist. Jedoch können die diesbezüglich wichtigsten Eigenschaften auch durch die vereinfachte Krümmungsdarstellung mit c gezeigt werden. Dies ist einerseits das resultierende ebene System mit $c = 0$, bei $d_0 = d_1 = d_2 = d_3 = 0$, und andererseits die Eigenschaft der aus dem Stab nicht bestimmaren Krümmung bei $a_{01} = 0$ und/oder $a_{23} = 0$. Letzteres bedeutet, dass die Krümmung nur durch die Winkel zwischen den Stabachsen an einer Verbindung ermittelt werden kann.

3.5 Innere Kräfte

Als innere Kräfte werden im Falle des vorliegenden Tragsystems die Interaktionsgrößen bezeichnet, also zusammenfassend sowohl Kräfte $\mathbf{f}_{c,k}$ als auch Momente $\mathbf{m}_{c,k}$, die in den Interaktionspunkten P_k wirken, über welche die Subsysteme der Stäbe und Knoten verbunden sind. Aus den inneren Kräften können in einem darauffolgenden Schritt, wie später in Abschnitt 6.4 erläutert, die Beanspruchungen der Stäbe und der konstruktiv ausformulierten Knoten ermittelt werden. In Analogie zu Abschnitt 2.2 wird hier vereinfachend festgelegt, dass äussere Kräfte $\mathbf{f}_{a,k}$ ausschliesslich in den Subsystemen der Knoten angreifen. Fälle, in denen ein äusseres einwirkendes Moment auftritt, sind zwar theoretisch möglich, werden aber in dieser Arbeit nicht verfolgt, jedoch könnten diese analog zu äusseren Kräften behandelt werden. Abbildung 73 zeigt die beiden Subsystemtypen Stab und Knoten im Allgemeinfeld mit der maximal möglichen Anzahl innerer Kräfte und äusserer Einwirkungen.

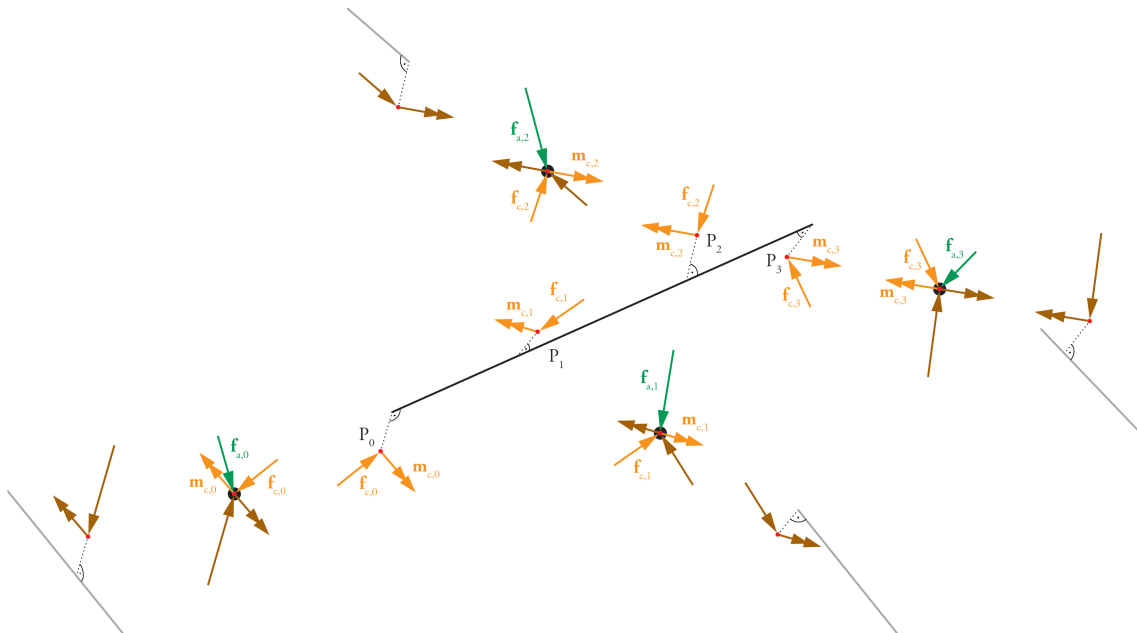


Abb. 73: Innere Kräfte resp. Interaktionsgrößen am Subsystem Stab, sowie den anschliessenden Subsystemen Knoten.

In einer Gleichgewichtsbetrachtung der Subsysteme können aufgrund der sechs Gleichungen (2) und (3) sechs unbekannte Komponenten von Vektoren ermittelt werden. Im Falle des zentralen Kräftesystems des Knotens sind dies maximal drei für Kräfte und drei für Momente, da in den Bedingungen für Momentengleichgewicht (3) die Momente der Kräfte null sind. Demzufolge können am Knoten, wie bereits in Abschnitt 2.2.2 erläutert, die Interaktionsgrößen zu einem Stab hin ermittelt werden, wenn diejenigen zum anderen Stab hin bekannt sind.

Damit am Subsystem eines Stabes die inneren Kräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden können, müssen genau sechs unbekannte Vektorenkomponenten darin enthalten sein, wovon maximal drei auf Momentenvektoren entfallen dürfen. Insgesamt weisen die Vektoren der Interaktionsgrößen des Subsystems Stab 24 Komponenten auf. Als Konsequenz davon ist die Wahrscheinlichkeit von Freiheitsgraden in der Gleichgewichtsbetrachtung zur Ermittlung der inneren Kräfte hoch. Zur Reduktion der Freiheitsgrade können die folgenden zwei Strategien verfolgt werden.

1. Eine entsprechend konstruktive Ausbildung der Knoten, sodass bestimmte Interaktionsgrößen nicht möglich sind oder deren Wirkung eingeschränkt ist.
2. Wenn die konstruktive Knotenausbildung beliebige Interaktionsgrößen zulässt kann deren Wirkung nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie, durch die Wahl von statisch zulässigen Kräfte- oder Spannungszuständen, eingeschränkt werden.

Dabei ist die gleichzeitige Anwendung beider Strategien nicht nur theoretisch möglich, sondern sie entspricht auch der Realität bei gebauten Tragwerken.

4 Methode der Reziproken Analyse

4.1 Veranschaulichung der Methode

4.1.1 Prinzip

Die in dieser Arbeit entwickelte Methode der Reziproken Analyse, zur Bestimmung der inneren Kräfte des Tragsystems aus Kapitel 3, ist aus der in Abschnitt 2.2.2 erläuterten metaphorischen Systemeigenschaft des reziproken Tragens und Belastens der Stäbe abgeleitet. Dazu werden, ausgehend von den äusseren Einwirkungen, mittels iterativen Gleichgewichtsbetrachtungen in den Subsystemen, die inneren Kräfte des Gesamtsystems entwickelt. Im ersten Iterationsschritt dieser Betrachtungsweise sind die äusseren Kräfte des Systems jeweils einwirkend auf dasjenige Subsystem, an welchem sich ihr Angriffspunkt befindet. Durch Gleichgewichtsbetrachtungen in jedem der Subsysteme können in den jeweiligen Interaktionspunkten Reaktionskräfte bestimmt werden. Diese werden durch die Knoten an die entsprechenden Nachbarstäbe übertragen und sind dort die Einwirkenden des zweiten Iterationsschritts. Dieses Vorgehen wird iterativ fortgesetzt. Abbildung 74 zeigt vier Iterationsschritte der Methode, wobei zur besseren Überschaubarkeit in diesem Beispiel lediglich eine einzige äussere einwirkende Kraft angreift. Das Vorgehen ist bei mehreren äusseren Einwirkenden identisch, wobei innerhalb eines Iterationsschritts an entsprechend mehreren Stäben das Gleichgewicht zu formulieren ist.

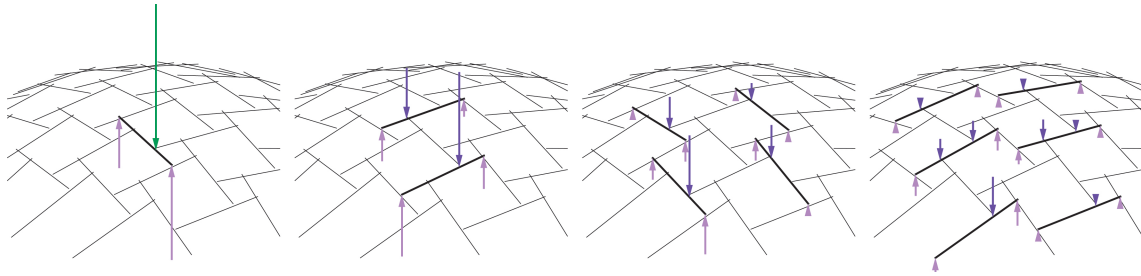


Abb. 74: Vier Iterationsschritte der Methode der Reziproken Analyse, von einer äusseren Kraft ausgehend.

Die während eines Iterationsschritts $i \geq 0$ an einem Interaktionspunkt P_k auftretenden Kräfte und Momente sind virtuelle Grössen und werden als partielle Interaktionsgrössen $\mathbf{f}_{p,k,i}$ und $\mathbf{m}_{p,k,i}$ bezeichnet, wobei diese sich wie folgt aus partiellen Einwirkenden $\mathbf{f}_{pa,k,i}$, $\mathbf{m}_{pa,k,i}$ und partiellen Reaktionsgrössen $\mathbf{f}_{pr,k,i}$, $\mathbf{m}_{pr,k,i}$ zusammensetzen:

$$\mathbf{f}_{p,k,i} = \mathbf{f}_{pa,k,i} + \mathbf{f}_{pr,k,i}, \quad \mathbf{m}_{p,k,i} = \mathbf{m}_{pa,k,i} + \mathbf{m}_{pr,k,i}. \quad (5)$$

Diese virtuellen Grössen erfüllen in jedem Iterationsschritt der Reziproken Analyse die lokalen Gleichgewichtsbedingungen in den Subsystemen. Es ist zu bemerken, dass die reellen inneren Kräfte $\mathbf{f}_{c,k}$ und $\mathbf{m}_{c,k}$ (vgl. Abschnitt 3.5), welche zusammen mit den äusseren Einwirkenden und den Auflagergrössen des Tragsystems die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, gewonnen werden können, indem an jedem Interaktionspunkt die Summe der dort auftretenden partiellen Interaktionsgrössen aus allen Iterationsschritten, unter Bedingung der Existenz eines Grenzwertes für $i \rightarrow \infty$, wie folgt gebildet wird:

$$\mathbf{f}_{c,k} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{f}_{p,k,i}, \quad \mathbf{m}_{c,k} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{m}_{p,k,i}. \quad (6)$$

Das Beispiel in Abbildung 74 stellt dies anschaulich dar. In diesem Fall liegt die Annahme zugrunde, dass die Wirkungslinien aller Kräfte die gleiche Richtung haben. Dann weist jede partielle Reaktionskraft eines Iterationsschritts nach dem Gesetz des Gleichgewichts betragsmässig einen Anteil < 1 der partiellen Einwirkenden auf, wodurch die betrachteten Kräfte mit jedem Iterationsschritt kleiner werden und gegen Null streben. Im Sonderfall der getroffenen Annahme ist die Existenz eines Grenzwertes für die inneren Kräfte offensichtlich. Die Bedingungen für diese Existenz im allgemeinen Fall werden weiter unten und im folgenden Kapitel 5 aufgezeigt.

Da ein Auflager, wie in Abschnitt 3.3.2 beschrieben, die Reziprozität des Tragsystems unterbricht, da es das Ende des Zyklus einer offenen Verbindung darstellt, kann eine partielle Reaktionsgrösse, die dort in einen Iterationsschritt $i = j$ auftritt, im darauffolgenden Schritt $i = j + 1$ nicht mehr als partielle Einwirkende eines Subsystems auftreten und ist demnach für $i > j$ aus den Gleichgewichtsbetrachtungen des Tragsystems absorbiert.

4.1.2 Einfaches Beispiel

Als Einführung wird die Methode der Reziproken Analyse in diesem Abschnitt am einfachen Beispiel eines ebenen Grundsystems unter einer lotrechten äusseren Kraft algebraisch aufgezeigt. Für den allgemeinen Fall des Tragsystems erfolgt dies ab Abschnitt 4.2. Das im Rahmen des einfachen Beispiels betrachtete System besteht aus $m = 3$ Stäben, welche alle die gleiche Länge l besitzen und bei denen der Abstand a gleich ist. Im Sinne des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie werden die Subsysteme der Stäbe als statisch bestimmt gelagerte einfache Balken angenommen. Damit sind in diesem Fall, aufgrund der lotrechten äusseren Kraft, die Wirkungslinien aller betrachteten Kräfte ebenfalls senkrecht zur Systemebene. Abbildung 75a zeigt das System unter der äusseren Kraft, Abbildung 75b die drei ersten Iterationsschritte der Reziproken Analyse.

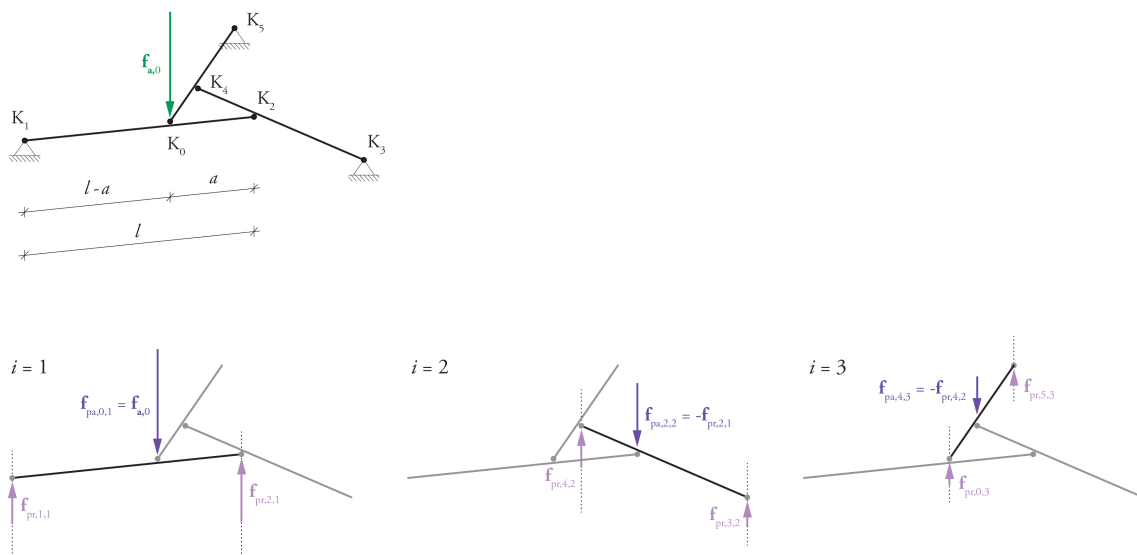


Abb. 75: a) oben: Tragsystem des Anschauungsbeispiels unter lotrechter äusserer Kraft $f_{a,0}$; b) unten: Die ersten drei Iterationsschritte der Reziproken Analyse mit den partiellen Einwirkenden $f_{pa,k,i}$ und partiellen Reaktionsgrössen $f_{pr,k,i}$ im jeweiligen Subsystem.

In diesem einfachen Beispiel ist es ausreichend, nur die Interaktionsgrössen an den Knoten K_k des Systems, mit $\{k \mid 0 \leq k < 2n\}$, zu betrachten. Auf eine Betrachtung der Interaktionspunkte kann verzichtet werden. Es lassen sich auf Basis der Gleichgewichtsbedingungen folgende Beziehungen für die partiellen Einwirkenden $f_{pa,k,i}$ und partiellen Reaktionsgrössen $f_{pr,k,i}$ in den Subsystemen der Stäbe zum jeweiligen Iterationsschritt i formulieren. In diesem Beispiel werden vereinfachend nur die Beträge $f_{pa,k,i} = |f_{pa,k,i}|$ und $f_{pr,k,i} = |f_{pr,k,i}|$ betrachtet, da alle Kraftvektoren dieselbe Richtung aufweisen.

Iterationsschritt	partielle Reaktionskräfte aus Gleichgewicht	
$i = 1$	$f_{pr,1,1} = \frac{a}{l} \cdot f_{a,0}$	$f_{pr,2,1} = \frac{l-a}{l} \cdot f_{a,0}$
$i = 2$	$f_{pr,3,2} = \frac{a}{l} \cdot f_{pa,2,2}$	$f_{pr,4,2} = \frac{l-a}{l} \cdot f_{pa,2,2}$
$i = 3$	$f_{pr,5,3} = \frac{a}{l} \cdot f_{pa,4,3}$	$f_{pr,0,3} = \frac{l-a}{l} \cdot f_{pa,4,3}$
$i = 4$	$f_{pr,1,4} = \frac{a}{l} \cdot f_{pa,0,4}$	$f_{pr,2,4} = \frac{l-a}{l} \cdot f_{pa,0,4}$
	...	

Hierbei steht der Iterationsschritt $i = 0$ für den Ausgangszustand, der mit $\mathbf{f}_{a,0}$ die einwirkende äussere Kraft des Systems enthält. Eine derartige Betrachtung kann für alle $\mathbf{f}_{a,k}$ durchgeführt werden, falls in anderen Knotenpunkten des Systems ebenfalls äussere Kräfte vorhanden sind. Aufgrund des Gleichgewichts am Knoten gilt $f_{pa,2,i+1} = f_{pr,2,i}$, $f_{pa,4,i+1} = f_{pr,4,i}$ und $f_{pa,0,i+1} = f_{pr,0,i}$ (vgl. Abb. 75). Damit lässt sich ein Iterationsschritt für das gesamte System wie folgt in rekursiver Schreibweise formulieren:

$$\begin{aligned} f_{pr,0,i+1} &= \frac{l-a}{l} \cdot f_{pr,4,i}, \\ f_{pr,1,i+1} &= \frac{a}{l} \cdot f_{0,i}, \\ f_{pr,2,i+1} &= \frac{l-a}{l} \cdot f_{0,i}, \\ f_{pr,3,i+1} &= \frac{a}{l} \cdot f_{2,i}, \\ f_{pr,4,i+1} &= \frac{l-a}{l} \cdot f_{2,i}, \\ f_{pr,5,i+1} &= \frac{a}{l} \cdot f_{4,i}. \end{aligned}$$

Die Art und Weise dieser Beschreibung ähnelt derer von stochastischen Modellen. Ein verbreitetes ist hierbei die Markov-Kette als einfachstes mathematisches Modell zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von stochastischen Phänomenen [80]. Damit können auf einfache Weise Wahrscheinlichkeiten in multipel abhängigen Systemen beschrieben werden. Eine weitere Anwendung der Markov-Kette ist beispielsweise die Simulation von Populationsentwicklungen in komplexen Systemen [39]. Die folgende Abbildung 76 zeigt die Entwicklung der partiellen Interaktionskräfte des Beispielsystems aus Abbildung 75 als Diagramm einer Markov-Kette gemäss [10].

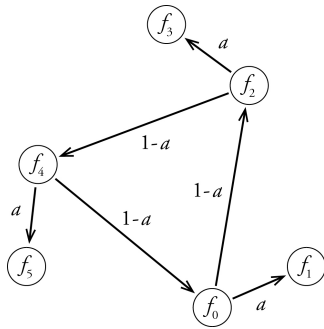


Abb. 76: Darstellung einer Entwicklung der partiellen Interaktionskräfte des Beispielsystems aus Abbildung 75 als Diagramm einer Markov-Kette.

Diejenigen Elemente des Diagramms, von welchen keine Pfeile wegweisen, repräsentieren die Auflager des Systems und zeigen die dortige, in Abschnitt 4.1.1 erwähnte, Absorption der Kräfte aus der Iteration der methodischen Betrachtung.

Der oben aufgezeigte Iterationsschritt des Beispiels lässt sich gemäss eines Systems linearer Rekursion [85] wie folgt in Matrizennotation beschreiben:

$$\mathbf{F}_{i+1} = \mathbf{B}\mathbf{F}_i, \quad (7)$$

mit

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (l-a)/l & 0 \\ a/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (l-a)/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a/l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (l-a)/l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a/l & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \quad \mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} f_{pr,0,i} \\ f_{pr,1,i} \\ f_{pr,2,i} \\ f_{pr,3,i} \\ f_{pr,4,i} \\ f_{pr,5,i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 1}.$$

Die Matrix \mathbf{B} wird hier in Analogie zur Beschreibung von Markov-Ketten als Übergangsmatrix bezeichnet. Sie beschreibt die Abhängigkeit der partiellen Interaktionsgrößen zwischen zwei aufeinander folgenden Iterationsschritten. \mathbf{F}_i wird Zustandsvektor der partiellen Interaktionsgrößen genannt und beschreibt diese im Iterationsschritt i . Die rekursiv formulierte Gleichung (7) lässt sich wie folgt absolut beschreiben:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{B}^i \mathbf{F}_0. \quad (8)$$

Dabei beschreibt der Vektor \mathbf{F}_0 den Initialzustand der Reziproken Analyse, und umfasst die Gesamtheit der äusseren Einwirkungen. Es ist, wie bereits erwähnt, zu beobachten, dass die Beträge der virtuellen partiellen Interaktionsgrößen mit jedem Iterationsschritt kleiner werden und gegen null streben. Wenn durch den Vektor \mathbf{F} die Gesamtheit aller reell im System wirkenden inneren Kräfte resp. Interaktionsgrößen beschrieben wird, resultieren diese aus der Summe der partiellen Interaktionsgrößen aus allen Iterationsschritten (vgl. Abschnitt 4.1.1). Damit gilt für $\{i \mid i \rightarrow \infty\}$:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{F}_i = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{B}^i \right) \mathbf{F}_0. \quad (9)$$

Unter Bedingung der Existenz des Grenzwerts \mathbf{F} in Gleichung (9) sind die inneren Kräfte des Systems definiert, und lassen sich gemäss der Grenzwertbetrachtung einer Neumannschen Reihe [83] als Lösungsgleichung der Reziproken Analyse wie folgt formulieren:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \mathbf{F}_0, \quad (10)$$

mit

$$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \text{ als Identitätsmatrix.}$$

Der Grenzwert einer derartigen Neumannschen Reihe (9) existiert genau dann, wenn die Bedingungen $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ erfüllt ist [83]. Aufgrund des konstanten Initialzustands \mathbf{F}_0 , ist durch Gleichung (8) die Grenzwertbedingung gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{B}^i = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Der Nachweis für die Gültigkeit der Konvergenzbedingung (11), sowie die Voraussetzungen für die Existenz eines Grenzwerts werden in Kapitel 5 aufgezeigt. Für das Beispiel aus Abbildung 75 zeigen die folgenden Diagramme, in Abhängigkeit eines Iterationsschritts $i = j$, die Komponenten einerseits des Zustandsvektors \mathbf{F}_i (vgl. Abb. 77a) und andererseits deren Summe $\sum_{i=0}^j \mathbf{F}_i$ (vgl. Abb. 77b). Dabei wurden $|\mathbf{f}_{a,0}| = 100 \text{ kN}$ und $a = 0.4 \cdot l$ angenommen.

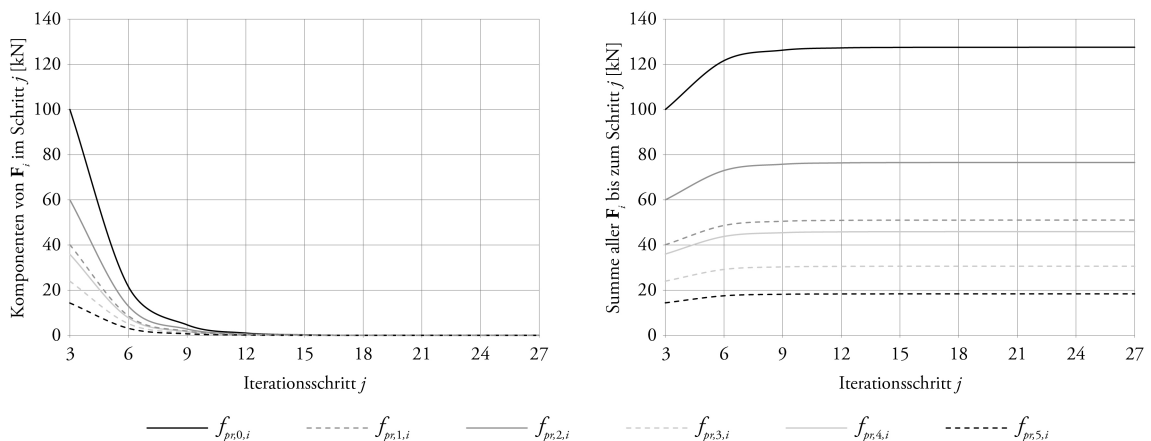


Abb. 77: a) links: Komponenten des Zustandsvektors \mathbf{F}_i im Iterationsschritt $i = j$; b) rechts: Summe der Komponenten des Zustandsvektors $\sum_{i=0}^j \mathbf{F}_i$.

Die Diagramme in Abbildung 77 zeigen, dass die Beträge der partiellen Interaktionskräfte $f_{pr,k,i}$ bereits nach wenigen Iterationsschritten dem Grenzwert 0 sehr nahe kommen und sich demnach die Summen den Beträgen der inneren Kräfte stark angenähert haben. Allgemein ist die Geschwindigkeit der Konvergenz stark abhängig vom System.

Da die Lösungsgleichung der Reziproken Analyse (10) in diesem Fall die Superposition von partiellen Reaktionskräften $\mathbf{f}_{pr,k,i}$ an den Endinteraktionspunkten der Stäbe darstellt, liefert das Ergebnis demnach als innere Kräfte des Tragsystems ebenfalls die Endinteraktionskräfte $\mathbf{f}_{c,k}$ der Subsysteme (vgl. Abb. 78a). Die Kräfte an den inneren Interaktionspunkten können aus der Gleichgewichtsbedingung am jeweils anschließenden Knoten ermittelt werden (vgl. Abb. 78b).

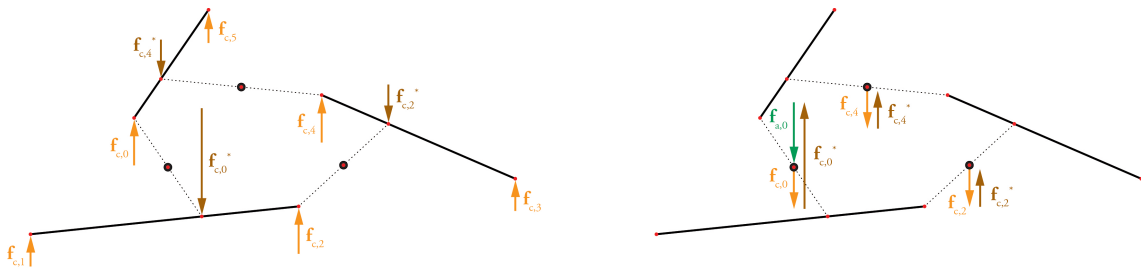


Abb. 78: a) links: Endinteraktionskräfte (orange) an den Stäben als Ergebnis der Reziproken Analyse; b) rechts: Innere Interaktionskräfte (braun) aus Gleichgewicht am anschließenden Knoten.

Das in diesem Abschnitt gezeigte Beispiel erläutert die Methode der Reziproken Analyse für ein einfaches, ebenes System unter lotrechter Belastung sowie der Annahme bezüglich der Stäbe als statisch bestimmt gelagerte Einfeldträger. Der Allgemeinfall eines räumlichen Systems unter beliebiger Last wird in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels aufgezeigt.

4.2 Stabgleichgewicht

Das grundlegende Prinzip der Reziproken Analyse ist, wie in den beiden vorangegangenen Abschnitten 4.1.1 und 4.1.2 gezeigt, die iterative Entwicklung der inneren Kräfte $\mathbf{f}_{c,k}$ und $\mathbf{m}_{c,k}$ des Tragsystems als Grenzwert der Summe der partiellen Interaktionsgrößen $\mathbf{f}_{p,k,i}$ und $\mathbf{m}_{p,k,i}$ aller Schritte $\{i \mid i \rightarrow \infty\}$. Eine zentrale Rolle spielt die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen für das Subsystem Stab, womit in jedem Iterationsschritt aus den partiellen Einwirkenden $\mathbf{f}_{pa,k,i}$ und $\mathbf{m}_{pa,k,i}$ die partiellen Reaktionsgrößen $\mathbf{f}_{pr,k,i}$ und $\mathbf{m}_{pr,k,i}$ ermittelt werden.

4.2.1 Gleichgewichtsbedingungen

Prinzipiell können in jedem Interaktionspunkt des Subsystems Stab partielle Einwirkende und partielle Reaktionsgrößen auftreten (vgl. Abb. 79).

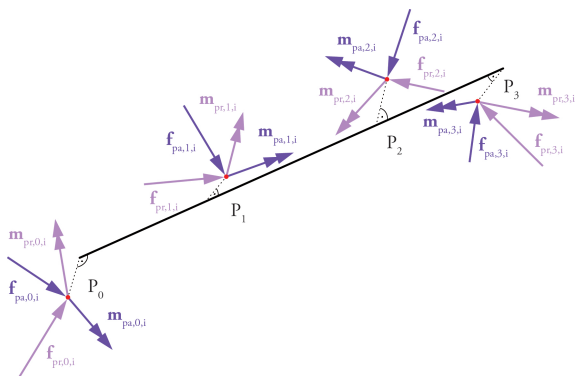


Abb. 79: Gesamtheit der partiellen Interaktionsgrößen an einem Stab des Tragsystems im Iterationsschritt i .

Das Gleichgewicht des Subsystems Stab im Iterationsschritt i ist erfüllt, wenn unter Berücksichtigung aller partiellen Interaktionsgrößen $\mathbf{f}_{p,k,i}$ und $\mathbf{m}_{p,k,i}$ die in Abschnitt 2.2 angeführten Bedingungen für das Gleichgewicht der Kräfte (2) und der Momente (3) erfüllt sind. Diese lassen sich für einen Stab des Tragsystems im Iterationsschritt i , bezüglich eines beliebigen Punkts B mit $\mathbf{p}_k = \overrightarrow{BP_k}$, wie folgt formulieren:

$$\sum \mathbf{f} = \mathbf{0} \iff \sum_{k=0}^3 \mathbf{f}_{pa,k,i} + \sum_{k=0}^3 \mathbf{f}_{pr,k,i} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

$$\sum \mathbf{m}_B = \mathbf{0} \iff \sum_{k=0}^3 (\mathbf{p}_k \times \mathbf{f}_{pa,k,i} + \mathbf{m}_{pa,k,i}) + \sum_{k=0}^3 (\mathbf{p}_k \times \mathbf{f}_{pr,k,i} + \mathbf{m}_{pr,k,i}) = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Das Gleichungssystem (12) und (13) umfasst mit $\mathbf{f}_{pr,k,i}$ und $\mathbf{m}_{pr,k,i}$ insgesamt 8 unbekannte Vektoren von partiellen Reaktionsgrößen. Dies entspricht im Euklidischen Anschauungsraum \mathbb{R}^3 24 unbekanntenen Komponenten. Davon sind 6 durch die Lösung des Gleichungssystems bestimmbar, die 18 weiteren stellen die Freiheitsgrade des Subsystems dar. Diese werden in der Methode der Reziproken Analyse durch geeignete Festlegungen eliminiert, da die Methode eine Gleichgewichtslösung nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie sucht. Die dazu erforderlichen Annahmen werden hier durch die Definition von Erzeugenden für die partiellen Reaktionskräfte und -momente getroffen, was im folgenden Abschnitt 4.2.2 detailliert erläutert wird.

4.2.2 Erzeugende von Kräften und Momenten

Im Allgemeinen wirken die Kräfte und Momente im Euklidische Anschauungsraum \mathbb{R}^3 und sind bezüglich Betrag und Richtung definiert durch Vektoren $\mathbf{f}, \mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$. Beide lassen sich durch Linearkombinationen von Erzeugenden darstellen. Dies bedeutet im Fall einer partiellen Reaktionskraft und eines partiellen Reaktionsmoments im Punkt P_k eines Stabs Folgendes, wobei hier die sinnvolle Annahme getroffen wird, dass die Erzeugenden jeder partiellen Interaktionsgröße innerhalb der Iteration konstant bleiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{pr,k,i} &= f_{pr,k,i,1} \cdot \mathbf{e}_{f,k,1} + f_{pr,k,i,2} \cdot \mathbf{e}_{f,k,2} + f_{pr,k,i,3} \cdot \mathbf{e}_{f,k,3}, \\ \mathbf{m}_{pr,k,i} &= m_{pr,k,i,1} \cdot \mathbf{e}_{m,k,1} + m_{pr,k,i,2} \cdot \mathbf{e}_{m,k,2} + m_{pr,k,i,3} \cdot \mathbf{e}_{m,k,3}. \end{aligned}$$

Die Erzeugenden $\{\mathbf{e}_{f,k,1}, \mathbf{e}_{f,k,2}, \mathbf{e}_{f,k,3}\}$ und $\{\mathbf{e}_{m,k,1}, \mathbf{e}_{m,k,2}, \mathbf{e}_{m,k,3}\}$ umfassen in diesem Fall je drei linear unabhängige Vektoren. Durch eine entsprechende Wertzuweisung der jeweils drei skalaren Koeffizienten $\{f_{pr,k,i,1}, f_{pr,k,i,2}, f_{pr,k,i,3}\}$ und $\{m_{pr,k,i,1}, m_{pr,k,i,2}, m_{pr,k,i,3}\}$ sind für die beiden partiellen Reaktionsgrößen beliebige Vektoren aus \mathbb{R}^3 möglich. Durch eine derartige Beschreibung ist die Wirkung von $\mathbf{f}_{pr,k,i}$ und $\mathbf{m}_{pr,k,i}$ auf den Raum beschränkt. Werden diese Vektoren in die Gleichgewichtsbedingungen (12) und (13) eingesetzt, so weist jeder der beiden drei definierte Erzeugende und drei unbekannte Koeffizienten auf. Die Reduktion der Unbekannten wird hier durch die Einschränkung der Wirkung der partiellen Reaktionsgrößen erzielt. Dabei führt die Einschränkung von $\mathbf{f}_{pr,k,i}$ sowie $\mathbf{m}_{pr,k,i}$ auf eine Wirkungsebene, und wie im Folgenden gezeigt, zu einer Reduktion auf jeweils zwei Unbekannte:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{pr,k,i} &= f_{pr,k,i,1} \cdot \mathbf{e}_{f,k,1} + f_{pr,k,i,2} \cdot \mathbf{e}_{f,k,2}, \\ \mathbf{m}_{pr,k,i} &= m_{pr,k,i,1} \cdot \mathbf{e}_{m,k,1} + m_{pr,k,i,2} \cdot \mathbf{e}_{m,k,2}. \end{aligned}$$

Eine Einschränkung auf eine Wirkungsgerade führt demnach, wie folgt, zu einer Reduktion auf jeweils einen unbekanntenen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{pr,k,i} &= f_{pr,k,i,1} \cdot \mathbf{e}_{f,k,1}, \\ \mathbf{m}_{pr,k,i} &= m_{pr,k,i,1} \cdot \mathbf{e}_{m,k,1}. \end{aligned}$$

Die Erzeugenden der partiellen Reaktionsgrößen in den Subsystemen sind so anzunehmen, dass genau sechs unbekannte Koeffizienten in den Gleichgewichtsbedingungen jedes Stabs verbleiben. Abbildung 80a zeigt beispielhaft eine solche Annahme. Hierbei wurden ausschliesslich Erzeugende für partielle Reaktionskräfte gewählt, was bedeutet, dass in den Interaktionspunkten keine Momente aufgenommen werden können. In bestimmten Fällen ist es möglich, dass sinnvolle Annahmen zu einer Wahl von mehr als sechs Erzeugenden führen. Hierbei resultiert jedoch nur aus der Einführung von abhängigen Erzeugenden eine eindeutige Lösung, was ebenfalls eine Annahme im Rahmen des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie bedeutet. Dadurch können zwar mehr als sechs Erzeugende in einem Subsystem auftreten, die Anzahl von unbekanntem Koeffizienten ist jedoch genau sechs. Anwendungsfälle von abhängigen Erzeugenden werden insbesondere bei den partiellen Reaktionsmomenten auftreten. Hierfür dürfen in den Gleichgewichtsbedingungen nur maximal drei unbekannte Koeffizienten verbleiben, da diese lediglich aus den drei Gleichungen des Momentengleichgewichts (13) ermittelt werden können. Würden beispielsweise für beide Endinteraktionspunkte je zwei Erzeugende angenommen, die jeweils die Wirkung des Moments auf eine Ebene beschränken, so besäße das Subsystem bereits vier Erzeugende für Momente. Ein anderes, vergleichbares Beispiel einer Annahme ist in Abbildung 80b dargestellt, welche insgesamt sieben Erzeugende aufweist. Davon definieren zwei an den Stabenden jeweils eine Wirkungsgerade eines Torsionsmoments. Wenn diese in den Gleichgewichtsbedingungen durch $m_{pr,1,i,1} \cdot \mathbf{e}_{m,1,1}$ und $m_{pr,1,i,1} \cdot \mathbf{e}_{m,3,1}$ mit dem selben Koeffizienten versehen werden, resultiert daraus eine Abhängigkeit der beiden, wodurch die Zahl der Unbekannten auf sechs reduziert sind.

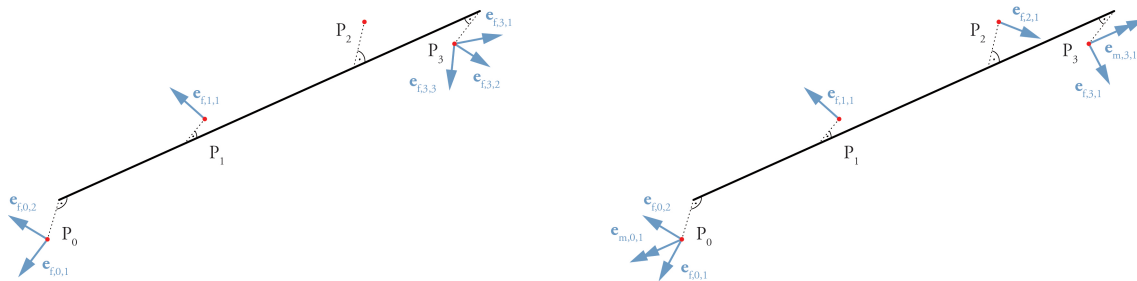


Abb. 80: a) links: Subsystem mit sechs unabhängigen Erzeugenden für partielle Reaktionskräfte; b) rechts: Subsystem mit zwei abhängigen Erzeugenden für ein partielles Reaktionsmoment und fünf unabhängigen für Reaktionskräfte.

Das in Abschnitt 1.5 definierte Ziel ist die Entwicklung einer Methode, die auf dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie basiert. Deshalb sind die sinnvollen Annahmen der Erzeugenden eine essentielle Massnahme der Methode der Reziproken Analyse, um die inneren Kräfte des Tragsystems durch die Gleichgewichtsbedingungen zu ermitteln. Bezüglich der Annahmen, welche für die Eigenschaften der Erzeugenden getroffen werden können, lassen sich kombinatorische und parametrische wie folgt unterscheiden.

Kombinatorische Eigenschaften:

Anzahl von Erzeugenden in den Interaktionspunkten des Stabs. Dies bedeutet die Festlegung ob dort jeweils partielle Reaktionskräfte und/oder -momente auftreten, sowie jeweils deren Definition von Wirkungsraum, Wirkungsebene oder Wirkungsgerade.

Parametrische Eigenschaften:

Richtungen der Erzeugenden und eventuelle Definitionen von Abhängigkeiten.

Auf die Konsequenzen der Annahmen wird bezüglich beider Eigenschaften in den Kapiteln 5 und 6 detailliert eingegangen.

4.2.3 Reduktion der partiellen Einwirkenden

Wie in Abbildung 79 dargestellt, können in jedem Interaktionspunkt eines Stabs als partielle Einwirkenden und als partielle Reaktionsgrößen jeweils eine Kraft und ein Moment auftreten. Für die algebraische Formulierung der Methode analog zu Abschnitt 4.1.2 ist es notwendig, diese Paare aus einem Kraft- und einem Momentenvektor zu einer Grösse zusammenzufassen. Dazu wird hier die Dynamik verwendet, die das Reduktionsobjekt einer Menge von Kräften und Momenten darstellt [25].

Die Dynamik der partiellen Einwirkenden in einem Interaktionspunkt P_k des Stabs im Iterationsschritt i ist demnach wie folgt definiert:

$$\mathbf{d}_{pa,k,i} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{pa,k,i} \\ \mathbf{m}_{pa,k,i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}.$$

Für die Betrachtung des Gleichgewichts an einem Stab müssen die Dynamiken der partiellen Einwirkenden von den vier Interaktionspunkten in einen gemeinsamen Bezugspunkt B verschoben werden. Mit dem Vektor $\mathbf{p}_k = \overrightarrow{BP_k}$, der vom Bezugspunkt auf den jeweiligen Interaktionspunkt weist, gilt für die verschobene Dynamik:

$$\mathbf{d}_{B,pa,k,i} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{pa,k,i} \\ (\mathbf{p}_k \times \mathbf{f}_{pa,k,i}) + \mathbf{m}_{pa,k,i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}.$$

Um die Verschiebung der Dynamik mit Matrizen beschreiben zu können, wird das Kreuzprodukt des Versatzmoments wie folgt formuliert:

$$\mathbf{p}_k \times \mathbf{f}_{pa,k,i} = [\mathbf{p}_k]_x \mathbf{f}_{pa,k,i},$$

mit

$$[\mathbf{p}_k]_x = \begin{pmatrix} 0 & -p_{k,z} & p_{k,y} \\ p_{k,z} & 0 & -p_{k,x} \\ -p_{k,y} & p_{k,x} & 0 \end{pmatrix} \text{ als Kreuzproduktmatrix für } \mathbf{p}_k \text{ in } \mathbb{R}^3.$$

Die Verschiebung der Dynamik der partiellen Einwirkenden eines Interaktionspunkt des Stabs in einen Bezugspunkt B kann somit folgendermassen beschrieben werden:

$$\mathbf{d}_{B,pa,k,i} = \mathbf{T}_{B,k} \mathbf{d}_{pa,k,i},$$

mit

$$\mathbf{T}_{B,k} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O}_3 \\ [\mathbf{p}_k]_x & \mathbf{I} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \text{ als Transformationsmatrix,}$$

$$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ als Identitätsmatrix,}$$

$$\mathbf{O}_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ als Nullmatrix.}$$

Damit formuliert sich für das Subsystem des Stabs s im Iterationsschritt i die Reduktion aller partiellen Einwirkenden in einem Bezugspunkt B als Verschiebung und Addition wie folgt:

$$\mathbf{d}_{B,pa,s,i} = \mathbf{T}_s \mathbf{D}_{pa,s,i}, \tag{14}$$

mit

$\mathbf{d}_{B,pa,s,i} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ als Reduktion aller partiellen Einwirkenden des Stabs s im Bezugspunkt B ,

$$\mathbf{T}_s = (\mathbf{T}_{B,0} \quad \mathbf{T}_{B,1} \quad \mathbf{T}_{B,2} \quad \mathbf{T}_{B,3}) \in \mathbb{R}^{6 \times 24} \text{ als Transformationsmatrix des Stabs } s,$$

$$\mathbf{D}_{pa,s,i} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{pa,0,i} \\ \mathbf{d}_{pa,1,i} \\ \mathbf{d}_{pa,2,i} \\ \mathbf{d}_{pa,3,i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{24 \times 1} \text{ als Dynamik aller partiellen Einwirkenden des Stabs } s.$$

4.2.4 Reduktion der partiellen Reaktionsgrößen

In gleicher Art und Weise wie die partiellen Einwirkenden in den Interaktionspunkten des Stabs zusammenfassend durch $\mathbf{D}_{pa,s,i}$ beschrieben sind, werden auch die dort auftretenden partiellen Reaktionsgrößen durch $\mathbf{D}_{pr,s,i}$ zusammengefasst. Da letztere durch entsprechende Erzeugende beschrieben werden, formuliert sich die Dynamik aus diesen Erzeugenden und den unbekanntem Koeffizienten folgendermassen:

$$\mathbf{D}_{pr,s,i} = \mathbf{E}_s \mathbf{x}_i, \quad (15)$$

mit

$\mathbf{D}_{pr,s,i} \in \mathbb{R}^{24 \times 1}$ als Dynamik der partiellen Reaktionsgrößen des Stabs s ,

$\mathbf{E}_s \in \mathbb{R}^{24 \times 6}$ als Matrix der angenommenen Erzeugenden des Stabs s ,

$\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ als Vektor der unbekanntem Koeffizienten im Iterationsschritt i .

Die Matrix der Erzeugenden eines Stabs \mathbf{E}_s umfasst sechs Spalten, da das Gleichungssystem sechs unbekanntem Koeffizienten aufweisen muss, und 24 Zeilen, da ein Stab acht Vektoren aus \mathbb{R}^3 als partielle Reaktionskräfte und -momente aufweisen kann (vgl. Abb. 79). Die folgende Abbildung 81 zeigt ein Template von \mathbf{E}_s , das je nach Annahme der Erzeugenden entsprechend zu füllen ist.

		1.	2.	3.	4.	5.	6.
Punkt P_0	Erz. Kraft	[]	[]	[]	[]	[]	[]
	Erz. Moment	[]	[]	[]	[]	[]	[]
Punkt P_1	Erz. Kraft	[]	[]	[]	[]	[]	[]
	Erz. Moment	[]	[]	[]	[]	[]	[]
Punkt P_2	Erz. Kraft	[]	[]	[]	[]	[]	[]
	Erz. Moment	[]	[]	[]	[]	[]	[]
Punkt P_3	Erz. Kraft	[]	[]	[]	[]	[]	[]
	Erz. Moment	[]	[]	[]	[]	[]	[]

Abb. 81: Template der Erzeugendenmatrix \mathbf{E}_s eines Stabs s .

Im Folgenden sind die Matrizen \mathbf{E}_s beispielhaft für die in Abbildung 80 gezeigten Annahmen von Erzeugenden dargestellt:

$$\mathbf{E}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{f,0,1} & \mathbf{e}_{f,0,2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_{f,1,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_{f,3,1} & \mathbf{e}_{f,3,2} & \mathbf{e}_{f,3,3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{zu Abbildung 80a,}$$

$$\mathbf{E}_s = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{f,0,1} & \mathbf{e}_{f,0,2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_{m,0,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_{f,1,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_{f,2,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_{f,3,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{e}_{m,3,1} \end{pmatrix} \quad \text{zu Abbildung 80b.}$$

Bei einer Definition von sechs unabhängigen Erzeugendenvektoren im Subsystem, wie beispielsweise in Abbildung 80a, werden diese als einziger Eintrag in einer Spalte der Matrix an der entsprechenden Position des Interaktionspunkts, an dem sie angreifen, notiert. Existieren abhängige Vektoren von Erzeugenden, wie beispielsweise $\mathbf{e}_{m,0,1}$ und $\mathbf{e}_{m,3,1}$ in Abbildung 80b, so werden diese zusammen in einer Spalte der Matrix \mathbf{E}_s notiert.

Bezüglich der Gleichgewichtsbetrachtung muss für die unbekannt partiiellen Reaktionsgrößen des Subsystems ebenfalls eine Reduktion im Bezugspunkt B durchgeführt werden. Diese lässt sich, ebenfalls durch Transformationsmatrix \mathbf{T}_s des Stabs s im Iterationsschritt i , wie folgt beschreiben:

$$\mathbf{d}_{B,pr,s,i} = \mathbf{T}_s \mathbf{D}_{pr,s,i} = (\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s) \mathbf{x}_i, \quad (16)$$

mit

$$\mathbf{d}_{B,pr,s,i} \in \mathbb{R}^{6 \times 1} \quad \text{als Reduktion aller partiiellen Reaktionsgrößen des Stabs } s \text{ im Bezugspunkt B.}$$

4.2.5 Formulierung des Gleichgewichts eines Stabs

Die in Abschnitt 4.2.1 aufgezeigten Gleichgewichtsbedingungen (12) und (13) sind identisch mit den Bedingung, dass die Reduktion aller Kräfte und Momente in einem beliebigen Bezugspunkt B null ist. Mit den in Abschnitt 4.2.3 und 4.2.4 hergeleiteten Beschreibungen der Reduktion partieller Einwirkenden und Reaktionsgrößen lässt sich die Gleichgewichtsbedingung für das Subsystem Stab s im Iterationsschritt i der Reziproken Analyse folgendermassen formulieren:

$$\mathbf{d}_{B,pa,s,i} + \mathbf{d}_{B,pr,s,i} = \mathbf{0}. \quad (17)$$

Mit den Gleichungen (14) und (16) folgt daraus nach den unbekannt Koeffizienten aufgelöst:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_s \mathbf{D}_{pa,s,i} + (\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s) \mathbf{x}_i &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}_i &= -(\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s)^{-1} \mathbf{T}_s \mathbf{D}_{pa,s,i}. \end{aligned} \quad (18)$$

Somit lässt sich die Dynamie der partiellen Reaktionskräfte und -momente in den Interaktionspunkten des Stabs im Iterationsschritt i aus Gleichung (15) wie folgt formulieren:

$$\mathbf{D}_{pr,s,i} = -\mathbf{E}_s (\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s)^{-1} \mathbf{T}_s \mathbf{D}_{pa,s,i}. \quad (19)$$

Die Wahl der Erzeugendenvektoren in \mathbf{E}_s ist so zu treffen, dass für die durch \mathbf{T}_s beschriebene spezifische Geometrie des Stabs die Matrix $(\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s)$ invertierbar und damit das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Die Bedingungen für die Invertierbarkeit und damit für die Existenz von $(\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s)^{-1}$ werden in Kapitel 5 erörtert.

Ist die Invertierbarkeit gegeben, dann kann die Dynamik der partiellen Reaktionsgrößen $\mathbf{D}_{pr,s,i}$ des Stabs in Abhängigkeit seiner lokalen Gleichgewichtsmatrix \mathbf{G}_s folgendermassen notiert werden:

$$\mathbf{D}_{pr,s,i} = \mathbf{G}_s \mathbf{D}_{pa,s,i}, \quad (20)$$

mit

$$\mathbf{G}_s = -\mathbf{E}_s (\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s)^{-1} \mathbf{T}_s \in \mathbb{R}^{24 \times 24} \text{ als Gleichgewichtsmatrix des Stabs } s.$$

4.2.6 Formulierung des Gleichgewichts aller Stäbe

Zusammenfassend für die Gesamtheit der m Stäbe des Tragsystems lässt sich im Iterationsschritt i der Reziproken Analyse die Dynamik aller partiellen Reaktionsgrößen $\mathbf{D}_{pr,i}$ durch Einführung einer globalen Gleichgewichtsmatrix \mathbf{G} und einer Dynamik aller partiellen Einwirkenden $\mathbf{D}_{pa,i}$ wie folgt formulieren:

$$\mathbf{D}_{pr,i} = \mathbf{G} \mathbf{D}_{pa,i} \in \mathbb{R}^{24m \times 1}, \quad (21)$$

mit

$$\mathbf{D}_{pa,i} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{pa,0,i} \\ \mathbf{D}_{pa,1,i} \\ \dots \\ \mathbf{D}_{pa,m-1,i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{24m \times 1} \text{ als Dynamiken aller partiellen Einwirkenden des Tragsystems,}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}_{m-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{24m \times 24m} \text{ als Gleichgewichtsmatrix des Gesamtsystems.}$$

4.3 Verknüpfung der Stäbe

4.3.1 Allgemeiner Fall

Im Tragsystem dieser Arbeit sind Nachbarstäbe über Knoten miteinander gekoppelt, zwischen welchen in Interaktionspunkten Kräfte und Momente übertragen werden können. In der Reziproken Analyse wirken die partiellen Reaktionsgrößen im Iterationsschritt i eines Stabs im darauffolgenden Schritt $i+1$ als partielle Einwirkende in den Nachbarstäben. Diese wird in der Methode durch die Verknüpfungsmatrix \mathbf{V} folgendermassen beschrieben:

$$\mathbf{D}_{pa,i+1} = \mathbf{V} \mathbf{D}_{pr,i}, \quad (22)$$

mit

$$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{24n \times 24n} \text{ als Verknüpfungsmatrix des Gesamtsystems.}$$

Die durch \mathbf{V} erzeugte Abbildung aller partiellen Reaktionsgrößen eines Iterationsschritts auf die partiellen Einwirkenden des folgenden, entspricht einer Gleichgewichtsbetrachtung an den Subsystemen Knoten (vgl. Abb. 82). An einem Knoten greifen gemäss Systemdefinition (vgl. Abb. 73) maximal je ein Paar an Interaktionsgrößen aus den zwei anschliessenden Stäben sowie äussere Kräfte an. Da der Knoten ein zentrales Kräftesystem darstellt, resultiert daraus eine Verknüpfungsmatrix \mathbf{V} , die an den entsprechenden Stellen, welche die Verknüpfung der Stäbe markieren, $-\mathbf{I}$ aufweist und ansonsten mit $\mathbf{0}$ besetzt ist.

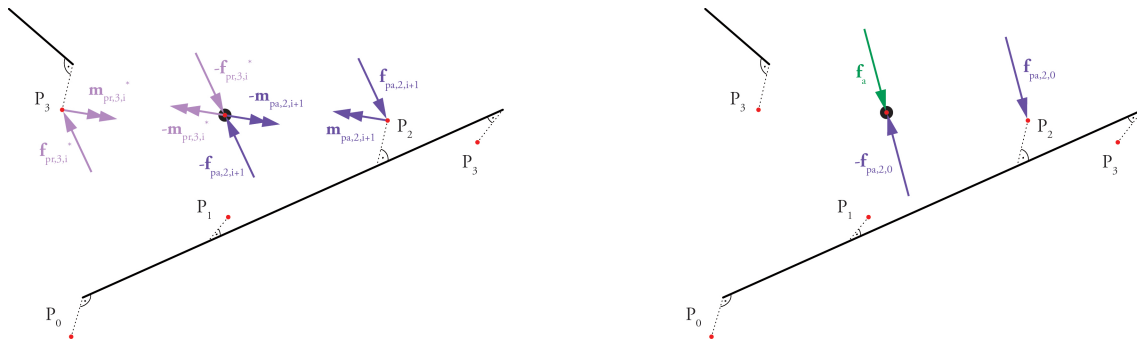


Abb. 82: Verknüpfung der Stäbe durch Gleichgewichtsbetrachtung im Subsystems Knoten. a) links: Für Iterationsschritte $i > 0$; b) rechts: Zu Iterationsbeginn $i = 0$ an einem Knoten mit äusserer Kraft.

In Abbildung 82 ist die Gleichgewichtsbetrachtung im zentralen Kräftesystem des Knotens dargestellt, wobei zwischen dem Iterationsbeginn $i = 0$ (vgl. Abb. 82b) und den darauffolgenden Iterationsschritten $i > 0$ (vgl. Abb. 82a) unterschieden wird. Aus Abbildung 82a wird ersichtlich, warum der in Abschnitt 4.1.2 beschriebene Initialzustand der Reziproken Analyse den äusseren Einwirkenden des Tragsystems entspricht.

4.3.2 Beispiel

Im einfachen Anschauungsbeispiel des 3-ständigen Grundsystems aus Abschnitt 4.1.2 ist die Gleichgewichts- und die Verknüpfungsmatrix bereits in der Übergangsmatrix \mathbf{B} zusammengefasst.

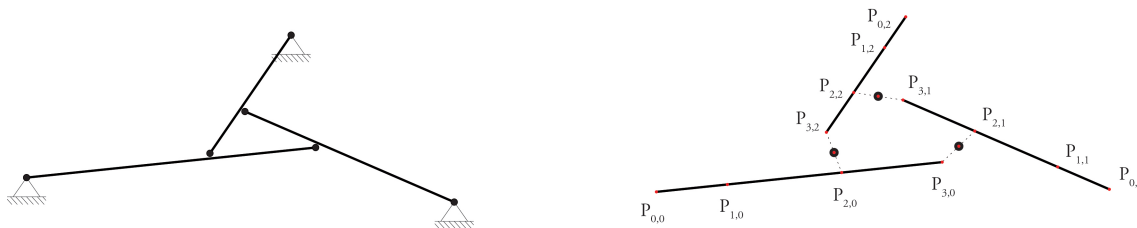


Abb. 83: a) links: Beispiel des Tragsystems als einfaches ebenes Grundsystem mit drei Stäben; b) rechts: Zerlegung in Subsysteme.

Wenn die Knoten und die Interaktionspunkte $P_{k,s}$ in einem Subsystem des Stabs s wie in Abbildung 83b dargestellt definiert sind, ergibt sich für das Beispiel die folgende Verknüpfungsmatrix, wobei zu beachten ist, dass die Knoten $P_{1,s}$ zwar in der Verknüpfungsmatrix beachtet sind, jedoch keine Bedeutung für das System haben, da sie nicht an einen Knoten anschliessen:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie in diesem Beispiel dargestellt, werden die Verknüpfungsinformationen eines Interaktionspunkts zu einer Blockmatrix zusammengefasst. Dann wird beispielsweise die Verknüpfung der Interaktionspunkte $P_{3,1}$ und $P_{2,2}$ durch $-\mathbf{I}$ in der symmetrischen Matrix \mathbf{V} an den Positionen Zeile $4 \cdot 1 + 3$, Spalte $4 \cdot 2 + 2$ und Zeile $4 \cdot 2 + 2$, Spalte $4 \cdot 1 + 3$ erzeugt. Dabei werden die erste Zeile und Spalte einer Matrix mit 0 nummeriert.

4.4 Iteration

Die Iteration der hier entwickelten Methode der Reziproken Analyse umfasst folgendes:

1. Ermittlung der partiellen Reaktionsgrößen aus den partiellen Einwirkenden eines Iterationsschritts i , für alle Stäbe mittels den durch die Gleichgewichtsmatrix \mathbf{G} beschriebenen Gleichgewichtsbedingungen.
2. Übertragung der partiellen Reaktionskräfte und -momente eines Iterationsschritts i auf die Nachbarstäbe als Einwirkende des Schritts $i + 1$, beschrieben durch die Verknüpfungsmatrix \mathbf{V} .
3. Superposition der partiellen Interaktionsgrößen aller Iterationsschritte, woraus im Falle der Existenz eines Grenzwerts die inneren Kräfte des Tragsystems resultieren.

4.4.1 Gleichgewicht und Verknüpfung

Mit den Gleichungen (21) und (22) lässt sich ein Iterationsschritt der Methode für das Gesamtsystem formulieren, welcher das Gleichgewicht der partiellen Interaktionsgrößen sowie die anschließende Verknüpfung umfasst:

$$\mathbf{D}_{pa,i+1} = \mathbf{VGD}_{pa,i}. \quad (23)$$

Diese rekursive Beziehung kann, analog zu Abschnitt 4.1.2, wie folgt absolut beschrieben werden, wobei $\mathbf{D}_a = \mathbf{D}_{pa,0}$ den Initialzustand der Reziproken Analyse beschreibt, der die Gesamtheit der äusseren Einwirkungen des Tragsystems umfasst:

$$\mathbf{D}_{pa,i} = (\mathbf{VG})^i \mathbf{D}_a. \quad (24)$$

4.4.2 Superposition mit iterativer Lösung

Innerhalb eines Iterationsschrittes i der Methode treten an jedem Interaktionspunkt der Stäbe die Dynamen sowohl der partiellen Einwirkenden $\mathbf{D}_{pa,i}$ (vgl. Abb. 84a) als auch der partiellen Reaktionsgrößen $\mathbf{D}_{pr,i}$ (vgl. Abb. 84b) auf.

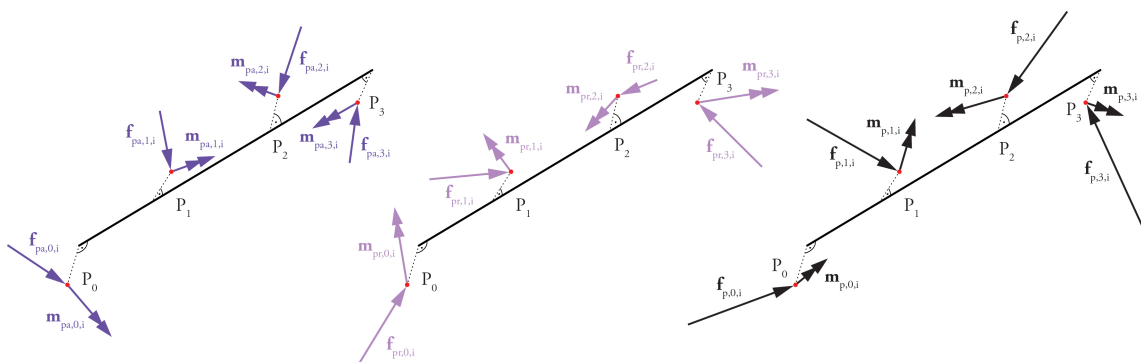


Abb. 84: a) links: Dynamen der partiellen Einwirkenden; b) mittig: Dynamen der partiellen Reaktionsgrößen; c) rechts: Dynamen der partiellen Interaktionsgrößen des lokalen Gleichgewichtszustands eines Stabs.

Werden diese zwei an jedem Interaktionspunkt addiert, resultieren daraus die Dynamen der partiellen Interaktionsgrößen $\mathbf{D}_{p,i}$ (vgl. Abb. 84c), welche die lokalen Gleichgewichtszustände der Stäbe im Iterationsschritt i beschreiben. Es gilt demnach analog zu Gleichung (5):

$$\mathbf{D}_{p,i} = \mathbf{D}_{pa,i} + \mathbf{D}_{pr,i}. \quad (25)$$

Die hier vorgestellte Methode ermittelt die inneren Kräfte aus der Superposition der partiellen Interaktionsgrößen (vgl. Abb. 84c) der Iterationsschritte $\{i \mid 0 \leq i \leq j\}$. Dies ergibt die folgende iterative Lösungsgleichung der Reziproken Analyse:

$$\mathbf{D}_j = \sum_{i=0}^j \mathbf{D}_{p,i}. \quad (26)$$

Wenn der Grenzwert $\mathbf{D} = \lim_{j \rightarrow \infty} (\mathbf{D}_j)$ existiert, so entspricht dieser den inneren Kräften resp. Interaktionsgrößen des Tragsystems einer Gleichgewichtslösung im Rahmen des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie, und es gilt:

$$\mathbf{D} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{D}_{p,i}. \quad (27)$$

Demnach beschreibt Gleichung (27) die inneren Kräfte des Tragsystems als Grenzwert aller Summen der lokalen Gleichgewichtszustände der Stäbe aus allen Iterationsschritten $\{i \mid 0 \leq i \leq \infty\}$. Die Bedingung für die Existenz des Grenzwerts ist demnach, dass alle diese Summen der partiellen Interaktionsgrößen lokaler Gleichgewichtssysteme gegen einen Zustand konvergieren, der mit den äusseren Einwirkungen des Tragsystems einen globalen Gleichgewichtszustand darstellt. Im Falle einer Ermittlung der inneren Kräfte mittels der iterativen Lösungsgleichung (26) muss die Anzahl der Iterationsschritte j so gross gewählt werden, dass eine ausreichende Annäherung an einen Grenzwert gewährleistet ist.

4.4.3 Superposition mit geschlossener Lösung

Durch die Gleichungen (21), (25) und (27) kann der Grenzwert der Reziproken Analyse wie folgt in Abhängigkeit der partiellen Einwirkenden $\mathbf{D}_{a,i}$ angegeben werden:

$$\mathbf{D} = \sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{I} + \mathbf{G}) \mathbf{D}_{pa,i}.$$

Mittels der absoluten Beschreibung von $\mathbf{D}_{pa,i}$ in Abhängigkeit der äusseren Einwirkungen \mathbf{D}_a durch Gleichung (24) gilt:

$$\mathbf{D} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{I} + \mathbf{G})(\mathbf{V}\mathbf{G})^i \right) \mathbf{D}_a. \quad (28)$$

Analog zu Abschnitt 4.1.2 existiert hier \mathbf{D} unter der Bedingung $\lim_{i \rightarrow \infty} (\mathbf{V}\mathbf{G})^i = \mathbf{0}$, und als Grenzwert einer Neumannschen Reihe lässt sich Gleichung (28) wie folgt als geschlossene Lösungsgleichung der Reziproken Analyse formulieren:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{I} + \mathbf{G})(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{G})^{-1} \mathbf{D}_a. \quad (29)$$

Die Randbedingungen für die Existenz des Grenzwertes \mathbf{D} werden im folgenden Kapitel 5 erörtert. Wenn dieser existiert, wird damit die Gesamtheit aller inneren Kräfte resp. Interaktionsgrößen des Tragsystems beschrieben. Somit kann die Matrix $(\mathbf{I} + \mathbf{G})(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{G})^{-1}$ als Gleichgewichtsmatrix des Tragsystems bezeichnet werden, mit welcher für beliebige äussere Einwirkenden \mathbf{D}_a die daraus resultierenden inneren Kräfte \mathbf{D} ermittelt werden können.

5 Diskussion der Methode

5.1 Allgemeines

In der Methode der Reziproken Analyse existieren, wie in den Abschnitten 4.4.2 und 4.4.3 gezeigt, die folgenden zwei Ansätze zur Ermittlung der inneren Kräfte in einem Tragsystem gemäss der Definition in Kapitel 3:

Mittels iterative Lösung

$$\mathbf{D}_j = \sum_{i=0}^j \mathbf{D}_{p,i},$$

mittels geschlossene Lösung

$$\mathbf{D} = (\mathbf{I} + \mathbf{G})(\mathbf{I} - \mathbf{VG})^{-1} \mathbf{D}_a.$$

Beide Lösungen stellen aufgrund der angenommenen Erzeugenden in den Subsystemen der Stäbe eine mögliche Gleichgewichtslösung im Rahmen des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie dar. Als massgebender Unterschied der beiden werden in der iterativen Lösung die inneren Kräfte in Abhängigkeit einer spezifischen Lastsituation von äusseren Einwirkungen \mathbf{D}_a ermittelt, während in der geschlossenen Lösung durch die Matrix $(\mathbf{I} + \mathbf{G})(\mathbf{I} - \mathbf{VG})^{-1}$ eine allgemein gültige Gleichgewichtsmatrix des Tragsystems entwickelt wird, mit welcher für beliebige äussere Einwirkenden eine Gleichgewichtslösung ermittelt werden kann. Dieser Unterschied, sowie Kriterien der numerischen Umsetzung können einen Einfluss auf die Entscheidung der Wahl einer Lösungsmethode haben.

Die Existenz des Grenzwerts \mathbf{D} , und damit auch die Existenz einer Gleichgewichtslösung für die inneren Kräfte des Tragsystems nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie, sind an die folgenden zwei Bedingungen geknüpft.

Lokales Gleichgewicht

In allen Subsystemen der Stäbe muss in jedem Iterationsschritt ein eindeutig bestimmter Gleichgewichtszustand von partiellen Einwirkenden und Reaktionsgrössen vorhanden sein. Dazu muss für jeden Stab die lokale Gleichgewichtsmatrix $\mathbf{G}_s = -\mathbf{E}_s(\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s)^{-1} \mathbf{T}_s$ existieren, was gleichbedeutend mit der Bedingung ist, dass für jedes $\{s \mid 0 \leq s < m\}$ die Matrix $(\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s)$ invertierbar ist.

Konvergenz der Superposition

Der iterative Ansatz liefert eine gültige Gleichgewichtslösung für das Gesamtsystem, wenn der Grenzwert $\lim_{j \rightarrow \infty} (\mathbf{D}_j)$ existiert. Der geschlossene Ansatz liefert diese, wenn $\lim_{i \rightarrow \infty} (\mathbf{VG})^i = \mathbf{0}$ existiert und damit \mathbf{D} als Grenzwert einer Neumannschen Reihe formuliert werden kann.

Die Erfüllung dieser Bedingungen hängt, wie im folgenden Abschnitt 5.2 erläutert wird, massgeblich von den angenommenen Erzeugenden in den Subsystemen der Stäbe ab. Hierfür kann, wie bereits in Abschnitt 4.2.2 erläutert, zwischen den Annahmen von kombinatorischen und parametrischen Eigenschaften der Erzeugenden unterschieden werden. Eine detailliertere Beschreibung dieser Unterscheidung folgt später in Abschnitt 5.3.

5.2 Existenz einer Gleichgewichtslösung

5.2.1 Lokales Gleichgewicht

Die lokalen Gleichgewichtsbedingungen sind erfüllt, wenn für jedes Subsystem Stab die inverse Matrix $(\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s)^{-1}$ existiert. Diese Existenz kann über die Determinante von $(\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s)$ und falls erforderlich über die Nebendeterminanten des Gleichungssystems (18) überprüft werden. In den Nebendeterminanten sind durch $\mathbf{T}_s \mathbf{D}_{pa,s,i}$ die partiellen Einwirkenden jedes Iterationsschritts i enthalten. Bei der Frage nach der Existenz der Inversen sind folgende drei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1 $\det(\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s) \neq 0$

Es existiert genau eine Lösung. Diese ist unabhängig von den partiellen Einwirkende $\mathbf{D}_{pa,s,i}$, da die Nebendeterminanten nicht beachtet werden müssen.

Fall 2 $\det(\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s) = 0$
alle Nebendeterminanten = 0

Bedingt durch die Nebendeterminanten ist das System für bestimmte partielle Einwirkende lösbar. Für jede davon existieren jedoch unendlich viele Lösungen. Dies bedeutet, dass weitere Freiheitsgrade bezüglich der Ermittlung von partiellen Reaktionsgrößen im Subsystem vorhanden sind, die durch Annahmen zu eliminieren sind.

Fall 3 $\det(\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s) = 0$
mindestens eine Nebendeterminante $\neq 0$

Es existiert keine Lösung.

Die in der Determinante enthaltene Matrix \mathbf{T}_s beschreibt die Lage der Interaktionspunkte und umfasst demnach alle im Rahmen der Reziproken Analyse relevanten geometrischen Parameter des Stabs s . Des Weiteren enthält die Matrix \mathbf{E}_s alle Erzeugenden, die für das Subsystem angenommen wurden. Dies bedeutet, dass die Existenz einer eindeutigen Lösung für die partiellen Reaktionsgrößen $\mathbf{D}_{pr,s,i}$ des Stabs aus den Gleichgewichtsbedingungen (Fall 1), von einer geeigneten Wahl der Erzeugendeneigenschaften in Relation zur spezifischen Stabgeometrie abhängt.

In den Fällen 2 und 3, mit $\det(\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s) = 0$, entscheiden die Nebendeterminanten, in welchen die partiellen Einwirkenden enthalten sind, über die Existenz möglicher partieller Reaktionsgrößen. Zur Erläuterung des Unterschieds dieser beiden Fälle bezüglich eines Stabs des Tragsystems zeigt Abbildung 85 für eine spezifische Geometrie, sowie für Annahmen von Erzeugenden, beispielhaft den Einfluss der einwirkenden Kraft $\mathbf{f}_{pa,1,i}$ auf die Existenz einer Lösung.

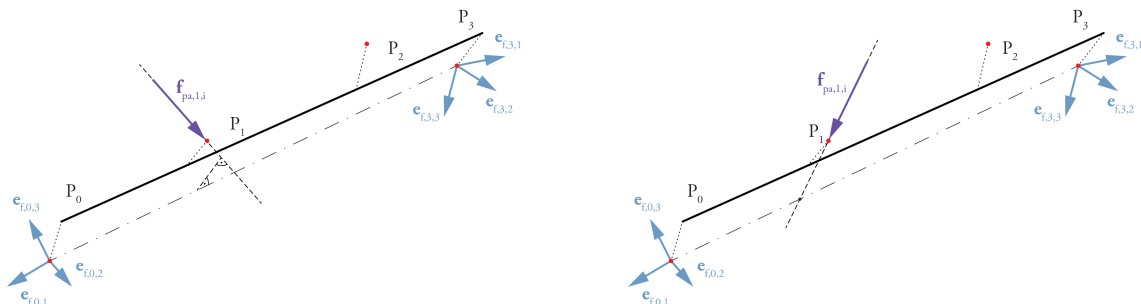


Abb. 85: Lage der Wirkungslinie der partiellen Einwirkenden $\mathbf{f}_{pa,1,i}$ in Bezug zur Verbindungsgeraden $\overline{P_0P_3}$ der Angriffspunkte der Erzeugenden für partielle Reaktionskräfte. a) links: Exzentrizität der beiden Geraden, keine Lösbarkeit durch Gleichgewicht; b) rechts: Schnittpunkt der beiden Geraden, lösbar, jedoch entsteht ein weiterer Freiheitsgrad.

In Abbildung 85a ist der oben beschriebene Fall 3 dargestellt, in welchem mindestens eine Nebendeterminante $\neq 0$ ist. Bezüglich der dargestellten Wahl der Erzeugenden besitzt das Subsystem keine Lösung, da $\mathbf{f}_{pa,1,i}$ einen Hebelarm zur Verbindungsgeraden $\overline{P_0P_3}$ der Angriffspunkte der Erzeugenden hat, und das durch die Kraft erzeugte Torsionsmoment bezüglich dieser Geraden, nicht von partiellen Reaktionskräften aufgenommen werden kann.

Abbildung 85b zeigt den beschriebenen Fall 2, in welchem alle Nebendeterminanten = 0 sind. Für diesen Spezialfall der partiellen Einwirkenden existieren partielle Reaktionsgrößen als Gleichgewichtslösung, da die Wirkungslinie von $\mathbf{f}_{pa,1,i}$ die Verbindungsgerade $\overline{P_0P_3}$ der Angriffspunkte der Erzeugenden schneidet und somit kein Torsionsmoment erzeugt. Dies trifft in diesem Beispiel für alle partiellen Einwirkenden zu, die in einer Ebene liegen, welche durch die Interaktionspunkte P_0 , P_1 und P_3 definiert wird (vgl. Abb. 86). Für derartige $\mathbf{f}_{pa,1,i}$ weisen die Bedingungen für Gleichgewicht am Stab jedoch einen weiteren Freiheitsgrad auf, der durch eine sinnvolle Annahme eliminiert werden muss, um eine eindeutige Lösbarkeit zu erreichen. In diesem Fall kann dies durch die Reduktion der Anzahl von Erzeugenden auf fünf geschehen, was der Definition der Neigung einer Reaktionskraft entspricht (vgl. Abb. 86).

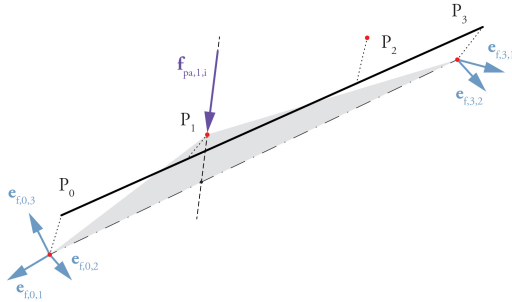


Abb. 86: Ansatz zur Lösbarkeit der Gleichgewichtsbedingungen im Beispiel des gezeigten Subsystems durch Gewährleistung, dass alle $\mathbf{f}_{a,1}$ in der grau dargestellten Ebene liegen sowie durch Eliminierung des zusätzlichen Freiheitsgrads.

Für die Ermittlung der inneren Kräfte mit der Reziproken Analyse werden für das Subsystem Stab nur solche Annahmen von Erzeugenden berücksichtigt, für die sich die Gleichgewichtsbedingungen so formulieren lassen, dass sie dem oben beschriebenen Fall 1 entsprechen, also deren Lösbarkeit unabhängig von Einwirkenden ist. Der Grund für diese Beschränkung ist, dass die Methode die Formulierung der Gleichgewichtsmatrizen für die Subsysteme der Stäbe erfordert, welche unabhängig von den partiellen Einwirkenden sein müssen, da diese im Verlauf der Iteration variieren. Theoretisch wäre auch im Rahmen der Methode die Lösbarkeit von Gleichgewichtsbedingungen möglich, welche dem oben genannten Fall 2 zuzuordnen sind, wie beispielsweise jenes aus Abbildung 85. Dazu müssten Massnahmen getroffen werden, die das mögliche Spektrum der partiellen Einwirkenden so beschränken, dass daraus in jedem Iterationsschritt für alle Nebendeterminanten = 0 resultiert. Des Weiteren wäre die Zahl der Erzeugenden so zu reduzieren, dass keine Freiheitsgrade existieren, wodurch sich der Grad des linearen Gleichungssystems der Kräfte- und Momentengleichgewichtsbedingungen ebenfalls verringert. Dieses reduzierte Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung und ist demnach dem oben aufgeführten Fall 1 zuzuordnen.

5.2.2 Konvergenz der Superposition

In der iterativen Lösung ist die Konvergenz der Superposition von den lokalen Gleichgewichtssystemen dann erfüllt, wenn ein Iterationsschritt j existiert, in welchem $\mathbf{D}_j = \sum_{i=0}^j \mathbf{D}_{p,i}$ einem Grenzwert in hinreichender Genauigkeit angenähert ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung, dass im Schritt j die Dynamik der partiellen Interaktionsgrößen aller Stäbe $\mathbf{D}_{p,i}$ mit hinreichender Genauigkeit konvergent an $\mathbf{0}$ angenähert ist. Durch die Definition dieser hinreichenden Genauigkeit $e > 0$, ist die iterative Lösung dann gefunden, wenn die Abbruchbedingung im Iterationsschritt $i = j$ wie folgt formuliert werden kann:

$$|\mathbf{D}_{p,j}| - e < 0, \quad (30)$$

mit

$|\mathbf{D}_{p,j}|$ als Betrag der Dynamen der partiellen Interaktionsgrößen im Iterationsschritt j .

Da theoretisch Fälle existieren können, in welchen trotz der Bedingung (30) keine Konvergenz vorliegt, da $|\mathbf{D}_{p,i}|$ für $i > j$ zunehmend ist, müssen die auf diese Weise ermittelten inneren Kräfte noch bezüglich des Gleichgewichts mit den äusseren Einwirkenden des Tragsystems überprüft werden. Hierfür gilt aufgrund

der definierten hinreichenden Genauigkeit $e > 0$ lediglich $\Sigma \mathbf{f} \approx \mathbf{0}$ und $\Sigma \mathbf{m}_B \approx \mathbf{0}$. Bei der iterative Lösung ist die Konvergenz der Superposition nur für die betrachteten äusseren Einwirkenden \mathbf{D}_a erfüllt, für andere muss nicht zwingend eine Gleichgewichtslösung für die inneren Kräfte existieren.

In Bezug auf die geschlossene Lösung der Reziproken Analyse kann die Konvergenz der Superposition durch die Betrachtung des Grenzwerts der Neumannschen Reihe $\mathbf{D} = (\sum_{i=0}^{\infty} (\mathbf{I} + \mathbf{G})(\mathbf{V}\mathbf{G})^i) \mathbf{D}_{a,0}$ (vgl. Abschnitt 4.4.3) beurteilt werden. Dieser Grenzwert existiert, wenn für die Matrixpotenz $\lim_{i \rightarrow \infty} (\mathbf{V}\mathbf{G})^i = \mathbf{0}$ gilt. Die Bedingungen dafür können, beispielsweise nach [36], für den Fall diagonalisierbarer Matrizen hergeleitet werden. Dazu wird die Diagonalisierung von $(\mathbf{V}\mathbf{G})$ durch die folgende Ähnlichkeitsbedingung vorgenommen:

$$\mathbf{V}\mathbf{G} = \mathbf{S}\Lambda_{VG}\mathbf{S}^{-1},$$

mit

$$\Lambda_{VG} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{24n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{24n \times 24n} \text{ als Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von } (\mathbf{V}\mathbf{G}),$$

$$\mathbf{S} = (E(\lambda_1) \quad E(\lambda_2) \quad E(\lambda_3) \quad \dots \quad E(\lambda_{24n})) \in \mathbb{R}^{24n \times 24n} \text{ als Matrix der Eigenräume von } (\mathbf{V}\mathbf{G}).$$

Da die Ähnlichkeitsbedingung auch für die Matrixpotenzen $(\mathbf{V}\mathbf{G})^i = \mathbf{S}\Lambda_{VG}^i\mathbf{S}^{-1}$ gilt, kann für $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$ der folgenden Zusammenhang festgestellt werden:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (\mathbf{V}\mathbf{G})^i = \mathbf{0} \quad \longleftrightarrow \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_{VG}^i = \mathbf{0}.$$

Die Bedingung $\lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_{VG}^i = \mathbf{0}$ ist genau dann erfüllt, wenn die Beträge aller Eigenwerte der Matrix $(\mathbf{V}\mathbf{G})$ kleiner 1 sind, resp. es gilt die Betrachtung dieser Eigenschaft für den betragsmässig grössten Eigenwert, was durch den Spektralradius der Matrix $\rho(\mathbf{V}\mathbf{G}) = \max(\lambda)$ formuliert werden kann. Die Konvergenz der Superposition der geschlossenen Lösung der Reziproken Analyse ist demnach gegeben, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\rho(\mathbf{V}\mathbf{G}) < 1.$$

Diese Aussage gilt auch für nicht-diagonalisierbare Matrizen [36], jedoch wird auf den Nachweis im Rahmen dieser Arbeit verzichtet.

5.3 Geeignete Annahmen der Eigenschaften von Erzeugenden

Ob die Bedingungen für das lokale Gleichgewicht und die Konvergenz der Superposition erfüllt sind und damit die Ermittlung der inneren Kräfte mittels Reziproker Analyse möglich ist, hängt massgeblich von den angenommenen Erzeugenden in den Subsystemen der Stäbe ab. In diesem Abschnitt werden Zusammenhänge zwischen der Erfüllung der Bedingungen und den Annahmen der Erzeugenden aufgezeigt. Diese können algebraisch nicht explizit formuliert werden, da aus den Bedingungen für die Existenz einer Gleichgewichtslösung $\det(\mathbf{T}_s \mathbf{E}_s) \neq 0$ und $|\mathbf{D}_i| - e < 0$ resp. $\rho(\mathbf{V}\mathbf{G}) < 1$, kein Wertebereich von Erzeugenden definiert werden kann, aus welchen eine Gleichgewichtslösung resultiert. Der Grund hierfür ist, dass sowohl die Determinante als auch die Grenzwertbetrachtung resp. Eigenwertberechnung nicht algebraisch umkehrbar formulierbar sind. Es kann jedoch festgestellt werden, dass bei einer gegebenen Geometrie die Existenz einer Gleichgewichtslösung, einerseits von kombinatorischen und andererseits von parametrischen Eigenschaften, bezüglich der gewählten Menge der Erzeugenden abhängt.

5.3.1 Kombinatorische Eigenschaften

Zur Erfüllung der Bedingung für lokales Gleichgewicht lassen sich, aus den Voraussetzungen für die Lösbarkeit des Linearen Gleichungssystems aus Kräfte- und Momentengleichgewicht (12) (13) in den Subsystemen der Stäbe, die folgenden drei Kriterien der kombinatorischen Eigenschaften der Erzeugenden ableiten:

1. Insgesamt sind in jedem Subsystem Stab genau sechs Erzeugende für partielle Reaktionsgrößen auf die vier Interaktionspunkte P_0, P_1, P_2 und P_3 zu verteilen.
2. Pro Subsystem dürfen maximal drei Erzeugende für partielle Reaktionsmomente vorhanden sein.
3. In jedem Interaktionspunkt P_k eines Stabs dürfen maximal drei Erzeugende für eine partielle Reaktionskraft $\mathbf{f}_{pr,k,i}$ und drei für ein partielles Reaktionsmoment $\mathbf{m}_{pr,k,i}$ angenommen werden.

In Bezug auf die Erfüllung der Konvergenzbedingung der Superposition können die erforderlichen kombinatorischen Eigenschaften der Erzeugenden aus dem Gleichgewicht am Knoten, der zwei Nachbarstäbe verbindet, abgeleitet werden. Aus den Gleichungen (25) und (29) aus Kapitel 4 folgt, dass die mit der Reziproken Analyse ermittelten Interaktionsgrößen der Stäbe folgendermassen in einen Einwirkenden- und einen Reaktionsanteil zerlegt werden können:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{c,a} + \mathbf{D}_{c,r}, \quad (31)$$

mit

$$\mathbf{D}_{c,a} = (\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{D}_a \text{ als einwirkender Anteil,}$$

$$\mathbf{D}_{c,r} = \mathbf{G}(\mathbf{I} - \mathbf{V}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{D}_a \text{ als Reaktionsanteil.}$$

Da jeder Knoten des Tragsystems zwei Interaktionspunkte umfasst, existieren dort nach der Zerlegung gemäss (31) zwei Dynamen für Einwirkende und zwei für Reaktionsgrößen, sowie gegebenenfalls eine äussere Einwirkende. Für diese müssen zum einen die Gleichgewichtsbedingungen am Knoten erfüllt sein, und zum anderen, aus dem Prinzip der Methode der Reziproken Analyse, zwei Verträglichkeitsbedingungen für die Reaktionsgrößen.

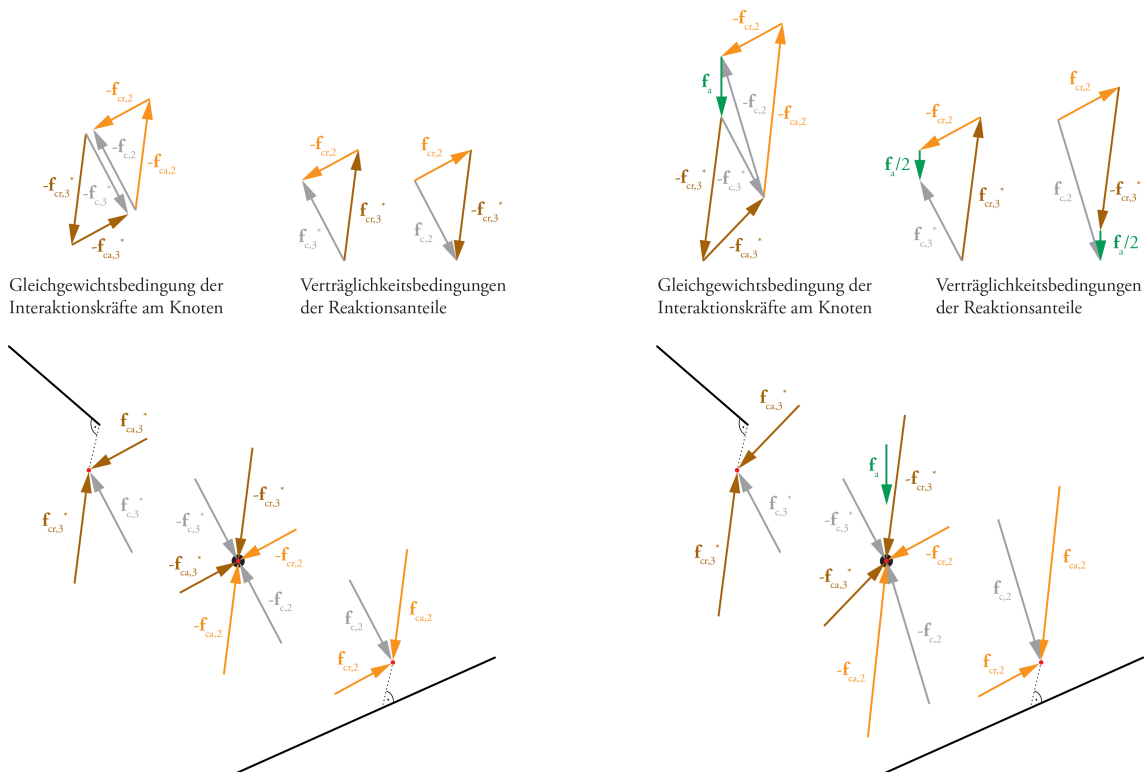


Abb. 87: Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen der in einwirkender und Reaktionsanteil zerlegten Interaktionsgrößen an einem Knoten. a) links: Ohne äussere Einwirkung; b) rechts: Mit äusserer Einwirkung.

Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 87 exemplarisch für Interaktionskräfte die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen, sowohl an einem Knoten des Tragsystems ohne äussere Einwirkung (vgl. Abb. 87a), als auch an einem mit einer äusseren Kraft (vgl. Abb. 87b). Für die Interaktionsmomente kann Analoges gezeigt werden.

Im Beispiel dargestellt sind die in \mathbf{D} enthaltenen Interaktionskräfte $\mathbf{f}_{c,2}$ und $\mathbf{f}_{c,3}^*$, welche am betrachteten Knoten auftreten, sowie deren Zerlegung in den jeweiligen Einwirkenden- und Reaktionsanteil $\mathbf{f}_{ca,2}$ und $\mathbf{f}_{cr,2}$ resp. $\mathbf{f}_{ca,3}^*$ und $\mathbf{f}_{cr,3}^*$. Am Knoten muss, unter Berücksichtigung einer weiteren dort wirkenden äusseren Kraft \mathbf{f}_a , die folgende Gleichgewichtsbedingung erfüllt sein:

$$-\mathbf{f}_{c,2} - \mathbf{f}_{c,3}^* + \mathbf{f}_a = \mathbf{0}. \quad (32)$$

Zusätzlich müssen, aufgrund des Prinzips, wie mit Hilfe der Methode der Reziproken Analyse die Interaktionsgrössen ermittelt werden, die folgenden beiden Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sein:

$$\mathbf{f}_{c,2} = \mathbf{f}_{cr,2} - \mathbf{f}_{cr,3}^* + p \cdot \mathbf{f}_a, \quad (33)$$

$$\mathbf{f}_{c,3}^* = \mathbf{f}_{cr,3}^* - \mathbf{f}_{cr,2} + (1 - p) \cdot \mathbf{f}_a. \quad (34)$$

Darin steht der skalare Wert p für den Anteil der Aufteilung einer im Knoten wirkenden äusseren Kraft \mathbf{f}_a auf die beiden angeschlossenen Stäbe. Im Beispiel aus Abbildung 87b wurde eine gleichmässige Aufteilung mit $p = 0.5$ angenommen.

In allen Iterationsschritten der Methode sind die Wirkungen der partiellen Reaktionskräfte an den Interaktionspunkten durch Erzeugende entweder auf den Raum, eine Ebene, oder eine Gerade beschränkt. Da die Erzeugenden bezüglich der Iteration konstant sind, liegen die Reaktionsanteile der Interaktionsgrössen des Tragsystems ebenfalls innerhalb dieses eingeschränkten Wirkungsbereichs. Aus den Verträglichkeitsbedingungen (33) und (34) resultiert die Einschränkung der Wirkung der Interaktionskraft $\mathbf{f}_{c,2}$ resp. $\mathbf{f}_{c,3}^*$ aus der Gesamtheit der Erzeugenden für partielle Reaktionskräfte der beiden anschliessenden Interaktionspunkte. Da in \mathbb{R}^3 maximal drei linear unabhängige Erzeugende möglich sind, ergibt sich das folgende erforderliche Kriterium bezüglich kombinatorischer Eigenschaften der Erzeugenden im Gesamtsystem:

An den zwei anschliessenden Interaktionspunkten eines Knotens dürfen zusammen maximal drei Erzeugende für Kräfte und drei Erzeugende für Momente wirken.

Zur Veranschaulichung zeigt die folgende Abbildung 88a beispielhaft zwei Annahmen von kombinatorischen Eigenschaften für die Erzeugenden von partiellen Reaktionskräften an Nachbarstäben. Im dargestellten Fall resultiert aus beiden Annahmen die gleiche Einschränkung der Interaktionskraft auf den Raum (vgl. Abb. 88b).

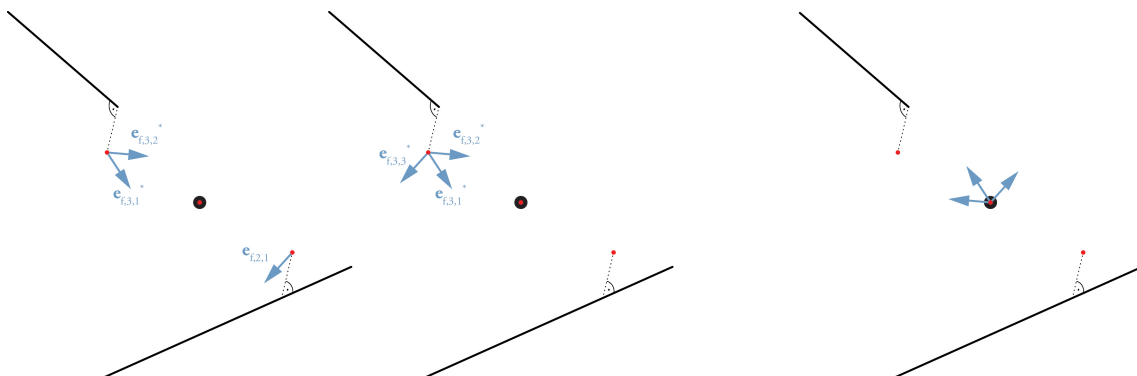


Abb. 88: a) links: Zwei beispielhafte Annahmen von Erzeugenden von partiellen Reaktionskräften an Nachbarstäben; b) rechts: Aus drei linear unabhängigen Erzeugenden resultiert eine auf den Raum eingeschränkte Interaktionskraft.

In den beiden Interaktionspunkten, welche an einen Knoten anschliessen, ergeben sich daraus folgende zulässige kombinatorische Eigenschaften für die Erzeugenden der partiellen Reaktionsgrössen, mit der entsprechend resultierenden Einschränkung der Interaktionskraft, für Momente gilt Analoges:

Erzeugende für $\mathbf{f}_{pr,3,i}^*$ (Endinteraktionspunkt)	Erzeugende für $\mathbf{f}_{pr,2,i}$ (innerer Interaktionspunkt)	Einschränkung der Interaktionskraft $\mathbf{f}_{c,3}^*$ resp. $\mathbf{f}_{c,2}$
3	0	Raum
2	1	Raum
1	2	Raum
0	3	Raum
2	0	Ebene
1	1	Ebene
0	2	Ebene
1	0	Gerade
0	1	Gerade

5.3.2 Parametrische Eigenschaften

Ob die parametrischen Eigenschaften, also die Richtungen, der Erzeugenden so angenommen wurden, dass die Bedingungen für lokales Gleichgewicht erfüllt sind, ist nachgewiesen, wenn aus einer Verschiebung aller Erzeugenden in einen beliebigen Bezugspunkt B genau drei linear unabhängige für Kräfte und drei linear unabhängige für Momente resultieren. Da das lokale Gleichgewicht nur auf den jeweiligen Stab bezogen ist, kann zur Überprüfung der Bedingungen jedes Subsystem für sich isoliert betrachtet werden. Wie in Abbildung 85 gezeigt, lässt sich durch einfache Gleichgewichtsüberlegungen ohne grossen Aufwand ein Zusammenhang zwischen den Richtungen der Erzeugenden und der Erfüllbarkeit der lokalen Gleichgewichtsbedingungen erkennen, da aus dem Subsystem Stab ein verhältnismässig einfaches Kräftesystem resultiert.

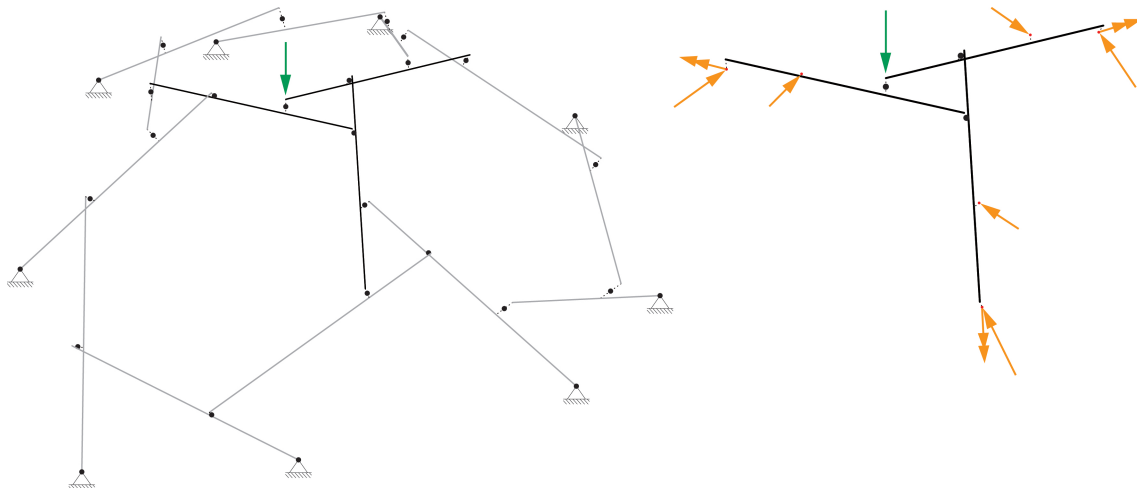


Abb. 89: a) links: Beispielsystem mit äusserer Last; b) rechts: Heraus isoliertes Teilsystem mit Gleichgewicht der äusseren Einwirkenden und den Interaktionsgrössen.

Die erforderlichen parametrischen Eigenschaften in Bezug auf die Erfüllung der Konvergenzbedingungen der Superposition, und damit in Bezug auf die Existenz einer Gleichgewichtslösung für die Interaktionsgrössen des Tragsystems, können durch Betrachtungen des Gleichgewichts an Teilsystemen ermittelt werden. Dies bedeutet, dass die parametrischen Eigenschaften der Erzeugenden so gewählt werden müssen, dass an jedem aus dem Gesamten heraus isolierten Teilsystem, unter Gültigkeit der Bedingungen (33) und (34), Interaktionskräfte möglich sind, die mit den äusseren Einwirkenden und den Auflagerreaktionen des Gesamtsystems einen Gleichgewichtszustand bilden (vgl. Abb. 89).

Dabei besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen der iterativen und der geschlossenen Lösung der Reziproken Analyse. Erfüllen die Annahmen der Eigenschaften der Erzeugenden in allen Subsystemen die Bedingungen für lokales Gleichgewicht, und ermöglichen deren kombinatorische Eigenschaften die Konvergenz der Superposition, so ist bezüglich des Zusammenhangs der parametrischen Erzeugendeneigenschaften und der Existenz einer Gleichgewichtslösung für das Tragsystem der folgende Unterschied vorhanden:

- Ein System ist für eine spezifische Menge äusserer Einwirkungen iterativ lösbar, wenn die parametrischen Eigenschaften der Erzeugenden so gewählt wurden, dass die Konvergenzbedingung der Superposition $|\mathbf{D}_{p,j}| - e < 0$ für diese Menge erfüllt ist.
- Ein System ist für alle äusseren Einwirkungen geschlossen und iterativ lösbar, wenn die parametrischen Eigenschaften so gewählt wurden, dass die Konvergenzbedingung der Superposition $\rho(\mathbf{VG}) < 1$ erfüllt ist.

Für beide Lösungen ist das Erkennen eines Zusammenhangs zwischen der Konvergenzbedingung der Superposition und den parametrischen Eigenschaften der Erzeugenden nicht mehr so trivial wie bezüglich der Bedingungen für lokales Gleichgewicht. Ursache ist die durch (\mathbf{VG}) beschriebene Verknüpfung des Gleichgewichts der Subsysteme zum Gesamten. Dadurch entsteht eine Abhängigkeit zwischen allen Erzeugendenparametern, und als Konsequenz wird erst durch eine geeignete Parameterwahl bezüglich der Gesamtheit aller Erzeugenden die Existenz einer Gleichgewichtslösung des Tragsystems ermöglicht. So kann sich durch die Veränderung eines Erzeugendenparameters für alle anderen im System der Wertebereich verändern, innerhalb dessen die Konvergenzbedingung der Superposition erfüllt ist.

Im Folgenden wird an Beispielen eines ebenen, linearen Tragsystems, vergleichbar mit dem in Abbildung 43 aus Abschnitt 2.2.2, der Zusammenhang von Konvergenzbedingung der Superposition und den kombinatorischen sowie parametrischen Erzeugendeneigenschaften veranschaulicht. Dabei wird jeweils die iterative Lösung durch graphische Darstellung der partiellen Interaktionskräfte aufgezeigt.

Im System in Abbildung 90a sind die Eigenschaften der Erzeugenden so gewählt, dass die Konvergenzbedingung der Superposition für den dargestellten Fall der äusseren Einwirkungen erfüllt ist. Hierbei sind in Subsystemen links und rechts aussen die beiden Erzeugenden der partiellen Reaktionskräfte, aus welchen durch die Reziproke Analyse die Auflagerkräfte des Gesamtsystems resultieren, so gewählt, dass ihre Wirkungslinien einen gemeinsamen Schnittpunkt mit der äusseren Kraft haben und demnach das Gleichgewicht der äusseren Kräfte möglich ist. Ebenso können durch Freischneiden zwischen Subsystemen an beliebigen Stellen des Tragwerks, Teilsysteme erzeugt werden, bei welchen infolge der angenommenen Erzeugendeneigenschaften die Gleichgewichtsbedingungen für den dargestellten äusseren Lastfall erfüllt sind. Es existieren jedoch äussere Kräfte, bei welchen dies nicht gegeben ist, wodurch für diese spezifischen Annahmen mittels Reziproker Analyse nur eine iterative Lösung möglich ist. In Abbildung 90b hat aufgrund der Annahmen der Erzeugenden die äussere Einwirkung keinen Einfluss auf die Erfüllung der Konvergenzbedingung der Superposition, sodass ist mit der Methode eine geschlossene Lösung möglich. Hier können in jedem Lastfall, sowohl für das Gesamtsystem als auch für freigeschnittene Teilsysteme, die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden.

Das Tragsystem in Abbildung 91a weist die gleichen Erzeugendeneigenschaften wie jenes in 90a auf. Jedoch besitzt dieses System eine äussere Kraft, aus welcher keine Gleichgewichtslösung resultiert, da die Konvergenzbedingung der Superposition nicht erfüllt ist. Wie in der Darstellung ersichtlich, ist die Iteration nicht konvergent, da die partiellen Reaktionskräfte in zwei Subsystemen nicht gegen $\mathbf{0}$ sondern ihr Betrag gegen einen konstanten Wert > 0 konvergiert. Dies bedeutet, dass für bestimmte innere Kräfte kein Grenzwert existiert (vgl. braune Vektoren in Abb. 91). Da hier durch die gewählten Erzeugenden aufgrund der Systemauflager keine Gleichgewichtslösung existiert, kann von einer äusseren Unverträglichkeit der Wahl gesprochen werden. Dem gegenüber kann bei der Erzeugendenwahl in Abbildung 91b von einer inneren Unverträglichkeit gesprochen werden, da hier aufgrund des Freischnitts eines spezifischen Teilsystems die Konvergenzbedingung der Superposition nicht erfüllt ist. Weiter ist zu erwähnen, dass bei den beiden nicht-konvergenten Beispielen die Vektoren mit konstantem Betrag, gegen welche die partiellen Reaktionskräfte in den Subsystemen konvergieren, genau jene sind, die zur Erfüllung des Kräftegleichgewichts im Gesamtsystem erforderlich wären. Und jeweils zwei nicht gegen $\mathbf{0}$ konvergierende Kräfte bilden Kräftepaare, deren Momente zur Erfüllung des Momentengleichgewichts erforderlich wären.

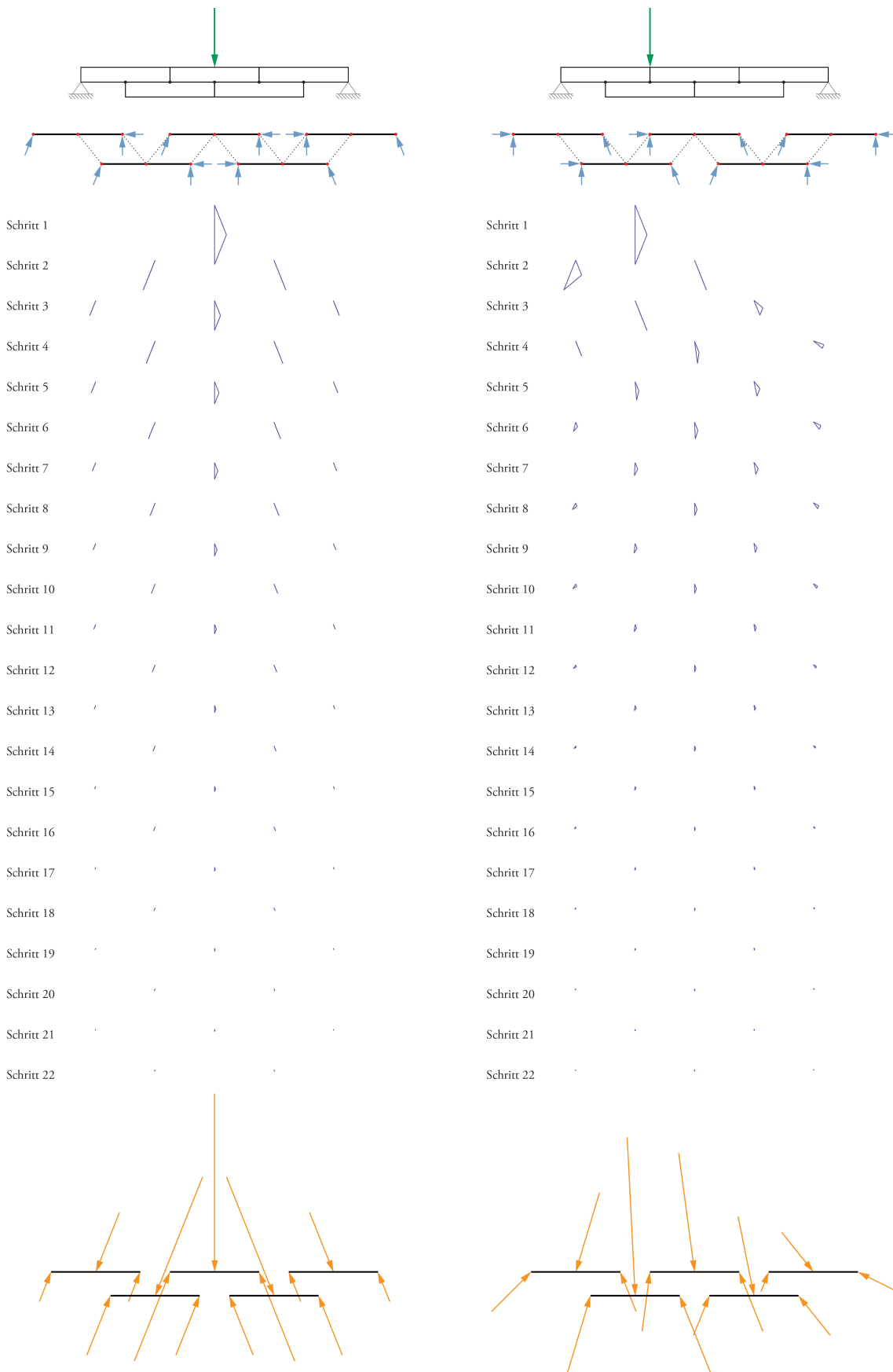


Abb. 90: Einfaches lineares Tragsystem mit äusserer Kraft, Wahl der Erzeugenden, Gleichgewicht der Stäbe in den Iterationsschritten und inneren Kräften; Konvergenz der Superposition. a) links: System nur iterativ lösbar; b) rechts: System geschlossen und iterativ lösbar.

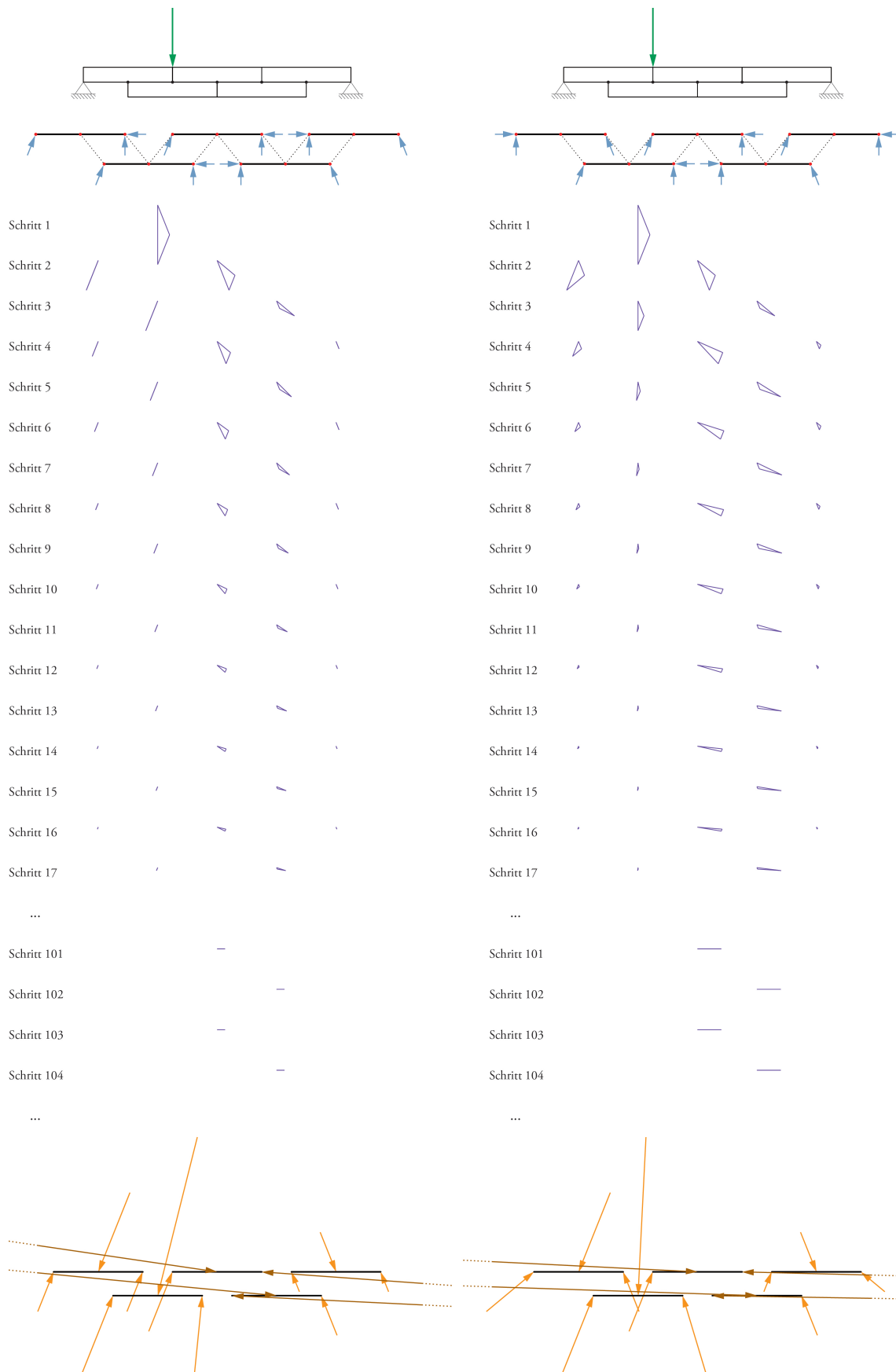


Abb. 91: Einfaches lineares Tragsystem mit Belastung, Wahl der Erzeugenden, Gleichgewicht der Stäbe in den Iterationsschritten und inneren Kräften; Keine Konvergenz der Superposition. a) links: Keine Lösung aufgrund äusserer Unverträglichkeit; b) rechts: Keine Lösung aufgrund innerer Unverträglichkeit.

Für jede kombinatorische Anordnung von Erzeugenden lässt sich ein gültiger Wertebereich ihrer parametrischen Eigenschaften festlegen. Damit ist die Menge der parametrischen Erzeugendeneigenschaften gemeint, für die eine Gleichgewichtslösung des Gesamtsystems existiert. Ein mögliches Vorgehen hierzu ist in Abbildung 92 dargestellt. Dazu wird beispielsweise die Wirkungsgerade oder -ebene, welche durch Erzeugende definiert wird, sphärisch um den Interaktionspunkt rotiert, an welchem sie angreift, wobei jeweils überprüft wird, ob eine Lösung existiert oder nicht. In Abbildung 92 erfolgte diese Überprüfung bezüglich einer geschlossenen Lösung. Dabei wurde jeweils der betragsmässig grösste Eigenwert der Matrix \mathbf{VG} ermittelt und als Linie in der betrachteten Richtung abgetragen, wobei die Richtungen im schwarzen Bereich einem Eigenwert kleiner $\rho(\mathbf{VG}) < 1$ entsprechen und damit innerhalb des gültigen Wertebereich einer Gleichgewichtslösung liegen.

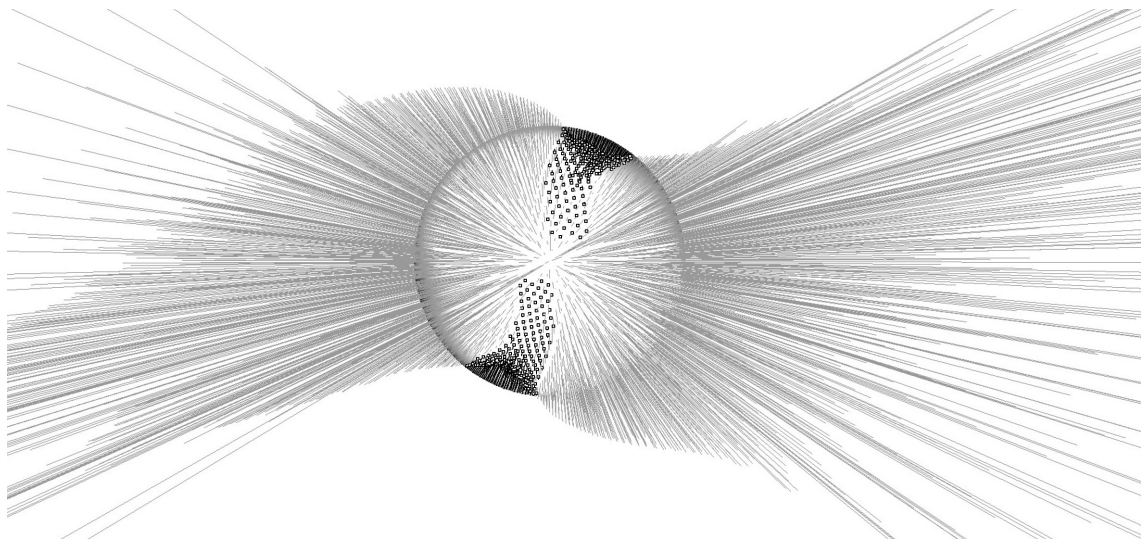


Abb. 92: Beispiel einer numerischen Ermittlung des gültigen Wertebereichs einer Erzeugenden an einem Interaktionspunkt durch sphärische Rotation und Überprüfung der Konvergenz der Superposition durch $\rho(\mathbf{VG}) < 1$.

Aufgrund der Interaktion der Subsysteme existiert nicht nur eine Abhängigkeit der inneren Kräfte, sondern auch der gültigen Wertebereiche parametrischer Erzeugendeneigenschaften. Wie oben erwähnt, kann sich dieser für jede Erzeugende des Systems verändern, wenn ein Parameter einer anderen Erzeugenden verändert wird. Es gibt jedoch in Abhängigkeit des Systems und des betrachteten Interaktionspunkts Werte innerhalb des Bereichs, die mit grosser Wahrscheinlichkeit eine Gleichgewichtslösung ermöglichen.

5.4 Freiheitsgrade des Gesamtsystems

Innerhalb des Tragsystems sind in jedem Knoten, wie in Abschnitt 5.3.1 erläutert, maximal drei linear unabhängige Erzeugendenvektoren für eine Kraft und drei linear unabhängige für ein Moment möglich. Um die Freiheitsgrade in den Gleichgewichtsbetrachtungen zu eliminieren, muss die Anzahl der Erzeugenden am Knoten reduziert werden. Wie in Abschnitt 3.5 erläutert, kann dies entweder durch die Eigenschaften des konstruktiv ausgebildeten Knotens und/oder durch Annahmen nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie erfolgen. In der Regel ermöglichen nur konstruktiv aufwändigere Knotenausbildungen, wie beispielsweise eine voll verschweisste wie in Abbildung 36b dargestellt, alle sechs Erzeugenden. Demgegenüber erfolgt bei einfacheren Knoten (vgl. Abb. 93) bereits aufgrund ihrer konstruktiven Ausbildung eine Reduktion der Anzahl möglicher Erzeugenden, wodurch das Spektrum der zu treffenden Annahmen von kombinatorischen Eigenschaften der Erzeugenden kleiner ist.

Wegen der in Kapitel 3 definierten Eigenschaften weist ein Tragsystem mit m Stäben stets $2m$ Knoten auf. In einem System mit voll gelenkig verbundenen Stäben, bei welchem demnach in jedem Knoten drei Erzeugende für Kräfte und keine für Momente möglich sind, verbleiben somit sechs Erzeugende für Kräfte in jedem Stab. Dies bedeutet, dass in den Subsystemen keine Freiheitsgrade existieren, wodurch ein Tragsystem derartiger Ausbildung statisch bestimmt ist. Da häufig alle drei Erzeugenden für Kräfte in den Knoten möglich sind, erfordert es solche mit einer gewissen Momententragfähigkeit, um eine Beeinflussung der inneren Kräfte nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie zu ermöglichen.

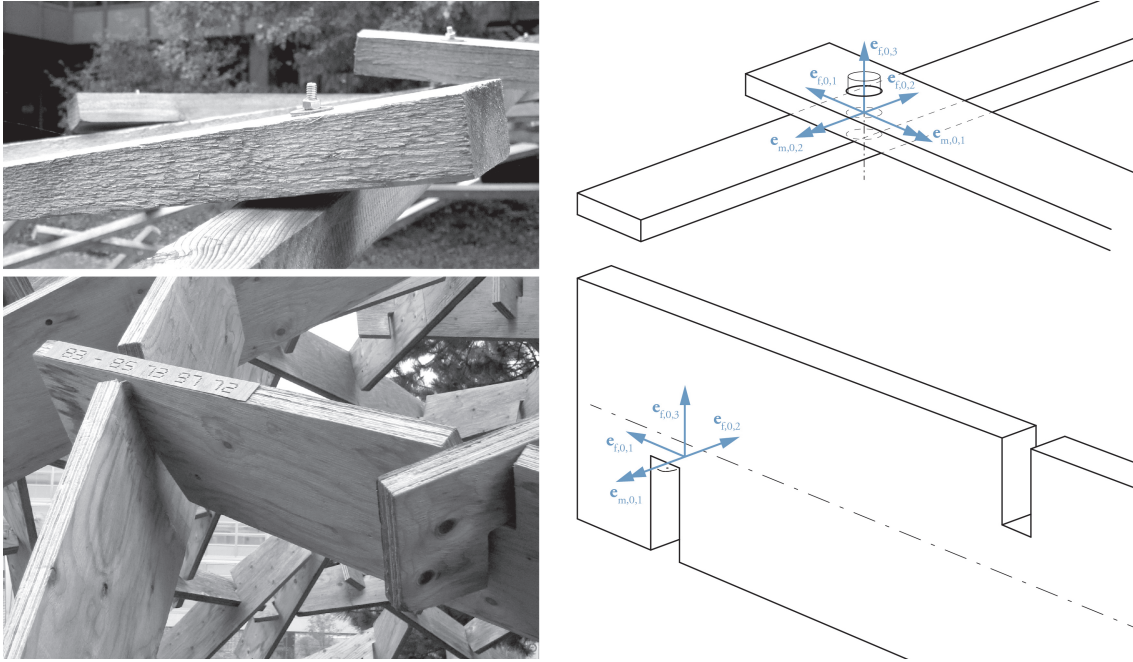


Abb. 93: Zwei Beispiele von einfachen konstruktiven Knotenausbildungen mit einer gewissen Momententragsfähigkeit. a) oben: Verbolzte Verbindung; b) unten: Ausgeklinte Stäbe.

5.5 Vergleichendes Beispiel

Als einfaches Anwendungsbeispiel der Methode der Reziproken Analyse wird die Ermittlung der Biegemomente einer vierseitig drehbar gelagerten Platte gezeigt. Die Ergebnisse werden einerseits mit einer elastischen Berechnung nach der Methode der Finiten Elemente verglichen, andererseits erfolgt ein Vergleich mit den Resultaten einer Berechnung durch die Streifenmethode nach Arne Hillerborg [31], die wie die hier entwickelte auf dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie basiert.

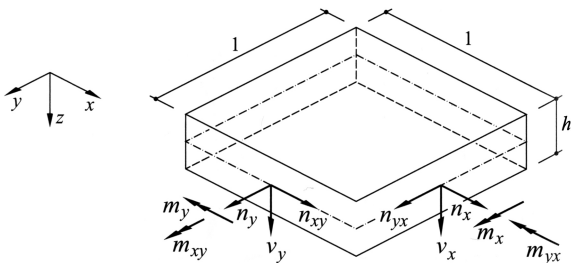


Abb. 94: Übersicht der möglichen Schnittgrößen in Flächentragwerken [40].

Bei den folgenden Berechnungen werden die allgemeinen Schnittgrößen von Flächentragwerken, wie in Abbildung 94 dargestellt, angenommen [40], jedoch werden bei allen drei Methoden vereinfachend Platten ohne Drillsteifigkeit angenommen, wodurch bezüglich der Schnittmomente nur Biegemomente m_x und m_y entstehen, während für die Drillmomente $m_{yx} = 0$ und $m_{xy} = 0$ gilt.

5.5.1 Methode der Reziproken Analyse

Für die Berechnung nach der Methode der Reziproken Analyse wird das Kontinuum des Flächentragwerks der Platte durch das in Kapitel 3 eingeführte Tragsystem diskretisiert. Da ein solches sinnvollerweise in der Mitte der Querschnittshöhe des Kontinuums verläuft, stellt es im Fall der Platte den ebenen Sonderfall des Tragsystems dar, welcher in Abschnitt 3.3.3 definiert wurde. Weiter werden die Parameter a_{01} und a_{23} des Subsystems Stab so gewählt, dass die beiden inneren Interaktionspunkte auf der gleichen Stelle der Stabachse liegen (vgl. Abb. 95).

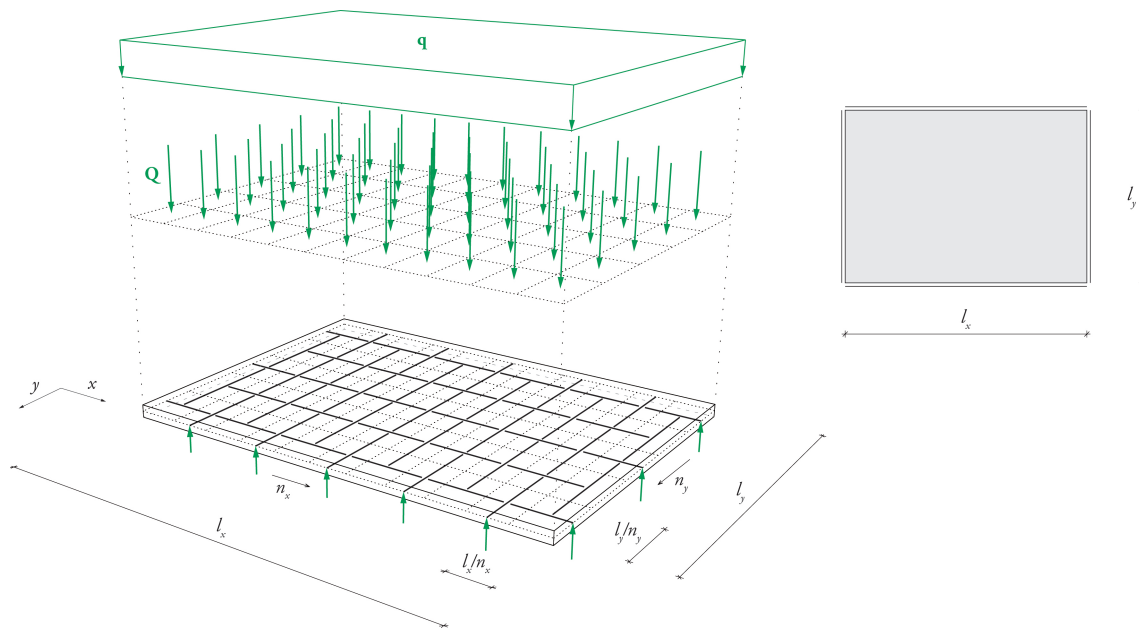


Abb. 95: Diskretisierung des Kontinuums einer vierseitig gelagerten Platte, sowie Aufteilung der einwirkenden Flächenlast q in gleiche Teilresultierende Q .

Die einwirkende Flächenlast q wird für die Analyse in eine zu wählende Anzahl identischer Teilresultierender Q zerlegt, wodurch ein reguläres Raster aus $n_x \cdot n_y$ Lasteinzugsflächen der Teilresultierenden $Q = \frac{l_x l_y}{n_x n_y} q$ entsteht. Die Geometrie des Tragsystems wird so gewählt, dass in jedem Knoten des Systems mit Ausnahme der Auflagerknoten jeweils Teilresultierende angreifen (vgl. Abb. 95).

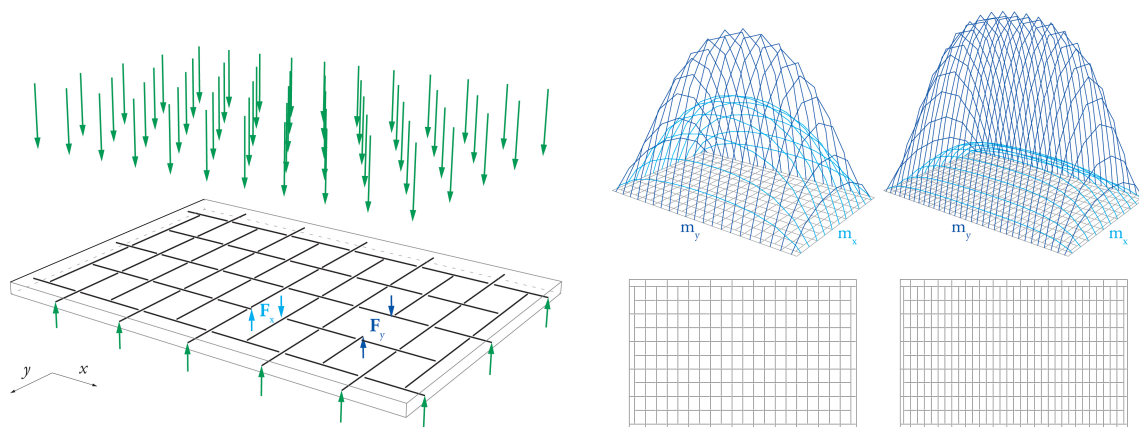


Abb. 96: a) links: Ermittlung der Biegemomente m_x und m_y der Platte aus den Interaktionskräften der Subsysteme der Stäbe; b) rechts: Beispielhafte Gegenüberstellung zweier unterschiedlicher Rastergeometrien und dem daraus resultierenden Einfluss auf die Biegemomente m_x und m_y .

Für die Biegemomentenberechnung werden in einem ersten Schritt mit der Methode der Diskreten Analyse die inneren Kräfte des Systems, das heißt die Kräfte in den Interaktionspunkten, ermittelt. In einem zweiten Schritt werden daraus in einer vergleichbaren Art und Weise, wie in Abbildung 43 in Abschnitt 2.2.2 an einem Träger gezeigt, die Biegemomente des Systems resp. der Platte bestimmt. Dabei ergeben sich aus den Kräftepaaren von Interaktionskräften an den Stäben, welche in x-Richtung verlaufen (vgl. f_x in Abb. 96a), und deren jeweiligem Hebelarm, die Biegemomente m_x und aus jenen, welche in y-Richtung verlaufen (vgl. f_y in Abb. 96a), die Momente m_y .

Bei einer derartigen Vorgehensweise wird die Rastergeometrie des Tragsystems durch Annahmen festgelegt. Die verschiedenen Möglichkeiten der geometrischen Ausprägung können in Bezug auf Homogenität und Isotropie unterschieden werden. Abbildung 97 zeigt beispielhaft drei mögliche Geometrien von Rastern für eine Rechteckplatte, wobei Abbildung 97a homogen und isotrop ist, 97b homogen und anisotrop sowie 97c inhomogen und anisotrop.

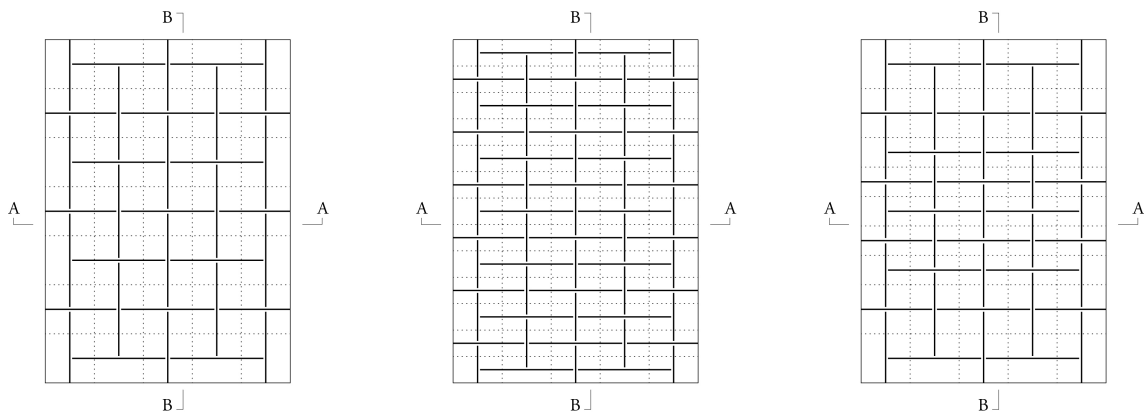


Abb. 97: Drei Beispiele für Raster des Tragsystems zur Diskretisierung einer Rechteckplatte. a) links: Homogen und isotrop; b) mittig: Homogen und anisotrop; c) rechts: Inhomogen und anisotrop.

Die Wahl der Rastergeometrie beeinflusst im Beispiel der Platte die Lastaufteilung bezüglich gegenüberliegender Auflagerlinien, und damit die unterschiedliche Ausprägung der Plattenmomente m_x und m_y . Als Veranschaulichung dazu zeigt Abbildung 96b eine Gegenüberstellung der Verläufe von m_x und m_y für die Annahme eines isotropen und eines anisotropen Rasters. Mit diesen Erkenntnissen können für die Beispiele in Abbildung 97 folgende Aussagen über die Lastaufteilung bezüglich der zwei orthogonalen Richtungen A-A und B-B getroffen werden: Das Beispiel in Abbildung 97a weist für beide Richtungen identische Anteile in der Lastabtragung auf, während das System in 97b einen grösseren Anteil in der Richtung A-A abträgt. Die inhomogene Rastergeometrie in Abbildung 97c verursacht im Bereich der kurzen Kanten eine gleichmässige Lastaufteilung und in der Zone des mittleren Bereichs bezüglich der Längsrichtung einen höheren Anteil der Lastabtragung in Richtung A-A. Daraus wird erkennbar, dass auch die Art und Weise der Diskretisierung eines Kontinuums eine Annahme im Rahmen des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie darstellt. Für den hier durchgeführten Vergleich werden die Biegemomente an drei Platten mit den unterschiedlichen Seitenverhältnissen 1:1, 1:1.5 und 1:3 ermittelt. Die Ergebnisse, welche aus der Methode der Reziproken Analyse resultieren, sind in der folgenden Abbildung 98 qualitativ dargestellt.

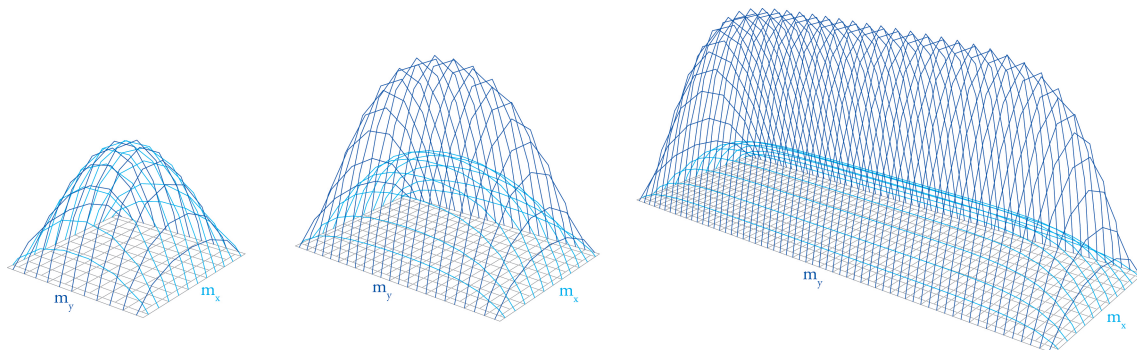


Abb. 98: Verläufe der durch die Methode der Reziproken Analyse ermittelten Biegemomente m_x und m_y . a) links: Quadratische Platte mit Seitenverhältnis 1:1; b) mittig: Rechteckplatte mit Seitenverhältnis 1:1.5; c) rechts: Rechteckplatte mit Seitenverhältnis 1:3.

5.5.2 Finite Elemente Methode

Als erster Vergleich erfolgt die Ermittlung der Biegemomente mit der Methode der Finiten Elemente, die in den Computeranwendungen zur statischen Analyse in der Praxis die am weitesten verbreitete Methode sein dürfte. Die Berechnungen in den hier gezeigten Beispielen wurden mit der Software CEDRUS-6 der Cubus AG, Zürich, unter der Annahme von drillweichen Platten durchgeführt. In Abbildung 99 sind die Resultate für die Biegemomente m_x und m_y qualitativ dargestellt. Auffallend bei den gezeigten Ergebnissen ist bei der Rechteckplatte in Abbildung 99c das Abnehmen der Momente m_x zur Feldmitte hin. Dies kann dadurch erklärt werden, dass die kurzen Plattenstreifen in y -Richtung für die langen in x -Richtung ein elastisches Auflager darstellen. Für den quantitativen Vergleich wird als Maximalbetrag des Moments m_x der Mittelwert der Beträge der Extrema des Verlaufs angenommen.

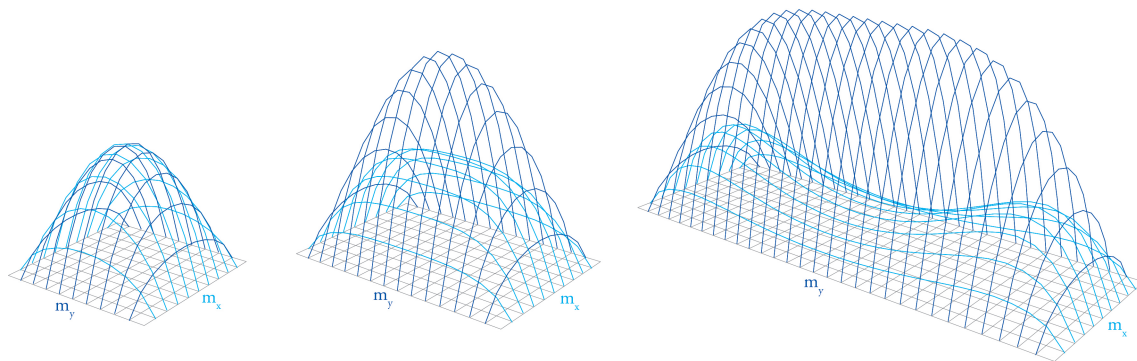


Abb. 99: Verläufe der durch die Finite Elemente Methode ermittelten Biegemomente m_x und m_y . a) links: Quadratische Platte mit Seitenverhältnis 1:1; b) mittig: Rechteckplatte mit Seitenverhältnis 1:1.5; c) rechts: Rechteckplatte mit Seitenverhältnis 1:3.

5.5.3 Streifenmethode nach Hillerborg

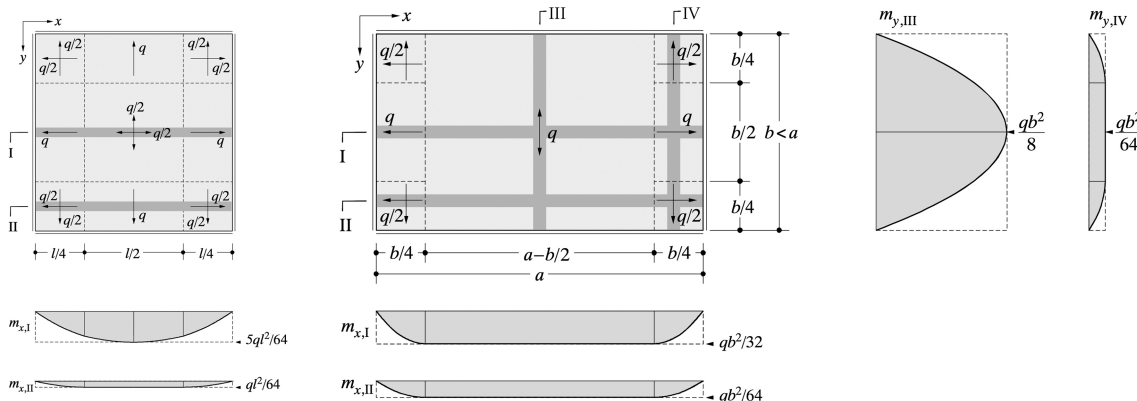


Abb. 100: Prinzip der einfachen Streifenmethode nach Hillerborg: Vorschlag einer Einteilung in orthogonale Plattenstreifen und die daraus resultierenden Biegemomente m_x und m_y [41].

Der zweite Vergleich der Biegemomentenermittlung erfolgt mit der Streifenmethode nach Arne Hillerborg (vgl. Abb. 100), einem einfachen Verfahren das sich gut für Bemessungen in der Praxis eignet [41]. Im Speziellen wird hier die einfache Streifenmethode angewandt, welche Drillmomente vernachlässigt und mit Biegemomenten m_x und m_y allein die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Hillerborg konnte nachweisen, dass die Bedingungen des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie erfüllt sind, sowohl wenn die Platte in orthogonale Balkenscharen aufgeteilt wird, als auch wenn eine Aufteilung der Belastung q in Anteile q_x und q_y bezüglich x - und y -Richtung frei und an jeder Stelle der Platte unterschiedlich ist [41]. In Abbildung 101 sind die Ergebnisse, welche die Streifenmethode liefert, qualitativ dargestellt. Dabei liegt der in Abbildung 100 gezeigte Vorschlag zur Einteilung orthogonaler Plattenstreifen zugrunde.

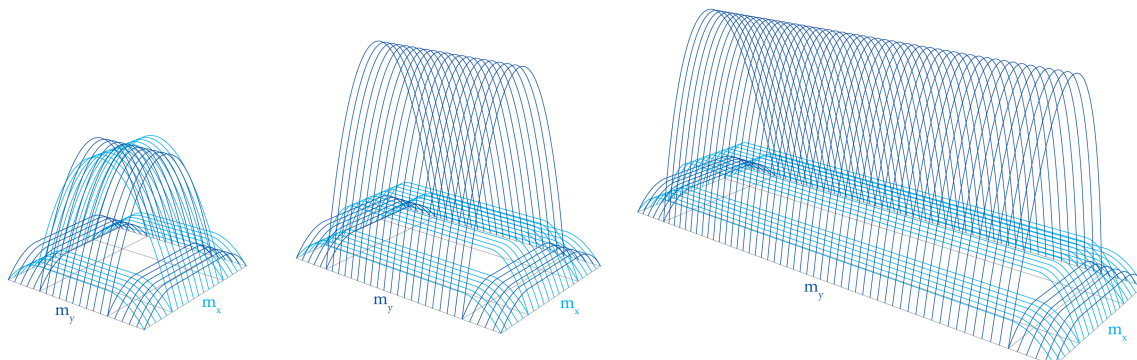


Abb. 101: Verläufe der durch die einfache Streifenmethode nach Arne Hillerborg ermittelten Biegemomente m_x und m_y . a) links: Quadratische Platte mit Seitenverhältnis 1:1; b) mittig: Rechteckplatte mit Seitenverhältnis 1:1.5; c) rechts: Rechteckplatte mit Seitenverhältnis 1:3.

5.5.4 Vergleich der Ergebnisse

Ziel des Vergleichs ist es, die Resultate der hier entwickelten Methode der Reziproken Analyse einzuordnen in jene anderer gängiger Methoden, und um zu zeigen, dass mit ihr sehr ähnliche Verläufe der Biegemomente erreicht werden können. Nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie hat eine derartige Gegenüberstellung der Methoden keine hohe Bedeutung, da in allen statisch zulässige Spannungszustände zugrunde liegen. In der folgenden Tabelle sind aus den Ergebnissen, welche in den Abbildungen 98, 99 und 101 qualitativ aufgezeigt sind, jeweils die Maximalwerte der Momente $m_{x,max}$ und $m_{y,max}$ für einen Betrag der einwirkende Last $q = 20.0 \text{ kN/m}^2$ quantitativ gegenübergestellt.

Abmessungen Platte	Moment	Reziproke Analyse	FEM (Abweichung zu R.A.)	Streifenmethode (Abweichung zu R.A.)
10 m × 10 m	$m_{x,max}$ [kNm/m]	148.7	153.8 (3.4%)	156.3 (5.1%)
	$m_{y,max}$ [kNm/m]	148.7	153.8 (3.4%)	156.3 (5.1%)
10 m × 15 m	$m_{x,max}$ [kNm/m]	118.2	127.8 (8.1%)	62.5 (-47.1%)
	$m_{y,max}$ [kNm/m]	233.1	245.4 (5.3%)	250.0 (7.3%)
10 m × 30 m	$m_{x,max}$ [kNm/m]	72.5	73.6 (1.5%)	62.5 (-13.8%)
	$m_{y,max}$ [kNm/m]	251.9	264.8 (5.1%)	250.0 (-0.8%)

Obwohl die einfache Streifenmethode nach Hillerborg ein grobes Näherungsverfahren darstellt, weisen die verglichenen Momentenmaxima, mit Ausnahme des Werts $m_{x,max}$ bezüglich der Platte mit Seitenverhältnis 1:1.5, lediglich geringe Abweichungen zu den beiden anderen Analysemethoden auf. Darüber hinaus zeigt der Vergleich, dass bezüglich der hier analysierten Beispiele die Resultate der Reziproken Analyse gegenüber jenen der Finiten Elemente Methode nur Abweichungen von maximal 8.1% aufweisen. Da der Anteil der Lastabtragung bezüglich x - und y -Richtung in der Methode der Reziproken Analyse durch die Wahl der Rastergeometrie eine sinnvoll zu wählende Annahme im Rahmen der Plastizitätstheorie darstellt, kann ein plausibler Vergleich ausschliesslich mit den Ergebnissen der quadratischen Platte durchgeführt werden. Dort ist die evidenteste Annahme eine anteilig gleiche Lastabtragung in beide Richtungen, während bei Rechteckplatten ein grösseres Spektrum von Annahmen sinnvoll erscheint. Eine Gegenüberstellung der Momente der quadratischen Platte (vgl. Abb. 102a) zeigt, dass der Maximalwert, welcher aus der Reziproken Analyse resultiert, etwas geringer als das vergleichbare FEM-Ergebnis ist. Dies kann durch die Betrachtung des Verlaufs der Momentenmaxima $m_{x,max}(y)$, resp. $m_{y,max}(x)$ erklärt werden. Abbildung 102b zeigt beispielhaft $m_{y,max}(x)$, woraus erkennbar ist, dass aus den Berechnungen der Reziproken Analyse eine geringfügig ausgewogenere Verteilung der maximalen Momente resultiert, welche in Plattenmitte geringere und an den Rändern höhere Werte aufweist.

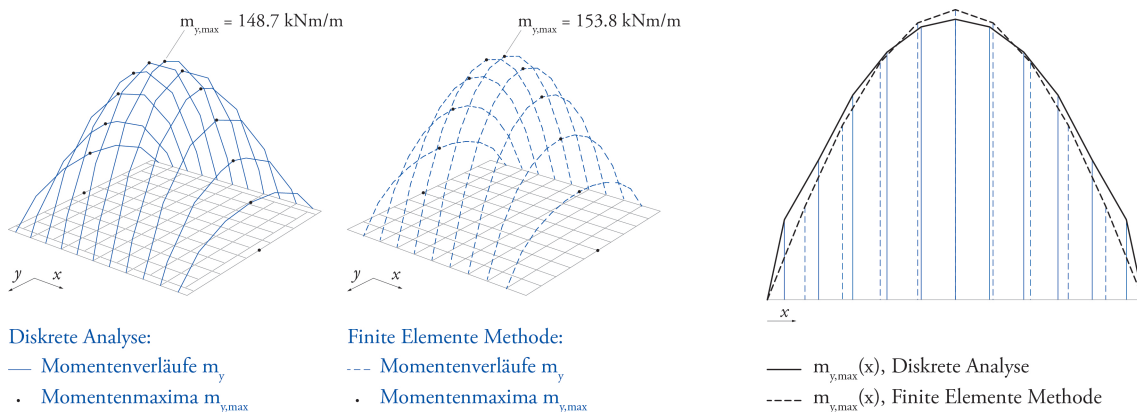


Abb. 102: a) links: Momentenverläufe m_y in einer quadratischen Platte mit den Maximalwerten, einerseits ermittelt mit der Methode der Reziproken Analyse und andererseits mit der Finiten Elemente Methode; b) rechts: Vergleichende Darstellung des Verlaufs der Momentenmaxima $m_{y,max}(x)$.

6 Optimierungsmodell

6.1 Allgemeines

In diesem Kapitel wird ein Modell vorgeschlagen, mit welchem eine vorgegebene Form, die mit dem in Kapitel 3 eingeführten Tragsystem diskretisiert wird, so optimiert werden kann, dass eine Systemkonfiguration entsteht, die für die Ausbildung als Tragwerk ein Minimum an Material- und Konstruktionsaufwand erfordert. Die Schritte des Optimierungsprozesses, sowie die Ausgangslage und das Resultat sind in Abbildung 103 schematisch dargestellt, und werden im Folgenden erläutert.

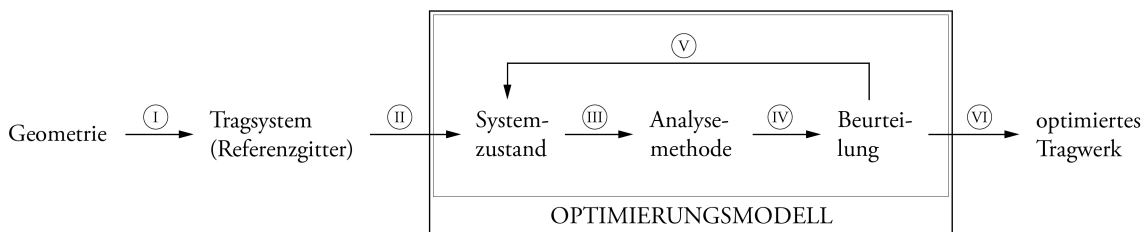


Abb. 103: Schemadiagramm des Optimierungsmodells.

Schritt I

Ausgangslage ist die gegebene Geometrie einer räumlichen Fläche, sowie deren äussere Lasteinwirkungen (vgl. Abb. 104a). Diese Form wird durch das in Kapitel 3 definierte stabförmig diskrete Tragsystem als Referenzgitter mit singulären Verbindungen nachgebildet (vgl. Abb. 104b). Im späteren Optimierungsprozess wird zwischen denjenigen Parametern des Tragsystems unterschieden, die während des Prozesses konstant bleiben (vgl. Abschnitt 6.2), und denjenigen die variabel sind (vgl. Abschnitt 6.3). Die Koordinaten des Referenzgitters stellen im Rahmen dieser Arbeit konstante Systemparameter dar.

Schritt II

Um einen ersten Systemzustand zu erhalten, werden die übrigen konstanten Systemparameter als Randbedingungen des Optimierungsprozesses definiert, sowie die Variablen auf Ausgangswerte gesetzt.

Schritt III

Für den Systemzustand werden mittels Reziproker Analyse die inneren Kräfte des Tragsystems infolge der gegebenen Einwirkenden ermittelt.

Schritt IV

Nach der Ermittlung der inneren Kräfte erfolgt die Materialisierung. Diese umfasst die Definition des Materials für die Stäbe und der in Frage kommenden Querschnitte, sowie den Typ eines konstruktiven Knotens. Infolge dieser Festlegungen können aufgrund der Beanspruchung des Materials die erforderlichen Querschnitte der Stäbe, sowie die Dimensionen der Knoten ermittelt werden. Diese Resultate werden zusammenfassend für das ganze System als Wert quantifiziert, um daran den Systemzustand bezüglich des definierten Kriteriums des Material- und Konstruktionsaufwands beurteilen zu können.

Schritt V

Nach der Beurteilung werden die variablen Systemparameter angepasst, sodass ein veränderter Systemzustand resultiert, für welchen ein erneuter Durchlauf der Prozessschleife mit Analyse und Beurteilung erfolgt. Die Schleife wird so oft durchlaufen, bis die Abbruchbedingung erfüllt ist.

Schritt VI

Wenn die Bedingung für den Abbruch erfüllt wird, ist ein Systemzustand gefunden, welcher im Rahmen der definierten Randbedingungen für das Beurteilungskriterium ein Optimum darstellt. Dieser stellt hier die Grundlage für ein Tragwerk dar, welches ein Minimum an Material- und Konstruktionsaufwand erfordert.

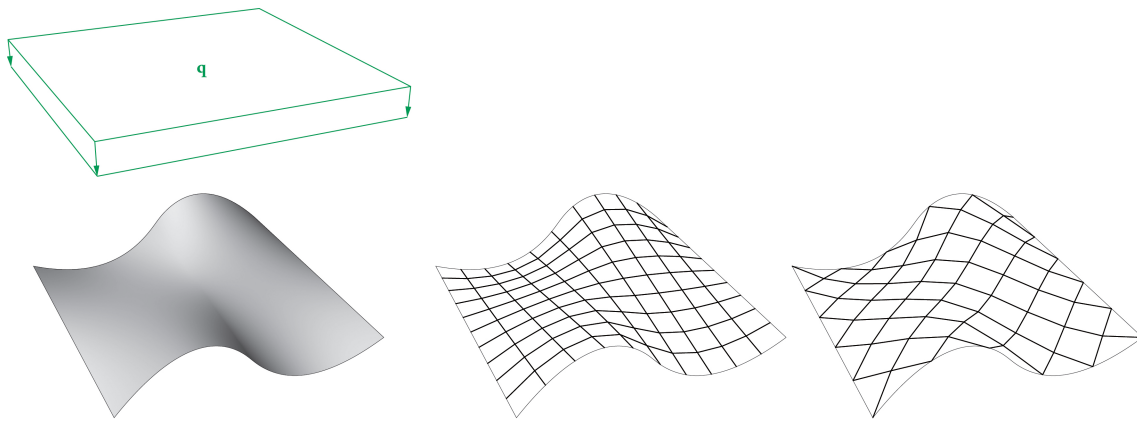


Abb. 104: a) links: Gegebene räumlichen Fläche und ihre äussere Lasteinwirkung q ; b) rechts: Zwei Beispiele eines Referenzgitters für die gegebene Geometrie.

Die vollständige Entwicklung des Optimierungsmodells würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, jedoch werden die methodischen Grundlagen dafür gelegt, ein Ansatz für das Modell beschrieben und die Einflüsse von Systemparametern aufgezeigt. Aus diesem Grund wird vereinfachend, jedoch hier als ausreichend erachtet, nur die Materialmenge der Stäbe für die Beurteilung berücksichtigt, welche die Bewertungsfunktion Φ des Optimierungsproblems in Abhängigkeit der variablen Systemparameter darstellt. Bezüglich der Materialisierung wurden in den Beispielen dieses Kapitels prismatische Stahlstäbe mit ROR-Querschnitten gewählt.

Für das Suchen eines Minimalwerts der Funktion Φ können im Optimierungsprozess grundsätzlich zwei verschiedene Ansätze verfolgt werden. Erstens eine umfassende Suche, bei der auf Grundlage eines definierten Rasters der gesamte Wertebereich aller variablen Systemparameter überprüft wird. Dann erfolgt die Systemanpassung im Schritt V fortschreitend nach den Werten des vorgegebenen Parameterrasters, und die Abbruchbedingung des Prozesses ist erfüllt, wenn alle variablen Parameter des jeweiligen Wertebereichs durch die Bewertungsfunktion geprüft wurden. Die zweite Strategie der Optimierung ist eine sukzessive Approximation des Minimums. Dafür muss im Schritt V des Prozesses die Anpassung der variablen Systemparameter infolge der bisher ermittelten Funktionswerte so vorgenommen werden, dass das Funktionsminimum iterativ angenähert wird. Hierbei werden die Beträge der Parameterveränderungen mit fortschreitender Iteration kleiner und das Abbruchkriterium ist erfüllt, wenn ein definiertes Minimum der Betragsänderung erreicht ist. Die umfassende Suchstrategie hat den Vorteil, dass das gefundene Optimum ein globales Funktionsminimum darstellt, wobei die Genauigkeit jedoch von der Dichte des Parameterrasters abhängt. Die iterative Strategie hingegen approximiert das Minimum mit der definierten Genauigkeit, jedoch kann es sich dabei um ein lokales Minimum der Bewertungsfunktion handeln. Eine weitere mögliche Vorgehensweise stellt eine gekoppelte Anwendung beider Strategien dar.

6.2 Konstante Systemparameter

Da die geometrische Form und die einwirkenden Lasten (vgl. Abb. 104a) als gegeben angenommen werden, sind dies die konstanten Systemparameter mit oberster Priorität. Hierarchisch danach anzusiedeln sind weitere, die im Folgenden erläutert werden.

Die Grundgeometrie des Referenzgitters, wozu beispielsweise die Art der Polygone, die Gerichtetheit oder die Dichte der Struktur zu zählen sind, werden in dieser Arbeit ebenfalls als konstante Systemparameter angenommen. Dabei ist zu beachten, dass hierbei bereits Annahmen getroffen werden, welche das Tragverhalten des Systems beeinflussen. Beispielsweise kann die Gerichtetheit einer Gitterstruktur die Lastabtragung in eine bevorzugte Richtung erzeugen. Dies wurde im Abschnitt 5.5.1 exemplarisch bei der Definition des Rasters für die Plattenberechnung mit der Reziproken Analyse erläutert. Weiter werden als konstante Systemparameter die kombinatorischen und parametrischen Eigenschaften der Erzeugenden von Momenten angenommen, da wie in Abschnitt 5.4 erwähnt, die Eigenschaften eines Knotens bezüglich der Momententragungsfähigkeit massgeblich durch seinen konstruktiven Typ bestimmt sind. Dieser ist sinnvollerweise nicht individuell an jedem Knoten variabel, sondern es werden wenige gezielt gewählte Typen eingesetzt.

Ebenfalls als konstant im Optimierungsprozess werden in dieser Arbeit die kombinatorischen Eigenschaften der Erzeugenden von Kräften angenommen, begründet in erster Linie durch die damit erzielte Reduktion der Komplexität des Optimierungsmodells und dem daraus resultierenden Rechenaufwand. Diese Annahme bestimmt massgeblich, in welchem Rahmen die Interaktionskräfte beeinflusst werden können. Dazu sind in Abbildung 105 drei Beispiele von Annahmen aufgezeigt. Wie darin veranschaulicht, wird im Rahmen dieser Arbeit angestrebt, einheitliche Stabtypen bezüglich deren kombinatorischer Eigenschaften von Erzeugenden auszubilden, was mit Ausnahme der Randstäbe in den meisten Fällen möglich ist. Bei diesen können an einem freien Interaktionspunkt (vgl. Abschnitt 3.3.2) keine Erzeugenden angesetzt werden, weshalb diese hier auf den nächstliegenden Endinteraktionspunkt verschoben werden (vgl. Abb. 105b). Das erste Beispiel zeigt eine Annahme, bei welcher drei Erzeugende die Interaktionskräfte definieren und keine auf Momente entfallen. Dies stellt den in Abschnitt 5.4 beschriebenen Fall eines statisch bestimmten Gesamtsystems dar. Im zweiten Beispiel definieren jeweils zwei Erzeugende am Knoten eine Wirkungsebene für die Interaktionskräfte, im Dritten sind zwei der vier Interaktionskräfte einer reziproken Verbindung durch jeweils eine Wirkungsebene eingeschränkt und die anderen beiden durch je eine Wirkungsebene eingeschränkt.

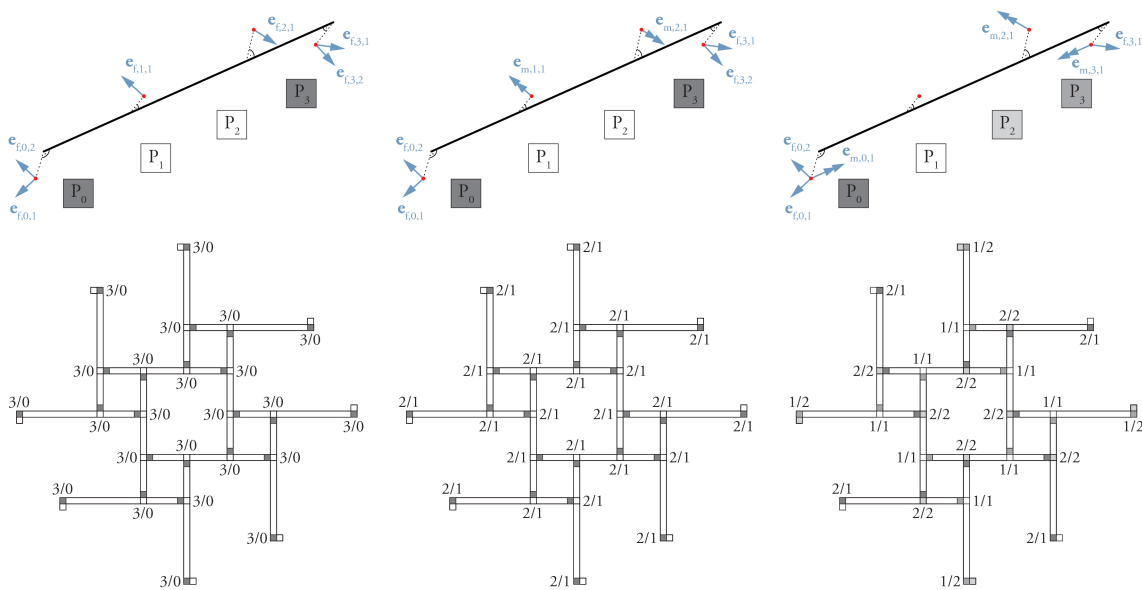


Abb. 105: Drei Beispiele von Annahmen kombinatorischer Eigenschaften der Erzeugenden. a) oben: Subsystem Stab mit den Erzeugenden für partielle Reaktionskräfte und -momente in den Interaktionspunkten; b) unten: Ebene Projektion des Systems mit der resultierenden Anzahl von Erzeugenden der Interaktionsgrößen (Kraft/Moment).

Da bereits durch die Festlegung der konstanten Systemparameter Annahmen getroffen werden, welche die Menge möglicher Gleichgewichtslösungen für das Tragsystem beeinflussen, kann es sinnvoll sein, die gegebene Form mit dem Optimierungsmodell für verschiedene Werte der konstanten Systemparameter zu untersuchen, wie beispielsweise Referenzgitter mit unterschiedlicher Anzahl Stäben an den Verbindungen oder verschiedene Annahmen der kombinatorischen Erzeugendeneigenschaften (vgl. Abb. 105).

6.3 Variable Systemparameter

Infolge der definierten konstanten Systemparameter verbleiben innerhalb des Optimierungsprozesses die folgenden variabel:

- Die parametrischen Eigenschaften der Erzeugenden der partiellen Reaktionskräfte (siehe Abschnitt 4.2.2), wodurch die Wirkungen der Interaktionskräfte eingeschränkt, und damit das Tragverhalten des Tragsystems im Rahmen des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie beeinflusst werden kann.
- Die Öffnungswerten in den Verbindungen (siehe Abschnitt 3.2), wodurch die Biegebeanspruchung senkrecht zur Tangentialebene der Fläche beeinflusst wird (vgl. Abschnitt 2.2.2).

Eine detaillierte Beschreibung der Variationsstrategie für diese Parameter innerhalb des in dieser Arbeit aufgezeigten Ansatzes für das Optimierungsmodell erfolgt in Abschnitt 6.6.

6.4 Beurteilung eines Systemzustands

Innerhalb des Optimierungsprozesses werden für einen durch die Systemparameter definierten Zustand die Interaktionsgrößen mit der Methode der Reziproken Analyse ermittelt, welche die Grundlage für die Beurteilung nach dem Kriterium des erforderlichen Material- und Konstruktionsaufwands der Stäbe und Knoten darstellen. Während der Konstruktionsaufwand für die Knoten unmittelbar infolge der Interaktionsgrößen beurteilt werden kann, bedarf es für die Stäbe einer Umrechnung in Schnittgrößen bezüglich ihrer Achse, um damit nach der Materialisierung eine Bemessung des erforderlichen Querschnitts durchführen zu können. Wie in Abschnitt 6.1 erläutert, erfolgt die Bewertung innerhalb dieser Arbeit lediglich aufgrund des erforderlichen Materialaufwands für die Stäbe, während eine Beurteilung der Knotenkonstruktion vernachlässigt wird.

Für die Schnittgrössenermittlung werden zuerst die Interaktionskräfte und -momente in allgemeine Schnittkräfte $\mathbf{f}_u(\mathbf{b})$ und Schnittmomente $\mathbf{m}_u(\mathbf{b})$ wie folgt umgerechnet, wobei \mathbf{b} der Ortsvektor des betrachteten Punkts auf der Stabachse ist:

$$\mathbf{f}_u(\mathbf{b}) = - \sum_{k=u}^3 \mathbf{f}_{c,k},$$

$$\mathbf{m}_u(\mathbf{b}) = - \sum_{k=u}^3 (\mathbf{m}_{c,k} + (\mathbf{p}_k - \mathbf{b}) \times \mathbf{f}_{c,k}).$$

Darin bezeichnet $\{u \mid 1 \leq u \leq 3\}$ den Abschnitt auf der Stabachse zwischen den Lotfassungspunkten zweier Interaktionspunkte, innerhalb dessen \mathbf{b} liegt. Die Unterteilung in Abschnitte resultiert aus den Diskontinuitäten der Schnittgrößenfunktionen an den Lotfassungspunkten.

Aus den zwei Größen $\mathbf{f}_u(\mathbf{b})$ und $\mathbf{m}_u(\mathbf{b})$ werden jeweils durch Komponentenzersetzung in Richtung der Stabachse und senkrecht dazu die Schnittgrößen im klassischen Sinne ermittelt. Es folgt mit dem Einheitsvektor \mathbf{s} in Richtung der Stabachse für die Funktionen von Normalkraft $\mathbf{N}_u(\mathbf{b})$, Querkraft $\mathbf{V}_u(\mathbf{b})$, Torsionsmoment $\mathbf{M}_{t,u}(\mathbf{b})$ und Biegemoment $\mathbf{M}_{b,u}(\mathbf{b})$ (vgl. Abb. 106):

$$\mathbf{N}_u(\mathbf{b}) = (\mathbf{f}_u(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{s})\mathbf{s},$$

$$\mathbf{V}_u(\mathbf{b}) = \mathbf{f}_u(\mathbf{b}) - (\mathbf{f}_u(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{s})\mathbf{s},$$

$$\mathbf{M}_{t,u}(\mathbf{b}) = (\mathbf{m}_u(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{s})\mathbf{s},$$

$$\mathbf{M}_{b,u}(\mathbf{b}) = \mathbf{m}_u(\mathbf{b}) - (\mathbf{m}_u(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{s})\mathbf{s}.$$

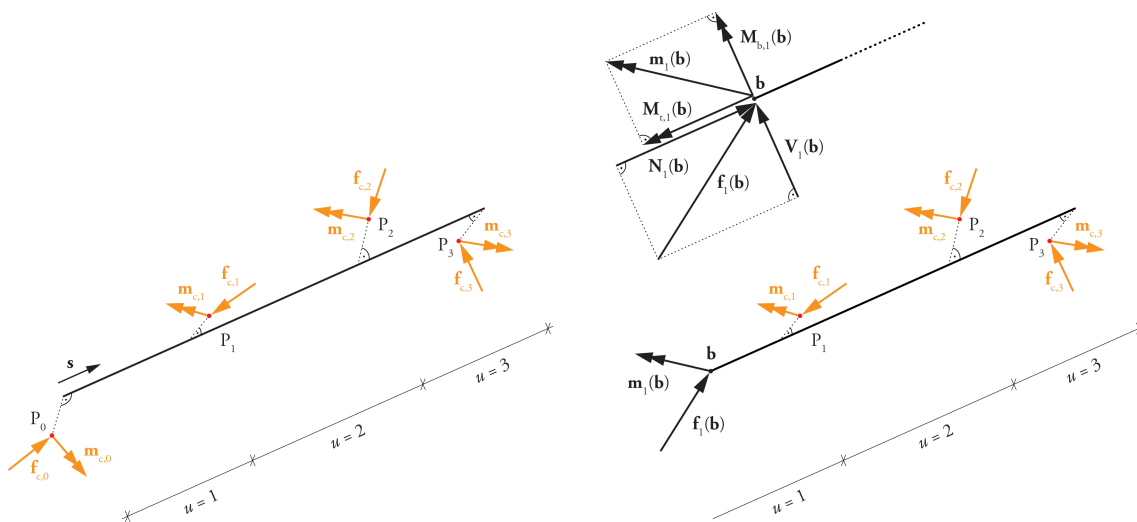


Abb. 106: a) links: Beispielhafte Darstellung aller möglichen Interaktionsgrößen an einem Stab; b) rechts: Prinzip der Schnittgrössenermittlung, Bereichsweise Ermittlung von \mathbf{f}_u und \mathbf{m}_u sowie Zerlegung derer in die klassischen Schnittgrößen.

Im Folgenden werden die visualisierten Verläufe der Schnittgrößen gezeigt. Dazu sind in Abbildung 107a beispielhaft für einen Stab die mittels Reziproker Analyse ermittelten Interaktionsgrößen einer möglichen Gleichgewichtslösung für das Tragsystem dargestellt. Abbildung 107b zeigt die daraus resultierende Visualisierung der Schnittgrößenverläufe. Die Verläufe der Normalkraft $N_u(\mathbf{b})$ und des Torsionsmoments $M_{t,u}(\mathbf{b})$ werden jeweils dadurch erzeugt, dass an jeder Stelle \mathbf{b} des Stabs ein orthogonal zu dessen Achse orientierter Kreis beschrieben wird, dessen Radius dem Betrag des Vektors entspricht, wobei zwischen negativem und positivem Wert farblich unterschieden wird. Da sich die Beträge der beiden Vektoren innerhalb eines Stababschnitts u nicht ändern, resultieren die dargestellten Verläufe mit zylindrischer Gestalt. Die Verläufe der Querkraft $V_u(\mathbf{b})$ und des Biegemoments $M_{b,u}(\mathbf{b})$ werden dadurch erzeugt, dass an jeder Stelle \mathbf{b} der entsprechende Vektor vom Angriffspunkt wegweisend einbeschrieben wird. Da die Vektoren von Querkraft und Biegemoment per Definition senkrecht zur Stabachse orientiert sind, werden deren Verläufe im Allgemeinen durch eine Regelfläche beschrieben. Während sich das Biegemoment in Richtung und Betrag innerhalb eines Abschnitts u ändern kann, bleiben diesbezüglich bei der Querkraft beide konstant, wodurch ihr Verlauf die Gestalt eines ebenen Rechtecks aufweist.

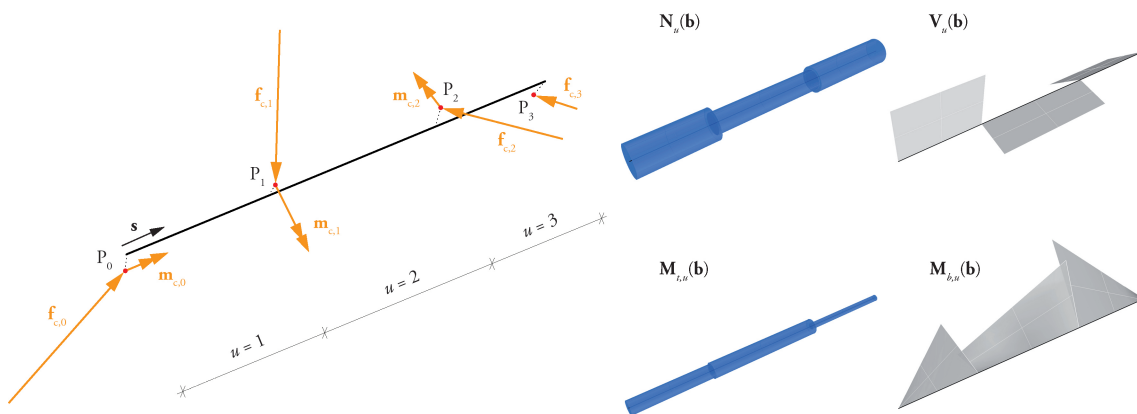


Abb. 107: a) links: Beispiel eines Stabs mit den Interaktionsgrößen einer möglichen Gleichgewichtslösung für das Gesamtsystem; b) rechts: Verläufe der Schnittgrößen Normalkraft, Querkraft, Torsionsmoment und Biegemoment bezüglich der Stabachse.

Aus den maximalen Schnittgrößen erfolgt die Bemessung des erforderlichen Querschnitts der Stäbe im Tragwerk. Diese kann, auch im Hinblick auf unterschiedliches Materialverhalten, entweder auf der Basis einer elastischen oder plastischen Spannungsverteilung erfolgen. Die erforderlichen Querschnitte aller Stäbe werden als Wert, wie beispielsweise das Materialgewicht des Gesamttragwerks, quantifiziert, um daran den Systemzustand bezüglich des definierten Kriteriums beurteilen zu können.

6.5 Einfluss der variablen Systemparameter auf die Materialmenge im linearen System

In diesem Abschnitt werden die Zusammenhänge zwischen den variablen Systemparametern und der erforderlichen Materialmenge der Stäbe aufgezeigt, zuerst aufgrund der besseren Anschaulichkeit an einem Tragsystem, das als linearer Sonderfall gemäss Abschnitt 3.3.4 ausgebildet ist. Dabei wird die Ermittlung der erforderlichen Stabquerschnitte beispielhaft unter folgenden Bedingungen durchgeführt:

- Das Material der Stäbe ist Nadelholz C24.
- Die geometrische Ausbildung der Stäbe ist prismatisch mit kreisrundem Vollquerschnitt.
- Berücksichtigt werden die Maximalwerte von Normalkraft und Biegemoment unter zusätzlicher Beachtung von Knicken und Kippen.
- Es liegen die Verfahren des Schweizer Normenwerks SIA 265 [2] zugrunde.

Aufgrund der besseren Darstellbarkeit reduziert sich das gezeigte Beispiel auf die Betrachtung von zwei Stäben des Gesamtsystems, sowohl was die Variation der Systemparameter betrifft als auch bezüglich des Materialaufwands. Abbildung 108a zeigt dieses Teilsystem mit den daran angreifenden Einwirkungen. In Abbildung 108b sind die Subsysteme der beiden Stäbe dargestellt. Die Wirkungen der unbekannteren Inter-

aktionskräfte werden durch Erzeugende so eingeschränkt, dass die Freiheitsgrade bezüglich der Gleichgewichtsbetrachtungen in den Subsystemen eliminiert sind. Aufgrund der dargestellten Wahl der kombinatorischen Eigenschaften der Erzeugenden umfassen die variablen Systemparameter des Optimierungsmodells den Winkel β als parametrische Eigenschaft der Erzeugenden $\mathbf{e}_{f,3,1} = \mathbf{e}_{f,1,1}$ und des Weiteren die Öffnungsweite r der Verbindung. In Abbildung 108c sind beispielhaft die Verläufe von Normalkraft und Biegemoment in den Stäben bezüglich ihrer Achse dargestellt. Aus den darin bezeichneten Maximalwerten resultiert die erforderliche Materialmenge der Stäbe des Tragwerks. Die äusseren Einwirkungen $\mathbf{f}_{I,0}$, $\mathbf{f}_{I,2}$, $\mathbf{f}_{II,1}$ und $\mathbf{f}_{II,3}$ des Teilsystems werden als konstant angenommen.

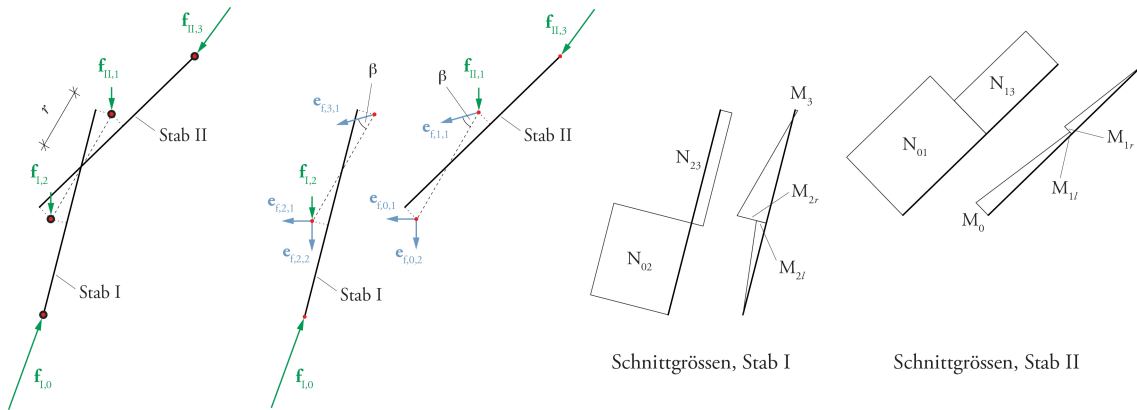


Abb. 108: a) links: Betrachtetes lineares Teilsystem mit einwirkenden Kräften; b) mittig: Subsysteme der beiden Stäbe mit kombinatorischen Eigenschaften der Erzeugenden; c) rechts: Verläufe der Schnittgrößen N und M für beide Stäbe bezüglich eines spezifischen Systemzustands in Abhängigkeit der variablen Systemparameter r und β .

Der Wertebereich der Neigung der variablen Erzeugenden ist $0^\circ < \beta < 180^\circ$, wobei β den Winkel zu der in Abbildung 108a gestrichelten Geraden beschreibt, welche in diesem Fall der Tangentialebene bei räumlichen Tragsystemen entspricht. Im Wertebereich des Neigungswinkels β sind die Randwerte ausgenommen, da sich für diese bei der reziproken Betrachtung einer Verbindung mit den Gleichgewichtsbedingungen keine Lösung ermitteln lässt.

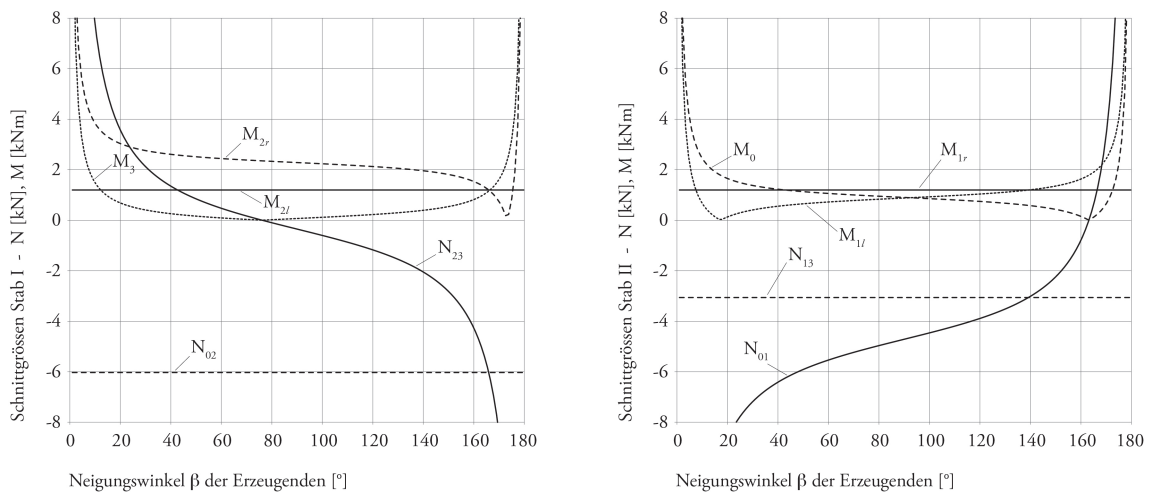


Abb. 109: Diagramme mit Funktionen der Maximalwerte von Normalkraft und Biegemoment in Abhängigkeit des Neigungswinkels β . a) links: Stab I; b) rechts: Stab II.

Die in Abbildung 109 dargestellten Funktionen veranschaulichen, für die Stäbe I und II, die Veränderung der maximalen Schnittgrößen N und M , wenn der Neigungswinkel β innerhalb seines Wertebereichs variiert. Die Diagramme zeigen ein unterschiedliches Verhalten der Maximalwerte an den massgebenden Stellen des Stabs. Da die Stäbe bezüglich ihrer Länge mit konstantem Querschnitt angenommen werden, können die für die Bemessung massgebenden Werte an unterschiedlichen Stellen des Stabs auftreten. Die folgenden zwei Diagramme aus Abbildung 110 zeigen nur noch die Funktionen der bemessungsrelevanten Schnittgrößen, sowie des Weiteren die aus den erforderlichen Querschnitten resultierende Materialmenge

Φ , welche als Volumen angegeben wird. Diese erforderliche Materialmenge als Funktion des Neigungswinkels β weist innerhalb ihres Wertebereichs ein globales Minimum auf. Weiter zeigen die Diagramme die primäre Abhängigkeit des erforderlichen Materialvolumens von der Biegebeanspruchung der Stäbe, während die Normalkraft nur einen sekundären Einfluss hat. Ergänzend ist anzumerken, dass der treppenartig erscheinende Verlauf des Volumens aus der Abstufung der zugrunde gelegten Querschnittsmasse auf einem Raster von 2 cm resultiert.

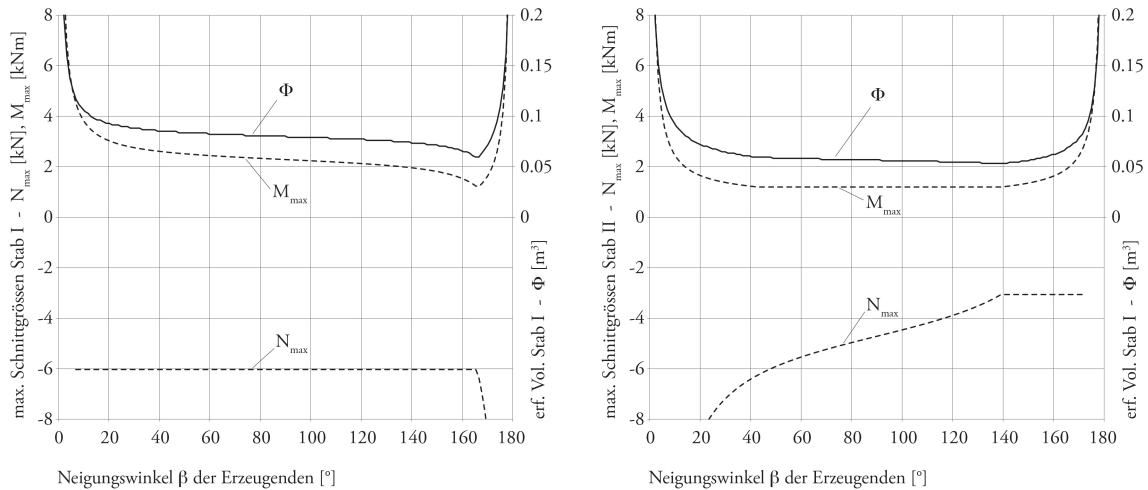


Abb. 110: Diagramme mit Funktionen der bemessungsrelevanten Werte von Normalkraft und Biegemoment, sowie dem daraus resultierenden Materialvolumen in Abhängigkeit des Neigungswinkels β . a) links: Stab I; b) rechts: Stab II.

Im Folgenden wird der Einfluss der Öffnungsweite, dem zweiten variablen Systemparameter, untersucht. Hierzu werden in Abbildung 111 für verschiedene Beträge der Öffnungsweite r die Funktionen der Summe des erforderlichen Materialvolumens der beiden Stäbe in Abhängigkeit des Neigungswinkels β dargestellt. Für den Wertebereich der Öffnungsweite der reziproken Verbindung gilt $r > 0$, da hier ebenfalls der Randwert $r = 0$ nicht eingeschlossen werden kann, weil für diesen Fall bei der Betrachtung als reziproke Verbindung keine Lösung der Gleichgewichtsbedingungen existiert.

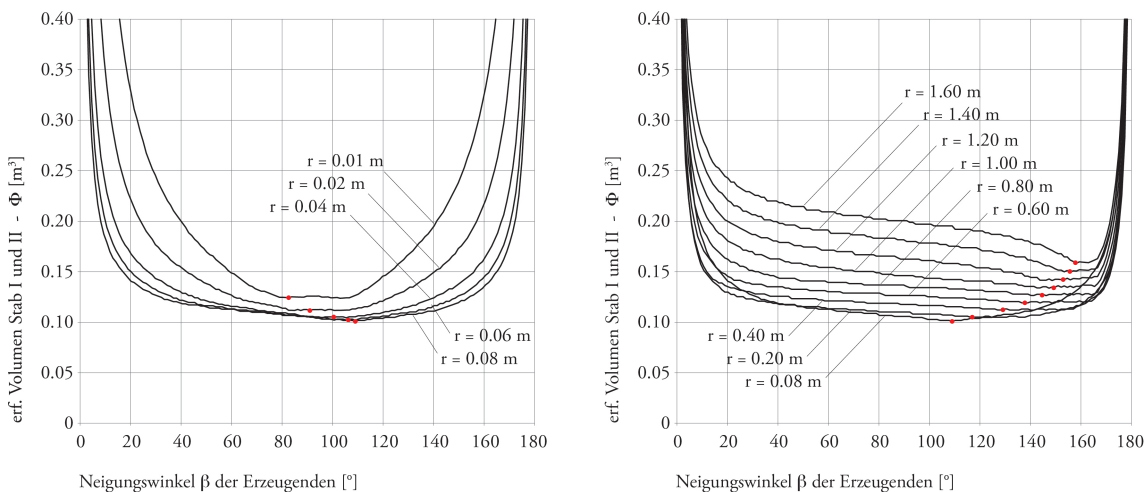


Abb. 111: Funktionen des erforderlichen Materialvolumens in Abhängigkeit des Neigungswinkels β für verschiedene Öffnungsweiten r . a) links: Funktionen für Fälle in denen r kleiner gleich demjenigen Wert ist, für welchen $\Phi(\beta)$ den Minimalwert erreicht; b) rechts: Funktionen für Fälle in denen r grösser gleich demjenigen Wert ist, für welchen $\Phi(\beta)$ den Minimalwert erreicht.

Diese Darstellung verdeutlicht einerseits, dass jede Funktion der Schar genau ein Minimum innerhalb des Wertebereichs aufweist. Dies bedeutet, für jeden Betrag r der Öffnungsweite existiert genau ein Neigungswinkel β der Erzeugenden $e_{f,3,1} = e_{f,1,1}$, bei welchem die erforderliche Materialmenge des Stabs minimal ist (rote Punkte in Abbildung 111). Andererseits zeigt die Gegenüberstellung in Abbildung 111, dass die erforderliche Materialmenge als Funktion von beiden variablen Systemparametern ebenfalls ein globales

Minimum innerhalb des Wertebereichs aufweist. Das heisst, für jede Konfiguration, deren Randbedingungen durch die konstanten Systemparameter definiert sind, existiert ein Wertepaar der variablen Systemparameter Neigungswinkel β und Öffnungsweite r , für welche das Beurteilungskriterium der erforderlichen Materialmenge ein Minimum aufweist. Im Fall des gezeigten Beispiels wäre dies für das Wertepaar $r = 0.08 \text{ m} / \beta = 109^\circ$ erfüllt. Das Ziel des Optimierungsmodells dieser Arbeit besteht darin, die dazu vergleichbaren Werte der variablen Systemparameter in allgemeinen Tragsystemen mit diskretisierten räumlichen Flächen zu finden.

Die Wertepaare der variablen Systemparameter, welche für das Beurteilungskriterium ein Optimum liefern, verändern sich mit der Geometrie des Tragsystems, im Speziellen mit der Krümmung an der reziproken Verbindung. Zur Veranschaulichung dessen wird in der folgenden Studie der Winkel κ zwischen den beiden Stäben des betrachteten Teilsystems variiert (vgl. Abb. 112). Von den 13 untersuchten Geometrien weist die 7. einen Winkel κ auf, der innere Kräfte ermöglicht, infolge derer die Stäbe durch einen Normalspannungszustand beansprucht sind.

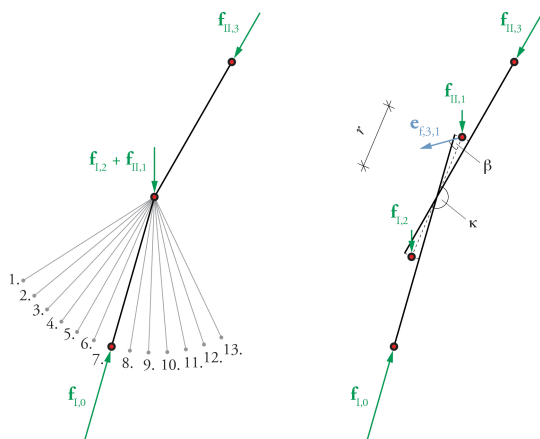


Abb. 112: Variation des Winkels κ zwischen den beiden Stäben des betrachteten Teilsystems.

Für jede der 13 Geometrien wird eine Variation der variablen Systemparameter, vergleichbar mit jenen aus den Abbildungen 109 bis 111, durchgeführt. Als Resultat daraus zeigen die Diagramme der folgenden Abbildungen 113 und 114 für jede Geometrie jeweils die erforderliche Materialmenge als Funktion eines der beiden variablen Systemparameter, wobei der andere jeweils so gewählt ist, dass das Minimum der dargestellten Funktion auch das globale Minimum bezüglich der Geometrie ist.

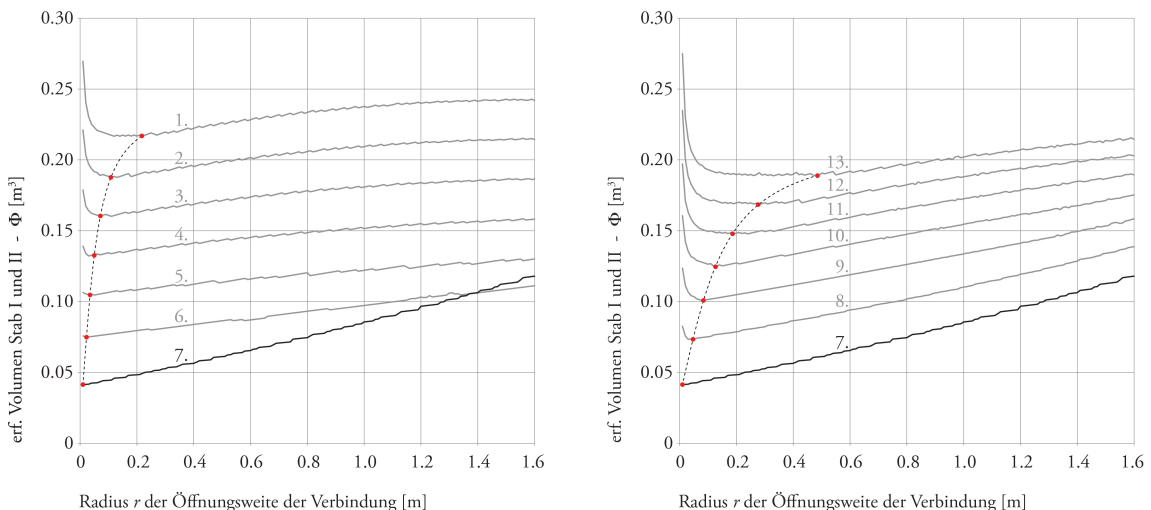


Abb. 113: Einfluss der Öffnungsweite r auf die erforderliche Materialmenge der Stäbe bezüglich der 13 im Beispiel untersuchten Geometrien. a) links: Geometrien 1 bis 7; b) rechts: Geometrien 7 bis 13.

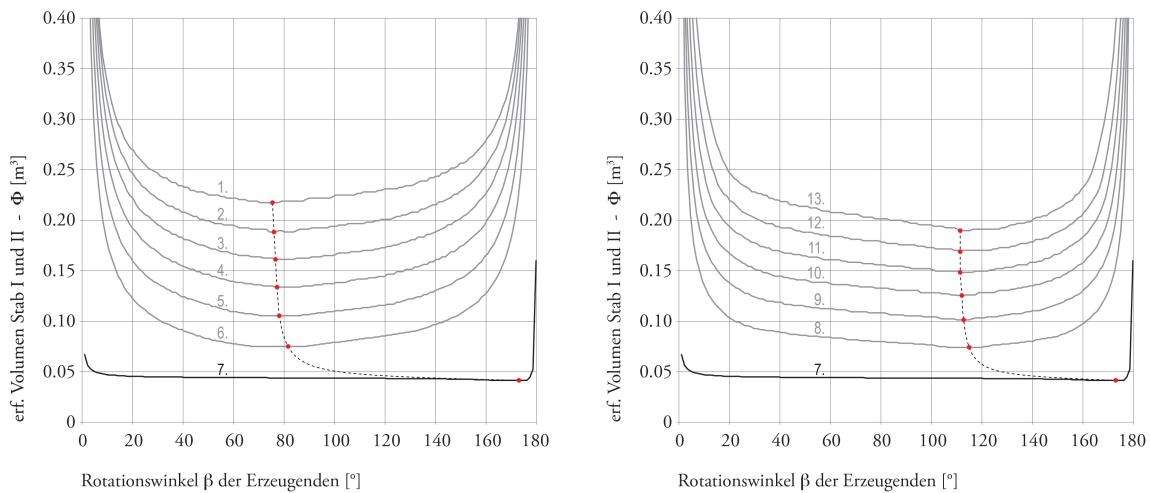


Abb. 114: Einfluss des Neigungswinkels β auf die erforderliche Materialmenge der Stäbe bezüglich der 13 im Beispiel untersuchten Geometrien. a) links: Geometrien 1 bis 7; b) rechts: Geometrien 7 bis 13.

Wie die Diagramme aufzeigen, resultieren sowohl aus der Variation der Öffnungsweite (vgl. Abb. 113) als auch aus derjenigen des Neigungswinkels der Erzeugenden (vgl. Abb. 114) bei den Geometrien 1 bis 6 und 8 bis 13 Funktionen, die innerhalb ihres Wertebereichs ein globales Minimum aufweisen. Die Ausnahme bildet die Geometrie 7, bei welcher eine Lastabtragung ohne Biegebeanspruchung der Stäbe möglich ist. Das Minimum der Materialmenge tritt hier für das Wertepaar $r = 0.0\text{ m} / \beta = 180^\circ$ auf, wovon beide nicht innerhalb der Wertebereiche der variablen Systemparameter liegen, innerhalb derer eine Lösung der Gleichgewichtsbedingungen bei einer reziproken Betrachtung der Verbindung existiert. Da die Methode dieser Arbeit Verbindungen reziprok betrachtet, kann damit für diesen Fall der Funktionswert des erforderlichen Materialvolumens nur als Annäherung an $r \rightarrow 0.0\text{ m}$ und $\beta \rightarrow 180^\circ$ ermittelt werden. Die exakte Bestimmung kann durch die Betrachtung als singuläre Verbindung erfolgen.

Das Beispiel veranschaulicht in vereinfachter Art den Einfluss der beiden variablen Systemparameter auf den daraus resultierenden Materialaufwand für das Tragwerk. Bei der Erweiterung der Betrachtung in die dritte Dimension zeigen die folgenden Abschnitte Beispiele für räumlich gekrümmte Tragstrukturen gemäss des in Kapitel 3 eingeführten Tragsystems.

6.6 Wahl der Systemparameter

Die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Referenzgitter als konstante Systemparameter werden möglichst ohne Gerichtetheit (vgl. Abschnitt 5.5.1) ausgebildet und weisen in jeder reziproken Verbindung die gleiche Stabanzahl auf. Des Weiteren wird die Dichte der Struktur nach Möglichkeit an Stellen erhöht, wo die zu diskretisierende räumliche Fläche eine grössere Krümmung aufweist.

Wie in Abschnitt 6.2 erläutert, wird im Rahmen des hier aufgezeigten Ansatzes für das Optimierungsmodell angestrebt, dass alle Stäbe identische kombinatorische Eigenschaften der Erzeugenden aufweisen. Damit die inneren Kräfte im Rahmen des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie steuerbar sind, müssen im Gesamtsystem Freiheitsgrade bezüglich der Gleichgewichtsbedingungen existieren. Demzufolge sind kombinatorischen Eigenschaften gemäss Abbildung 105 links ungeeignet. In diesem Fall existieren keine Interaktionsmomente, wodurch das Gesamtsystem gemäss Abschnitt 5.4 statisch bestimmt ist und demnach infolge jeder äusseren Last nur eine Möglichkeit einer Gleichgewichtslösung der inneren Kräfte existiert. Um einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen der Wahl der Erzeugenden und den Interaktionsgrössen des Tragsystems herzustellen, werden alle Erzeugenden, aus welchen die Methode der Reziproken Analyse eine Interaktionsgrösse ermittelt, nur an einem Interaktionspunkt angenommen (vgl. Abb. 88, zweites von links). Dadurch sind die Einschränkungen auf Wirkungsräume, Wirkungsebenen oder Wirkungseraden, welche für die partiellen Reaktionsgrössen angenommen werden, identisch mit denjenigen der resultierenden Interaktionsgrössen, wodurch die Annahmen in direkter Art das Tragverhalten des Systems steuern. Um die metaphorische Systemeigenschaft des reziproken Tragens und Belastens der Stäbe umzusetzen, werden alle Erzeugenden partieller Reaktionsgrössen an den Endinteraktionspunkten angenommen.

Aus diesen gesetzten Randbedingungen, sowie dem Bestreben einer geringen Momententragfähigkeit des Knotens, um ihn konstruktiv einfach ausbilden zu können, resultiert die in Abbildung 115 dargestellte Annahme der kombinatorischen Eigenschaften der Erzeugenden für die Tragsysteme, welche beispielhaft in diesem Kapitel behandelt werden.

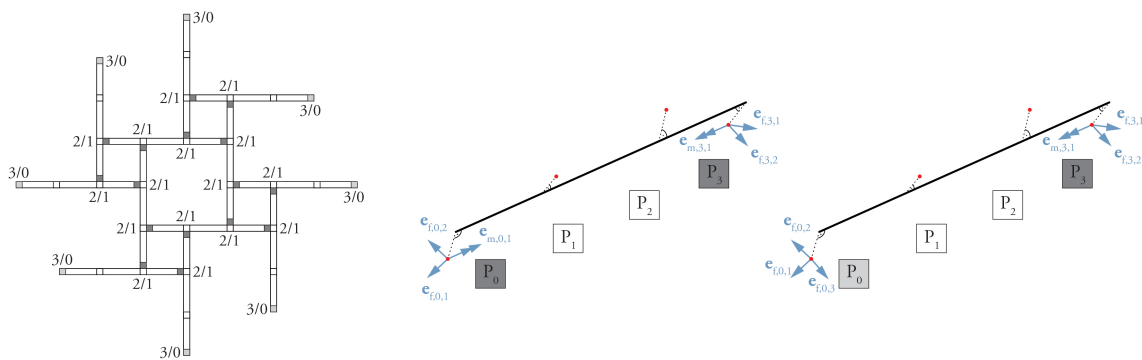


Abb. 115: Annahmen der kombinatorischen Eigenschaften der Erzeugenden der in diesem Kapitel behandelten Tragsysteme. a) links: Ebene Projektion des Systems mit der resultierenden Anzahl von Erzeugenden der Interaktionsgrößen (Kraft/Moment); b) mittig: Subsystem der inneren Stäbe mit den Erzeugenden in den Interaktionspunkten; c) rechts: Subsystem der Randstäbe mit den Erzeugenden in den Interaktionspunkten.

Die zwei Erzeugenden für die jeweiligen Momente sind so gesetzt, dass die daraus resultierende Interaktionsgrösse als Torsionsmoment wirkt (vgl. Abb. 115b). Dies erscheint sinnvoll, da Interaktionskräfte, die in einem flachen Winkel zur Tangentialebene der Struktur verlaufen, bedingt durch den Versatz der inneren und der Endinteraktionspunkte, Torsion im Stab erzeugen. Die Aufnahme eines Torsionsmoments wird bereits mit der Konstruktion einfacher Verbindungstypen, wie etwa in Abbildung 93 dargestellt, gewährleistet. Um die Auflager des Gesamtsystems einfach ausbilden zu können, werden an den daran anschliessenden Endinteraktionspunkten der Stäbe keine Torsionsmomente ermöglicht, und stattdessen drei Erzeugende für die Interaktionskraft angenommen (vgl. Abb. 115c).

Für die variablen Systemparameter erfolgt innerhalb des Optimierungsprozesses die Ermittlung derjenigen Werte, für die das aus dem System resultierende Tragwerk ein Minimum der Materialmenge aufweist. Wie in Abschnitt 1.4.2 dargelegt, hat der Grad der Biegebeanspruchung in den Tragelementen einen grossen Einfluss auf die Menge des erforderlichen Materials sowie auf den Konstruktionsaufwand der Knoten (siehe Abschnitt 2.2). Letzteres wird jedoch wie bereits erwähnt im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt, und es besteht lediglich die Forderung nach konstruktiv einfach umsetzbaren Knotentypen. Aus dem hier gesetzten Optimierungsziel der Minimierung der Materialmenge der Stäbe resultiert demnach tendenziell das Bestreben, die Biegebeanspruchung der Stäbe zu reduzieren.

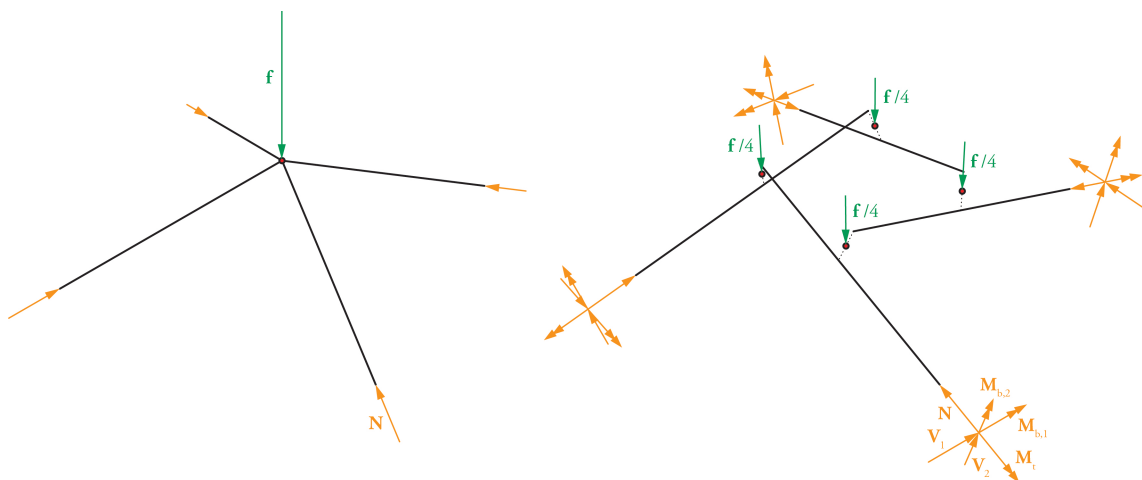


Abb. 116: Mögliche Schnittgrößen in den Stäben des Tragsystems. a) links: Singuläre Verbindung; b) rechts: Reziproke Verbindung.

Zwischen der Beanspruchung der Stäbe durch Biegung und den beiden variablen Systemparametern bestehen folgende Zusammenhänge. Einerseits werden durch die parametrischen Eigenschaften der Erzeugenden die Richtungen der Interaktionskräfte gesteuert. Je grösser deren Winkel zu den Stäben ist, desto höher ist der Anteil an Biegebeanspruchung der Stäbe (vgl. Abb. 23 in Abschnitt 1.4.2). Andererseits wird durch die Öffnungsweite einer reziproken Verbindung die Biegebeanspruchbarkeit des Systems für Kräfte senkrecht zu seiner Oberfläche verändert und die diesbezügliche Traglast steigt, mit grösser werdendem r (vgl. Abb. 45 in Abschnitt 2.2.2).

Als Extremzustände bezüglich der variablen Systemparameter können die folgenden beiden definiert werden. Die singuläre Verbindung mit $r = 0$ (vgl. Abb. 116a), welche nur möglich ist, wenn ausschliesslich Kräfte als Interaktionsgrössen existieren, die auf den Stabachsen wirken und die Geometrie das Gleichgewicht mit der einwirkenden Last am Knoten ermöglicht. In diesem Fall ist für die Stäbe bezüglich Schnittgrössen nur die Aufnahme von Normalkräften erforderlich, und für deren Beanspruchung resultiert ein reiner Normalspannungszustand. Wie in Abschnitt 6.5 erwähnt, kann der Fall $r = 0$ mit der Methode der Reziproken Analyse nur angenähert werden. Der andere Extremzustand einer Verbindung ist der mit maximaler Öffnungsweite, welcher aufgrund der Erläuterungen in Abschnitt 3.2 hier mit $r_{max} = 0.5 \cdot \min(l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ definiert wird. In diesem Zustand sind beliebig wirkende Interaktionsgrössen möglich, die nur betragsmässig durch die Fließbedingungen des Materials beschränkt sind, und die Existenz einer Gleichgewichtslösung der inneren Kräfte ist unabhängig von der Geometrie. In diesem Fall der Verbindung müssen die Stäbe jegliche Art von Schnittgrössen aufnehmen können. Die Komponenten der Interaktionskräfte, welche senkrecht zur Oberfläche des Tragsystems wirken, erzeugen die in Abbildung 116b durch \mathbf{V}_2 bezeichnete Querkraft, das Biegemoment $\mathbf{M}_{b,1}$ sowie das Torsionsmoment \mathbf{M}_t . Sowohl die Schnittkräfte \mathbf{N} und \mathbf{V}_1 , als auch die Schnittmomente $\mathbf{M}_{b,2}$ und \mathbf{M}_t , werden von den Anteilen der Interaktionskräfte, die tangential im System wirken, erzeugt. Dieser Einfluss steigt mit einer grösser werdenden Öffnungsweite (vgl. Abb. 45).

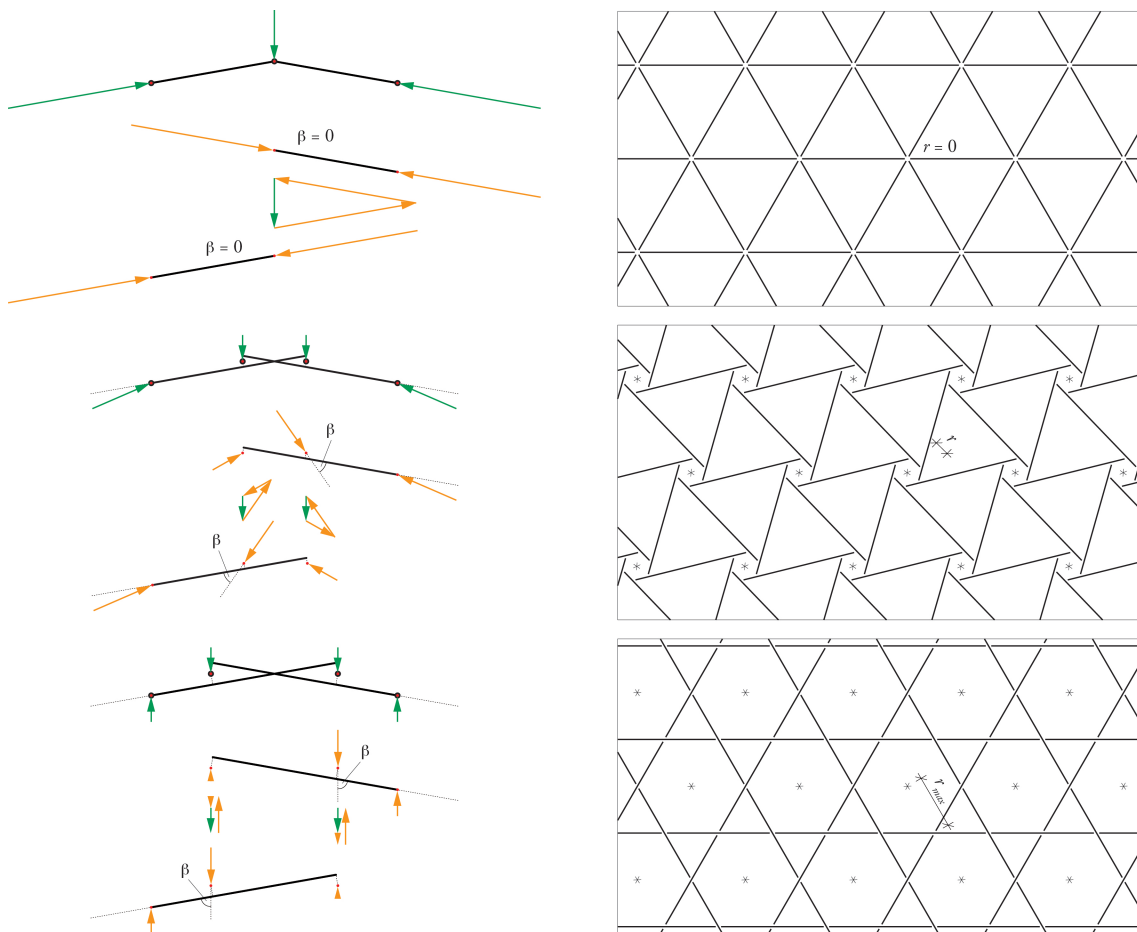


Abb. 117: Vereinfachte Darstellung der Strategie des Optimierungsprozesses für die beiden variablen Systemparameter. a) links: Neigungswinkel β der Interaktionskräfte (Vereinfachte Darstellung als lineares Tragsystem); b) rechts: Entsprechend angepasste Öffnungsweite r der Verbindung als ebene Projektion dargestellt.

Da das primäre Bestreben die Reduktion der Biegebeanspruchung in den Stäben ist, kann die Strategie des Optimierungsprozesses wie folgt formuliert werden (vgl. Abb. 117): Durch die Annahme der Erzeugenden werden die Interaktionskräfte möglichst nahe an die Tangentialebene des Tragsystems angenähert, um den Anteil der Biegebeanspruchung senkrecht zur Oberfläche zu reduzieren. Je mehr diese Annäherung möglich ist, desto kleiner wird die Öffnungsweite, um auch die Biegebeanspruchung der Stäbe infolge tangential wirkender Interaktionskräfte zu reduzieren. Im Rahmen des Optimierungsprozesses ist nicht auszuschließen, dass das Minimum der Materialmenge auch für Fälle existieren kann, bei welchen nicht die minimal mögliche Biegebeanspruchung im Tragwerk vorliegt.

Wie in den Beispielen des linearen Tragwerks in Abschnitt 6.5 werden auch im Folgenden die parametrischen Eigenschaften der Erzeugenden durch einen Neigungswinkel beschrieben. Im Fall eines räumlichen Tragsystems ist dies der Winkel β zwischen der durch die zwei Erzeugenden beschriebenen Wirkungsebene am Endinteraktionspunkt und einer Ebene, welche der dortigen Tangentialebene entspricht (vgl. Abb. 118b). Diese definiert sich bezüglich des anschliessenden Knotens der Verbindung durch folgende zwei Richtungen: Zum einen die direkte Verbindung zum antizyklisch nächstliegenden Knoten der reziproken Verbindung, und zum anderen durch die Stabachse des Nachbarstabs in Gegenrichtung des Verbindungszyklus (vgl. Abb. 118a).

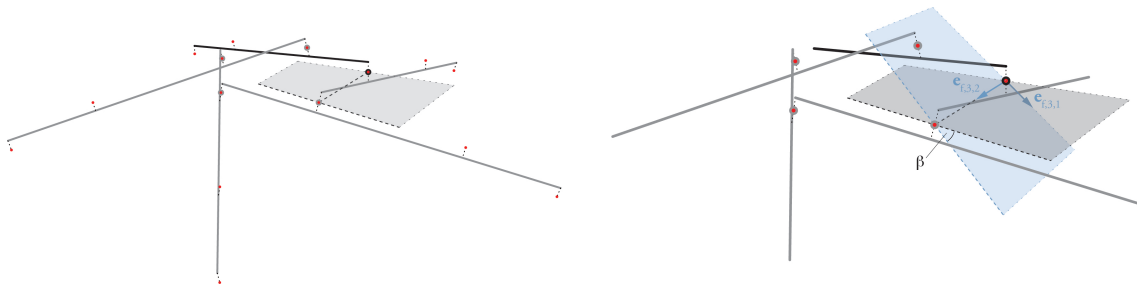


Abb. 118: a) links: Ebene, welche als Tangentialebene des Tragwerks in einem Knoten definiert wird; b) rechts: Neigungswinkel β zwischen der Wirkungsebene der Kraft am Endinteraktionspunkt eines Stabs und der Tangentialebene.

Auf diese Weise kann für jeden Knoten einer Verbindung der Neigungswinkel β der dort wirkenden Interaktionskraft individuell gesteuert werden. Um die Anzahl der Variablen im Gesamtsystem zu reduzieren, wird im hier entwickelten Ansatz für das Optimierungsmodell angenommen, dass die Neigungen an allen Interaktionspunkten einer reziproken Verbindung rotationssymmetrisch bezüglich deren Normalenvektor sind. Somit können die variablen Systemparameter für jede Verbindung des Tragsystems durch ein Wertepaar r/β beschrieben werden.

6.7 Einfluss der variablen Systemparameter auf die Materialmenge im räumlichen System

Bei allen in dieser Arbeit durchgeführten räumlichen Beispielen wurde als Benutzeroberfläche der geometrischen Ein- und visuellen Ausgabe, die 3D-CAD-Software Rhinoceros 5.0 von McNeel Inc. verwendet, sowie für die Algorithmen der Analyse- und Optimierungsmethode Plug-Ins entwickelt. Diese wurden aufgrund der hohen Leistungsanforderung mit der Programmiersprache C++ erstellt. Aufgrund der erforderlichen Rechenoperationen mit grossen Matrizen innerhalb der Methode der Reziproken Analyse wurde auf die diesbezüglich performancestarke Math Kernel Library von Intel zurückgegriffen. Die Ermittlung der erforderlichen Materialmenge wird unter den folgenden Randbedingungen durchgeführt:

- Auf das Tragsystem wirkt eine gleichmässig verteilte äussere Last.
- Das Material der Stäbe ist Stahl S235.
- Die geometrische Ausbildung der Stäbe ist prismatisch mit kreisrundem Hohlquerschnitt ROR.
- Berücksichtigt werden die Maximalwerte von Normalkraft, Biegemoment und Torsionsmoment unter zusätzlicher Beachtung von Knicken und Kippen.
- Es liegen die Verfahren des Schweizer Normenwerks SIA 263 [1] zugrunde.
- Bezüglich der Querschnitte werden plastische Widerstandsgrössen berücksichtigt.

In den Studien dieses Abschnitts zur Veranschaulichung des Einflusses der variablen Systemparameter auf die Materialmenge werden die Öffnungsweiten zwischen dem definierten Maximalwert $r = r_{max}$ und $r \approx 0$ (vgl. Abb. 119b und 119c), sowie die Neigungswinkel der Interaktionskräfte einer Verbindung zwischen $\beta = 90^\circ$ und $\beta \approx 0^\circ$ (vgl. Abb. 119a) variiert.

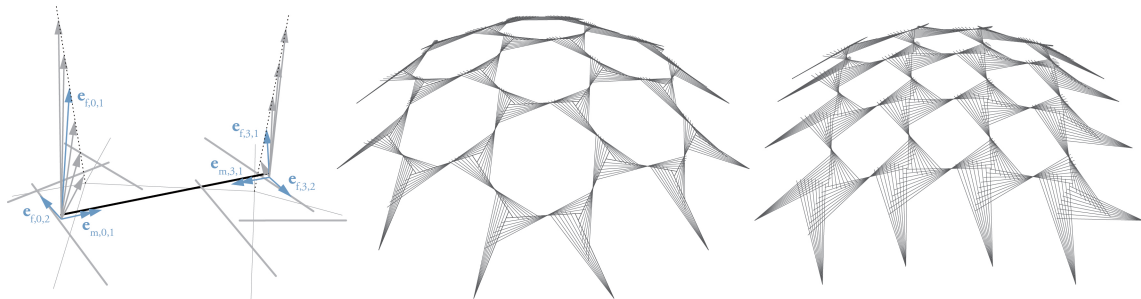


Abb. 119: a) links: Variation der parametrischen Eigenschaften der Erzeugenden an den Endinteraktionspunkten eines Stabs; b) mittig: Variation der Öffnungsweiten an einem Tragsystem mit 3-ständigen Verbindungen und Kugelkalotte als Referenzfläche; c) rechts: Variation der Öffnungsweiten an einem Tragsystem mit 4-ständigen Verbindungen und Kugelkalotte als Referenzfläche.

1. Studie

Die erste Studie veranschaulicht die erforderliche Materialmenge in Abhängigkeit der variablen Systemparameter für ein kuppelartiges Flächentragwerk, welches durch das Tragsystem diskretisiert beschrieben wird. Die kuppelartige Form bewirkt, dass infolge gleichmässig verteilter Lasten prinzipiell ein Tragverhalten möglich ist, bei welchem die Interaktionskräfte auf den Stabachsen verlaufen, wodurch eine Gleichgewichtslösung der inneren Kräfte für das Gesamtsystem existiert, wenn alle Verbindungen singular mit Öffnungsweite $r = 0$ sind.

Durch die Annahme von zwei unterschiedlichen Referenzgittern soll veranschaulicht werden, dass die Struktur des Referenzgitters einen Einfluss auf die Funktion Φ der Materialmenge in Abhängigkeit der variablen Systemparameter hat. Das Diagramm in Abbildung 120 zeigt dies für ein Tragsystem, bei welchem die reziproken Verbindungen dreiseitige Grundpolygone umschreiben (vgl. Abb. 119b), und das Diagramm in Abbildung 121 für ein solches mit 4-ständigen reziproken Verbindungen (vgl. Abb. 119c). In den Variationen dieser Studie wurde jeweils für alle Verbindungen das gleiche Wertepaar der Systemparameter r/β angenommen.

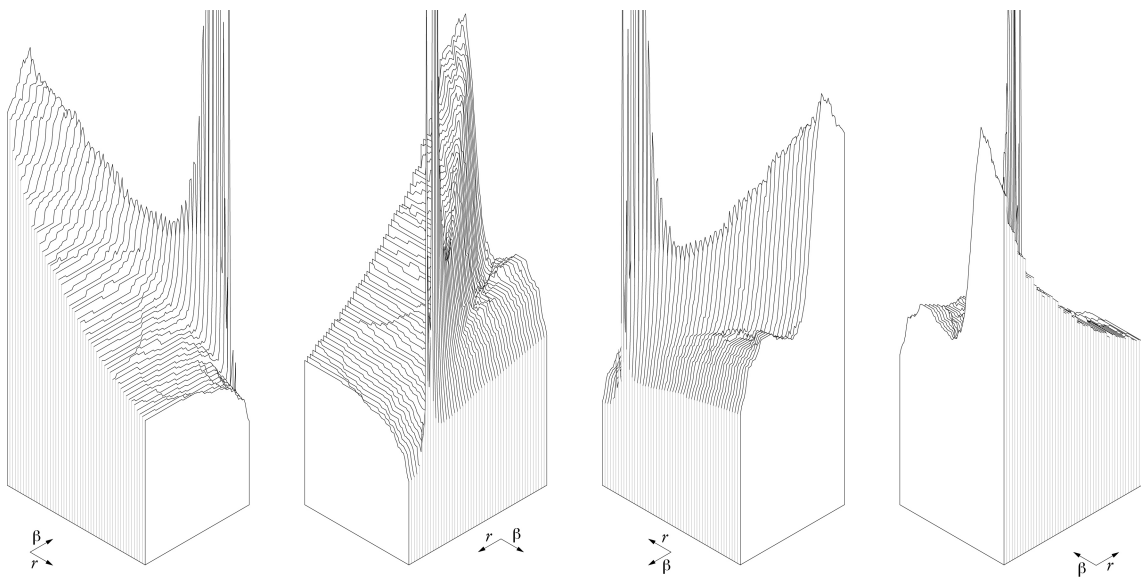


Abb. 120: Studie 1: Funktion Φ (4 Ansichten) eines Tragsystem mit 3-ständigen Verbindungen und Kugelkalotte als Referenzfläche (vgl. Abb. 119b), in Abhängigkeit von $\{r \mid r_{max} \geq r > 0\}$ und $\{\beta \mid 90^\circ \geq \beta > 0^\circ\}$, wobei beide jeweils in allen Verbindungen gleich gewählt sind.

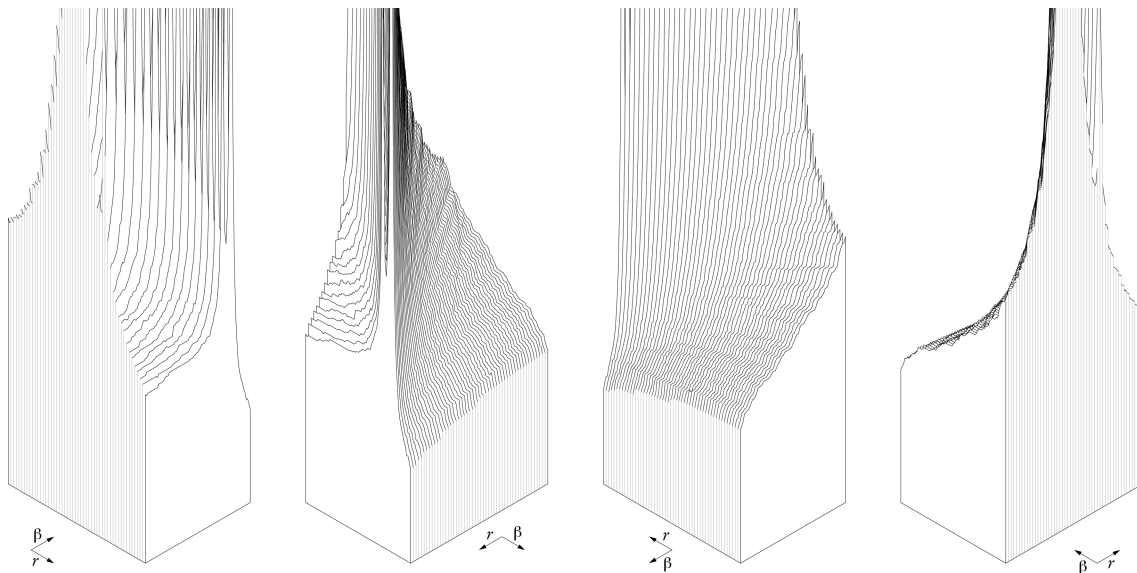


Abb. 121: Studie 1: Funktion Φ (4 Ansichten) eines Tragsystem mit 4-ständigen Verbindungen und Kugelkalotte als Referenzfläche (vgl. Abb. 119c), in Abhängigkeit von $\{r \mid r_{max} \geq r > 0\}$ und $\{\beta \mid 90^\circ \geq \beta > 0^\circ\}$, wobei beide jeweils in allen Verbindungen gleich gewählt sind.

Der Vergleich der beiden Funktionen zeigt prinzipiell ein ähnliches Grundverhalten, das einerseits im Diagramm durch einen Grat charakterisiert wird, der diagonal von $r = r_{max}/\beta = 90^\circ$ ungefähr nach $r \approx 0/\beta \approx 0^\circ$ verläuft und andererseits bei beiden das Funktionsminimum bei $r \approx 0/\beta \approx 0^\circ$ liegt. Die beiden Systeme unterscheiden sich darin, dass jenes mit 4-ständigen Verbindungen einen breiteren Grat aufweist und bei $r \approx 0$ die Funktion für $\beta \rightarrow 0^\circ$ sehr steil ihr Minimum erreicht. Das differenzierte Verhalten kann durch die unterschiedliche Kinematik der beiden Tragsysteme begründet werden (vgl. Abschnitt 2.2.2).

2. Studie

In der folgenden Studie wird das Verhalten der Funktion der erforderlichen Materialmenge für das kuppelartige Tragsystem in Abbildung 119c untersucht, in Bezug auf verschiedene Stichhöhen der Kugelkalotte (vgl. Abb. 122). Wiederum wurde jeweils für alle Verbindungen das gleiche Wertepaar der Systemparameter r/β angenommen.

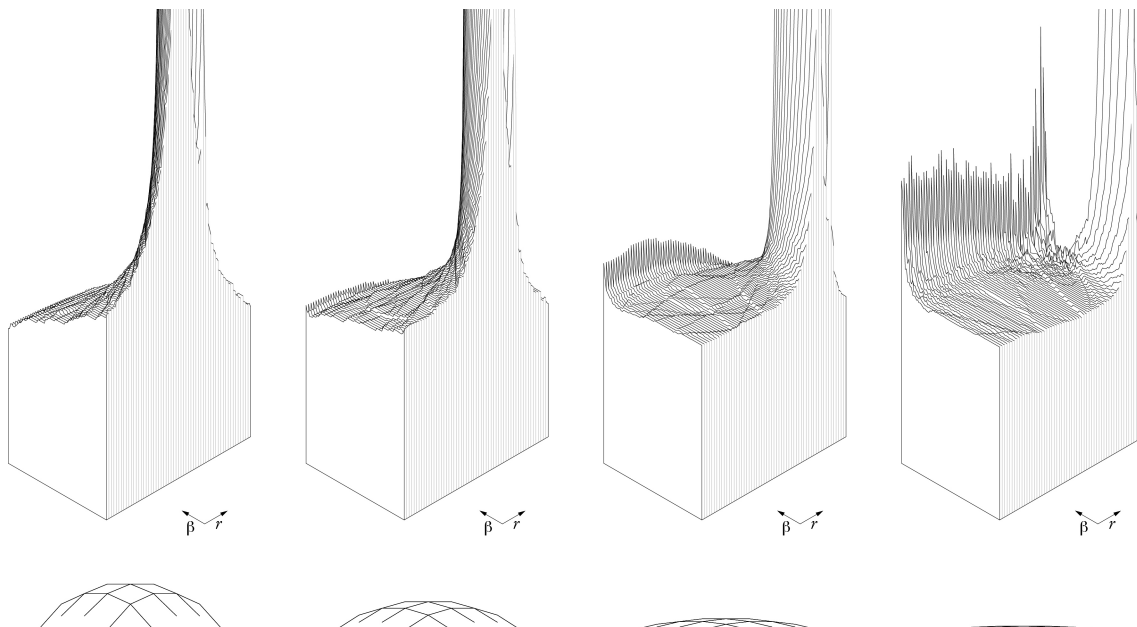


Abb. 122: Studie 2: Vier Funktionen Φ von Tragsystemen verschiedener Stichhöhen mit 4-ständigen Verbindungen und Kugelkalotte als Referenzfläche, in Abhängigkeit von $\{r \mid r_{max} \geq r > 0\}$ und $\{\beta \mid 90^\circ \geq \beta > 0^\circ\}$, wobei beide jeweils in allen Verbindungen gleich gewählt sind.

Dieser Vergleich beschreibt den parametrischen Übergang von einem räumlichen Tragsystem, in welchem für $r = 0$ ein Zustand der inneren Kräfte möglich ist, die ausschliesslich als Normalkräfte in den Stäben wirken, zu einem ebenen System, in welchem für $r > 0$ ein Zustand der inneren Kräfte möglich ist, in welchem keine Normalkräfte als Schnittgrössen in den Stäben wirken, sondern nur Querkräfte und Biegemomente. Hierbei kann das ebene Tragsystem nur angenähert werden, da mit den in Abschnitt 6.6 definierten Annahmen der kombinatorischen Eigenschaften der Erzeugenden die Freiheitsgrade in den Subsystemen nicht eliminiert sind.

Die Diagramme in Abbildung 122 zeigen eine Verschiebung des oben erwähnten Grats in der Funktion und lassen vermuten, dass dieser im ebenen Fall ganz verschwindet. Des Weiteren steigt bei abnehmender Krümmung der Materialaufwand stark für kleine Winkel β . Dies veranschaulicht, dass für Systeme mit geringer Krümmung ein Zustand der inneren Kräfte, die auf den Stabachsen wirken, bezüglich des Materialaufwands ungünstiger ist, als ein Zustand von inneren Kräften, welche Biegung erzeugen.

3. Studie

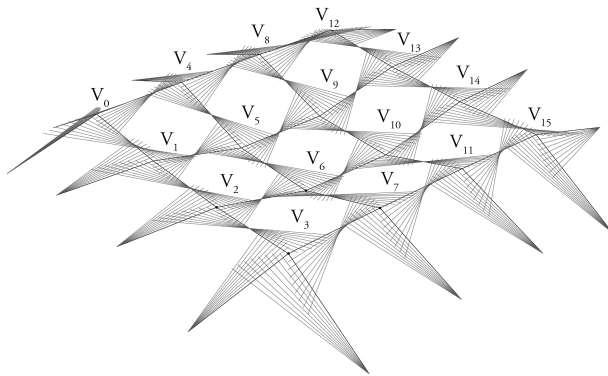


Abb. 123: Variation der Öffnungsweiten an einem Tragsystem mit 4-ständigen Verbindungen und einer Referenzfläche mit wechselnd konvexer und konkaver Krümmung.

Im Folgenden wird ein Tragsystem untersucht, das im Unterschied zu den obigen sowohl konvexe als auch konkave Krümmungen aufweist (vgl. Abb. 123). Diese Eigenschaft ist typisch, wenn Formen zugrunde liegen, die auf der in Abschnitt 1.2 zweitgenannten Haltung basieren. Für derartige Systeme kann kein Zustand gefunden werden, in welchem alle Verbindungen singulär ausgebildet sind, da die Biegebeanspruchbarkeit der Stäbe erforderlich ist, um einen Gleichgewichtszustand mit den äusseren Kräften zu ermöglichen.

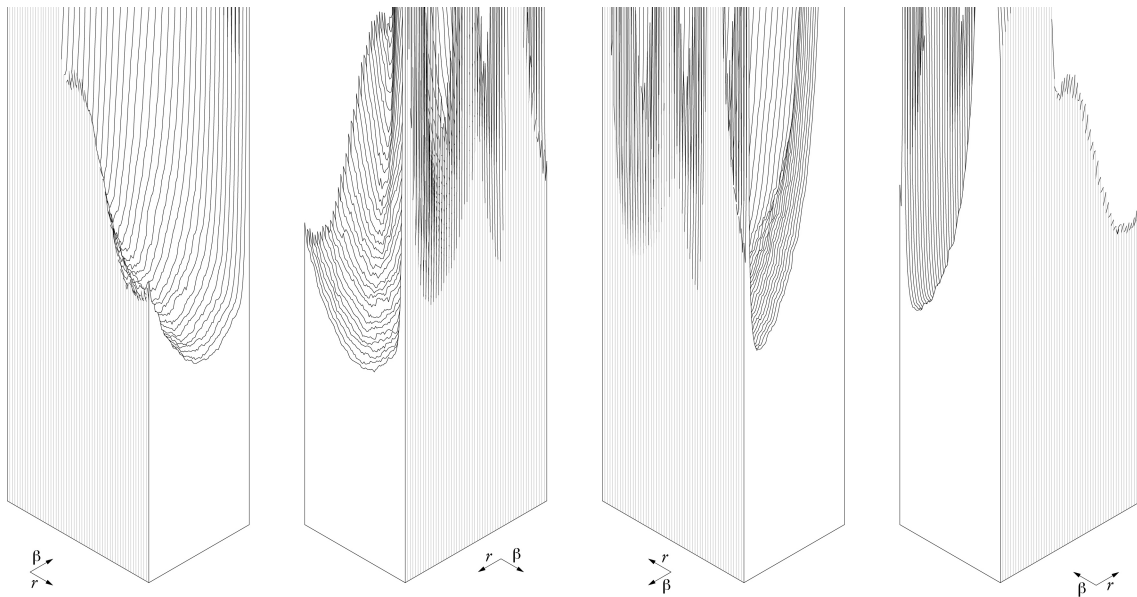


Abb. 124: Studie 3: Funktion Φ (4 Ansichten) eines Tragsystem mit 4-ständigen Verbindungen und einer Referenzfläche mit wechselnder Krümmungsrichtung (vgl. Abb. 123), in Abhängigkeit von $\{r \mid r_{\max} \geq r > 0\}$ und $\{\beta \mid 90^\circ \geq \beta > 0^\circ\}$, wobei beide jeweils in allen Verbindungen gleich gewählt sind.

Wenn die Variation, wie in den Studien 1 und 2, mit den Annahmen des gleichen Wertepaars der Systemparameter r/β in allen Verbindungen durchgeführt wird, weist die Funktion $\Phi(r, \beta)$ der Materialmenge ein stark anderes Verhalten auf verglichen mit jenem in den Abbildungen 120 und 121. Der Grund ist, dass nicht mehr die gleiche Krümmung an jeder Verbindung des Tragsystems existiert und demnach ein spezifischer Systemparameter in jeder Verbindung eine andersartige Auswirkung auf die erforderliche Materialmenge haben kann.

Dies kann durch die Betrachtung von Funktionen $\Phi(r_v, \beta_v)$ gezeigt werden, bei welchen nur in einer Verbindung die Systemparameter variiert werden, während diese in allen anderen konstant bleiben. Dazu zeigt Abbildung 125 exemplarisch $\Phi(r_v, \beta_v)$ für vier verschiedenen Verbindungen, und es wird deutlich, dass jede Verbindung ein individuelles Funktionsverhalten aufweist. So kann das Diagramm in Abbildung 124, oder vergleichbare Diagramme ähnlicher Geometrien, als Überlagerung von Diagrammen mehrerer unterschiedlicher Funktionsverhalten interpretiert werden.

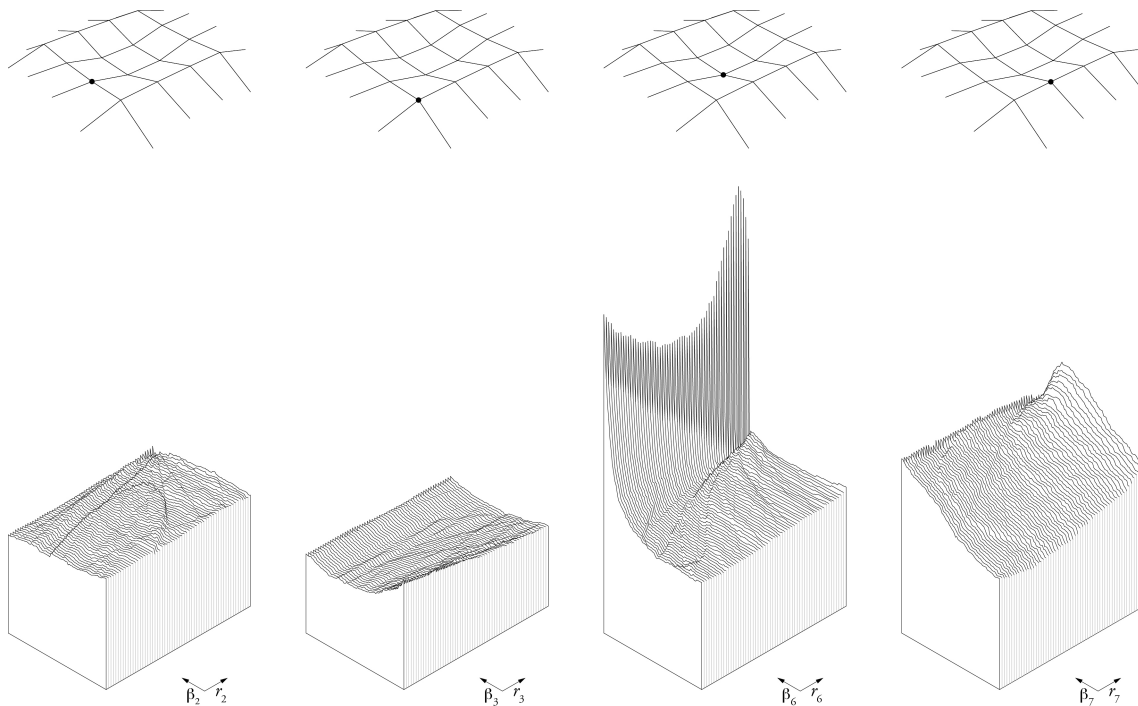


Abb. 125: Studie 3: Funktion $\Phi(r_v, \beta_v)$ für die Verbindungen V_2, V_3, V_6 und V_7 eines Tragsystem mit 4-stabigen Verbindungen und einer Referenzfläche mit wechselnder Krümmungsrichtung (vgl. Abb. 123), in Abhängigkeit von $\{r \mid r_{max} \geq r > 0\}$ und $\{\beta \mid 90^\circ \geq \beta > 0^\circ\}$.

4. Studie

Die Materialmenge des Tragsystems in Abhängigkeit der Wertepaare von variablen Systemparametern aller Verbindungen stellt eine Funktion im höherdimensionalen Raum dar. Wenn ein System w Verbindungen besitzt, dann ist Φ wie folgt eine Funktion von $2w$ Variablen:

$$\Phi(r_0, \beta_0, r_1, \beta_1, \dots, r_{w-1}, \beta_{w-1}).$$

Da für diese Funktion mehrere lokale Minima existieren, soll im Rahmen des hier entwickelten Ansatzes des Optimierungsmodells die in Abschnitt 6.1 erwähnte, umfassende Suchstrategie angewandt werden, da das Ziel dieser Arbeit nicht das Entwickeln von iterativen Algorithmen zur Lokalisierung von Funktionsextrema ist. Die umfassende Suche würde jedoch beispielsweise für das System in Abbildung 123 bedeuten: Wenn für jeden der 32 variablen Systemparameter 20 Werte in Frage kommen, dann müsste das Ermitteln eines Funktionswerts $20^{32} = 4.3 \cdot 10^{41}$ mal erfolgen. Da dies mit einem enormen Rechenaufwand

verbunden ist, wird im Folgenden der Zusammenhang zwischen dem Funktionsverhalten $\Phi(r_v, \beta_v)$ und den Veränderungen an anderen Verbindungen untersucht, um mit diesen Erkenntnissen eine Variationsstrategie für die Systemparameter entwickeln zu können, aus der ein reduzierter Rechenaufwand resultiert. Zur Veranschaulichung dessen dient die folgende Abbildung 126. Hierin zeigt das Diagramm links oben die Funktion $\Phi(r_0, \beta_0)$, vergleichbar zu Abbildung 125, wenn die Systemparameter nur an der Verbindung V_0 (durch roten Punkt markiert) variiert werden. Der rote Pfeil weist auf den Ort des globalen Minimums der Funktion.

Die anderen Diagramme der Abbildung zeigen ebenfalls die Funktion $\Phi(r_0, \beta_0)$, jedoch unter zusätzlicher Veränderung der Systemparameter r_v/β_v an einer anderen Verbindung (durch schwarzen Punkt markiert). Wie dieser Vergleich zeigt, ändert sich das Funktionsverhalten von $\Phi(r_0, \beta_0)$ wesentlich stärker, infolge von Änderungen der variablen Systemparameter an unmittelbar benachbarten Verbindungen. Bei allen weiteren Funktionen wird der Wertebereich des Neigungswinkels der Interaktionskräfte im Folgenden auf $\{\beta \mid 90^\circ \geq \beta \geq -90^\circ\}$ vergrößert.

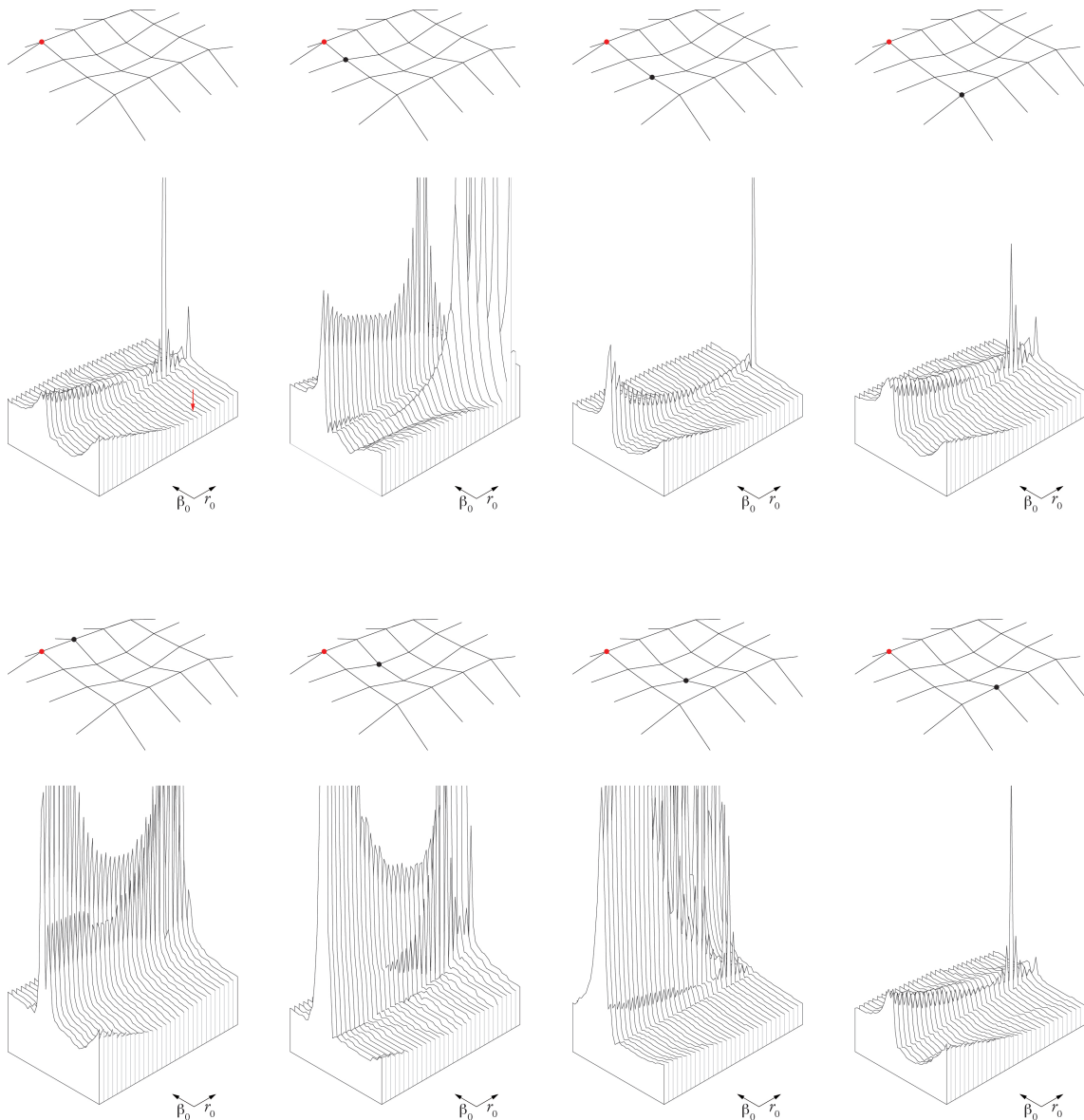


Abb. 126: Studie 4: Funktion $\Phi(r_0, \beta_0)$ eines Tragsystem mit 4-ständigen Verbindungen und einer Referenzfläche mit wechselnder Krümmungsrichtung (vgl. Abb. 123), in Abhängigkeit von $\{r \mid r_{max} \geq r > 0\}$ und $\{\beta \mid 90^\circ \geq \beta \geq -90^\circ\}$. Veranschaulichung des Einflusses von Änderungen der variablen Systemparameter an anderen Verbindungen des Systems.

5. Studie

In der folgenden Studie wird der Ort des Funktionsminimums genauer untersucht. Dazu zeigt Abbildung 127 beispielhaft die Funktionen $\Phi(r_v, \beta_v)$ für die Verbindungen V_0, V_1, V_2 und V_6 des betrachteten Tragsystems aus Abbildung 123. Die dargestellten Diagramme zeigen jeweils zwei Ansichten der Funktion, sowie den Ort des Funktionsminimums (durch roten Punkt resp. Pfeil markiert). Dabei wurden die Systemparameter mit $\{r \mid r_{max} \geq r > 0\}$ und $\{\beta \mid 90^\circ \geq \beta \geq -90^\circ\}$ variiert.

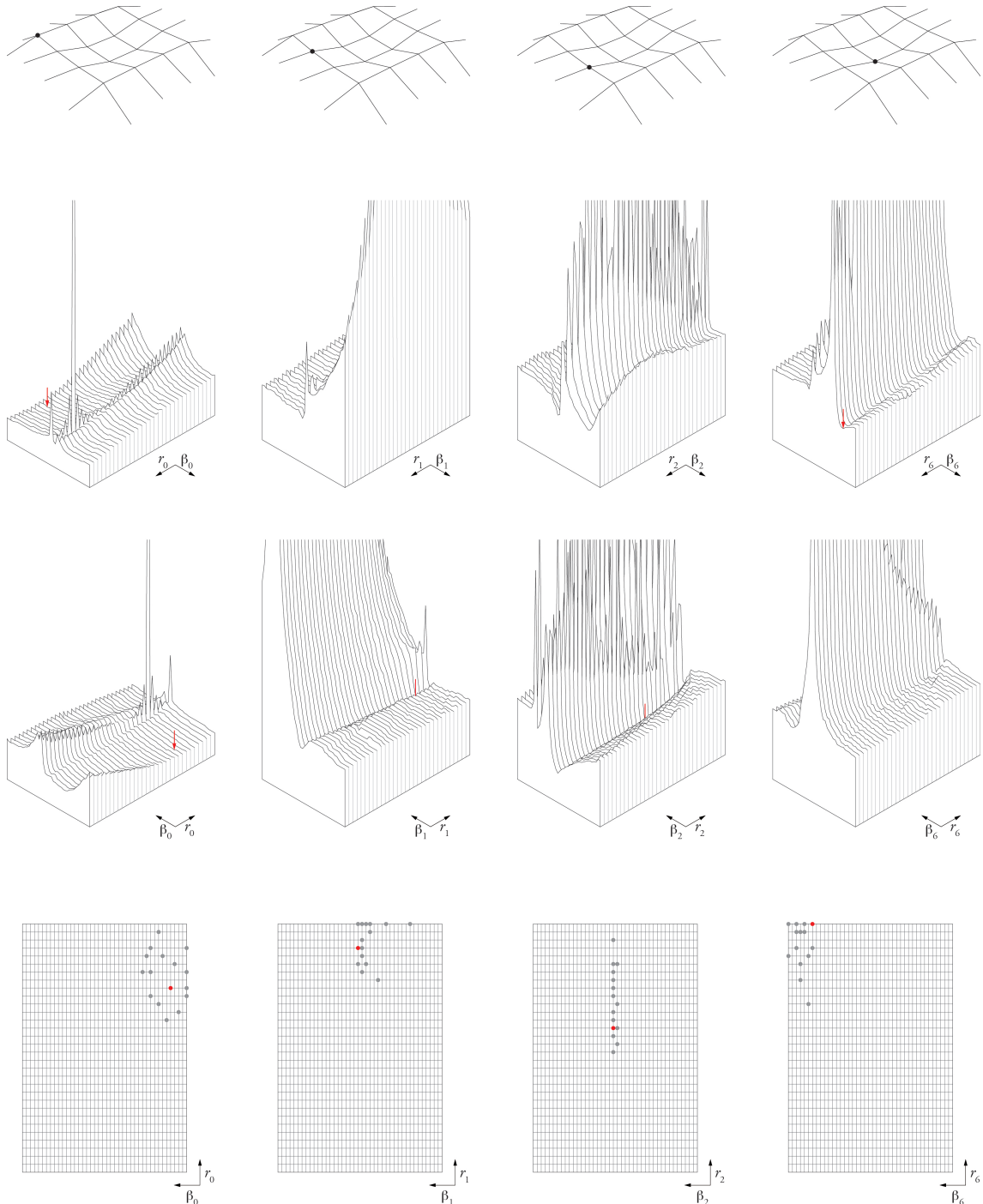


Abb. 127: Studie 5: Funktion $\Phi(r_v, \beta_v)$ für die Verbindungen V_0, V_1, V_2 und V_6 eines Tragsystems mit 4-ständigen Verbindungen und einer Referenzfläche mit wechselnder Krümmungsrichtung (vgl. Abb. 123), in Abhängigkeit von $\{r \mid r_{max} \geq r > 0\}$ und $\{\beta \mid 90^\circ \geq \beta \geq -90^\circ\}$. Veränderung des Orts des Funktionsminimums bei zufällmässiger Variation der Systemparameter an zufällig ausgewählten anderen Verbindungen.

Abbildung 127 unten zeigt die Veränderung des Ortes des jeweiligen Funktionsminimums, wenn an zufällig gewählten anderen Verbindungen des Systems ebenfalls zufällig Werte für die variablen Systemparameter angenommen werden. Daran lassen sich die folgenden zwei Eigenschaften des Tragsystems aufzeigen, die dem gegenwärtigen Erkenntnisstand dieser Forschung entsprechen.

- Wenn bei ausschliesslicher Variation der Systemparameter an einer Verbindung v des Tragsystems der Ort $(r_{v,min}/\beta_{v,min})$ des globalen Minimums der Funktion $\Phi(r_v, \beta_v)$ bekannt ist, dann befindet sich dieser auch bei Veränderung der Systemparameter r und β an anderen Verbindungen im Bereich seiner näheren Umgebung von $(r_{v,min}/\beta_{v,min})$.
- Die Gestalt dieses Bereichs scheint sich nach der Verhaltensweise der Funktion $\Phi(r_v, \beta_v)$ zu definieren, da er sich an Orten (r_v/β_v) befindet, für welche die Funktionswerte Φ nicht allzu stark vom Minimum abweichen.

Durch das Einbeziehen der aus diesen Eigenschaften resultierenden Erkenntnisse in den Algorithmus der Ermittlung des globalen Funktionsminimums kann sich der diesbezügliche Rechenaufwand stark reduzieren, da der Wertebereich der variablen Systemparameter r_v und β_v unter Umständen erheblich verkleinert werden kann.

6.8 Beispiele

Abschliessend werden in diesem Kapitel Beispiele der Strukturoptimierung mit dem hier entwickelten Ansatz für das Optimierungsmodell gezeigt. Dabei werden unterschiedliche Formen von räumlichen Flächen zugrunde gelegt, die durch das entwickelte Tragsystem diskretisiert werden. Es werden ausschliesslich Beispiele gezeigt, die eine wechselnde Krümmungsrichtungen der Oberfläche aufweisen, und für die keine Zustände möglich sind, in welchen die Interaktionskräfte genau auf den Stabachsen wirken. Es ist demnach eine gewisse Biegebeanspruchbarkeit der Systeme erforderlich.

1. Beispiel

Dieses Beispiel zeigt eine Strukturoptimierung des Tragsystems aus Abbildung 123, an dem in Abschnitt 6.7 die Studien 3 bis 5 durchgeführt wurden. Der Diskretisierung zugrunde liegt hier eine zum Zentrum rotationssymmetrische räumliche Fläche, die in y -Richtung etwas gestreckter als in x -Richtung ist und damit keine Rotationssymmetrie für eine 90° Drehung aufweist. Die folgende Abbildung zeigt einerseits das Referenzgitter des Optimierungsmodells (vgl. Abb. 128a) und andererseits die Stabkonfiguration welche als diejenige ermittelt wurde, die den geringsten Materialaufwand der Stäbe erfordert (vgl. Abb. 128b). In Abbildung 129 sind die Stäbe mit ihren erforderlichen Durchmessern dargestellt und die Intensität des Grauwerts nimmt mit dem Betrag der jeweiligen Schnittgrösse zu. Dabei zeigt Abbildung 129a dies in Bezug auf die Normalkraft und 129b auf das Biegemoment.

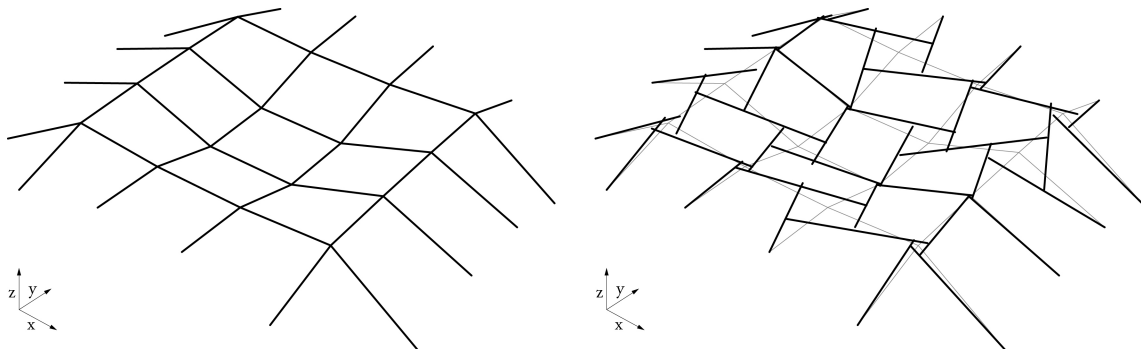


Abb. 128: 1. Beispiel: Tragsystem. a) links: Referenzgitter für das Optimierungsmodell; b) rechts: Bezüglich Materialmenge optimierte Stabkonfiguration.

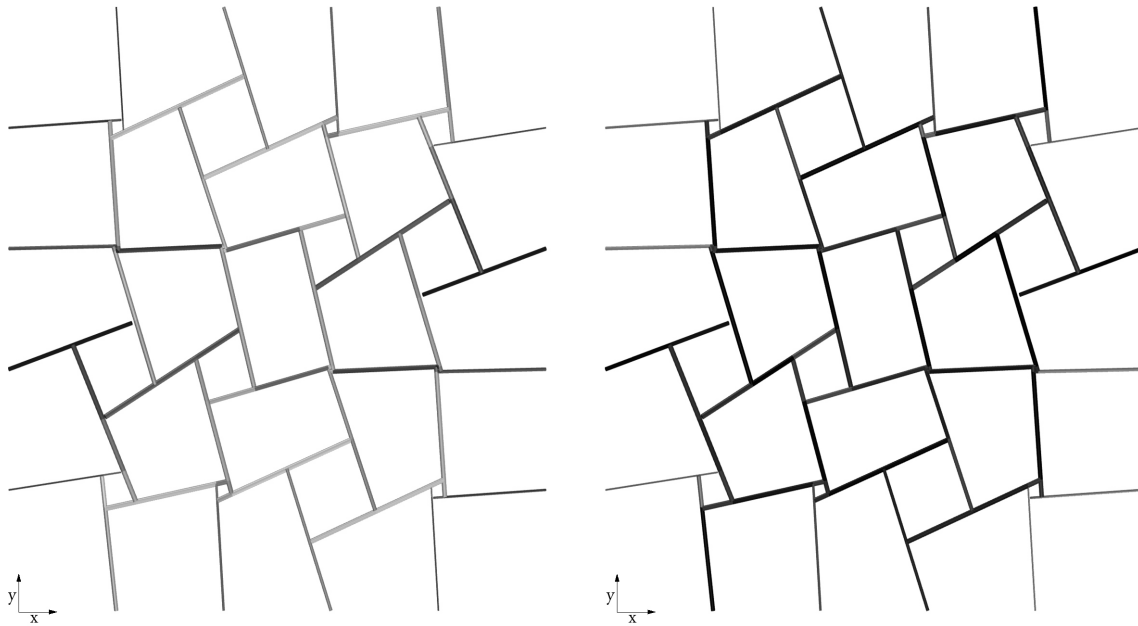


Abb. 129: 1. Beispiel: Durchmesser und Schnittgrößen der Stäbe in eben projizierter Darstellung. a) links: Normalkräfte; b) rechts: Biegemomente.

Die Rotationssymmetrie der zugrunde liegenden Form und des Referenzgitters gilt in gleicher Weise für die optimierte Struktur und für die Schnittgrößen. Wie Abbildung 129 zeigt, ist vor allem der Innenbereich durch Biegung beansprucht. Dies ist ausgeprägter in y -Richtung, bezüglich derer das Tragsystem eine schwächere Krümmungsänderung als in x -Richtung aufweist. Daraus resultiert das Tragverhalten eines mittig in y -Richtung liegenden, biegebeanspruchten Streifens, auf den sich die in x -Richtung liegenden Stäbe bogenartig abstützen.

2. Beispiel

Die dem Tragsystem hier zugrunde liegende Fläche weist im Gegensatz zu jener des ersten Beispiels keine Arten von Symmetrie auf. In y -Richtung existiert hier ein Wechsel der Krümmungsrichtung von konvex zu konkav, wobei die Krümmungsänderung mit zunehmendem x -Wert stärker wird. Daraus resultiert in x -Richtung eine konvexe Krümmungsrichtung, die mit grösser werdendem y -Wert zu einer konkaven wechselt (vgl. Abb. 130).

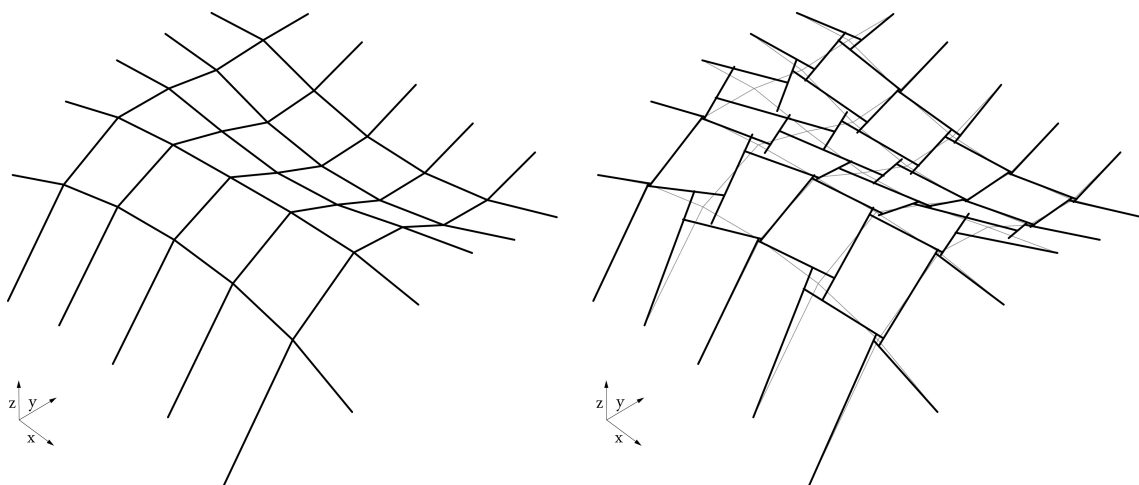


Abb. 130: 2. Beispiel: Tragsystem. a) links: Referenzgitter für das Optimierungsmodell; b) rechts: Bezüglich Materialmenge optimierte Stabkonfiguration.

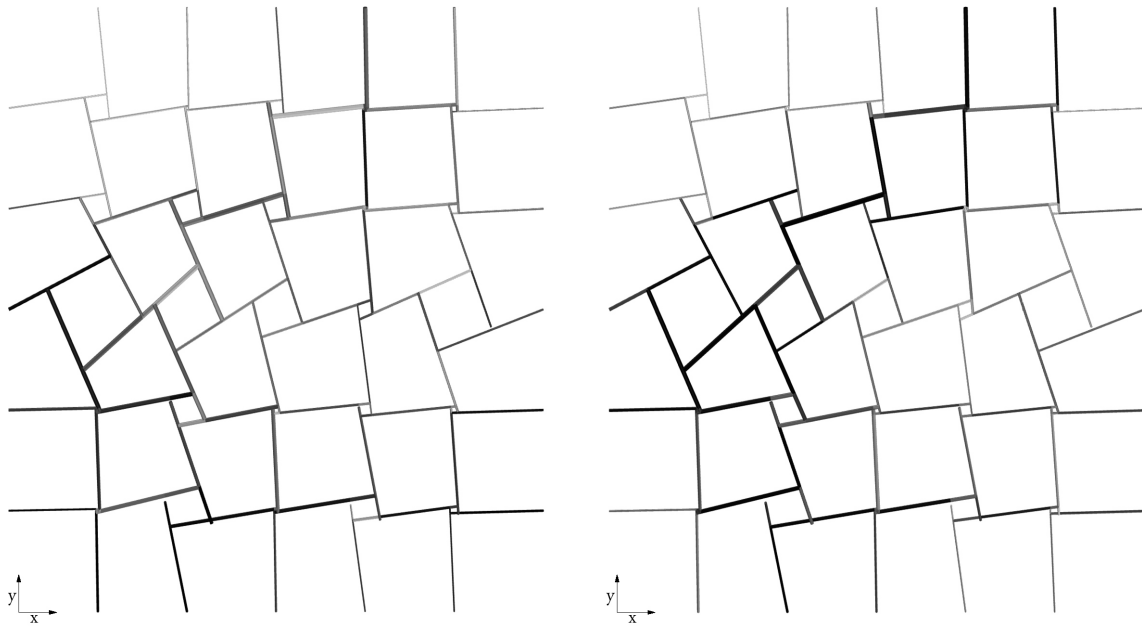


Abb. 131: 2. Beispiel: Durchmesser und Schnittgrößen der Stäbe in eben projizierter Darstellung. a) links: Normalkräfte; b) rechts: Biegemomente.

Aus der Veranschaulichung der Schnittgrößen im optimierten System ist für die Biegebeanspruchung eine bevorzugte Richtung zu erkennen, welche sich in der Darstellung der Projektion (vgl. Abb. 131b), von links unten nach rechts oben gekrümmt verlaufend erstreckt. Für die Normalkräfte ist eine stärkere Intensität im Bereich der konvexen Krümmung der Form im linken unteren Bereich der diagrammatischen Darstellung (vgl. Abb. 131a) erkennbar, sowie des Weiteren in x-Richtung im unteren Bereich des Diagramms und in y-Richtung im rechten Bereich.

3. Beispiel

Die Geometrie der Form, welche das Tragsystem des dritten Beispiels diskretisiert, weist in x-Richtung einen Wechsel der Krümmung von konvex zu konkav auf. In y-Richtung existiert ein zweifacher Wechsel der Krümmungsrichtung, wobei dieser mit grösser werdenden x-Werten schwächer ausgeprägt ist (vgl. Abb. 132).

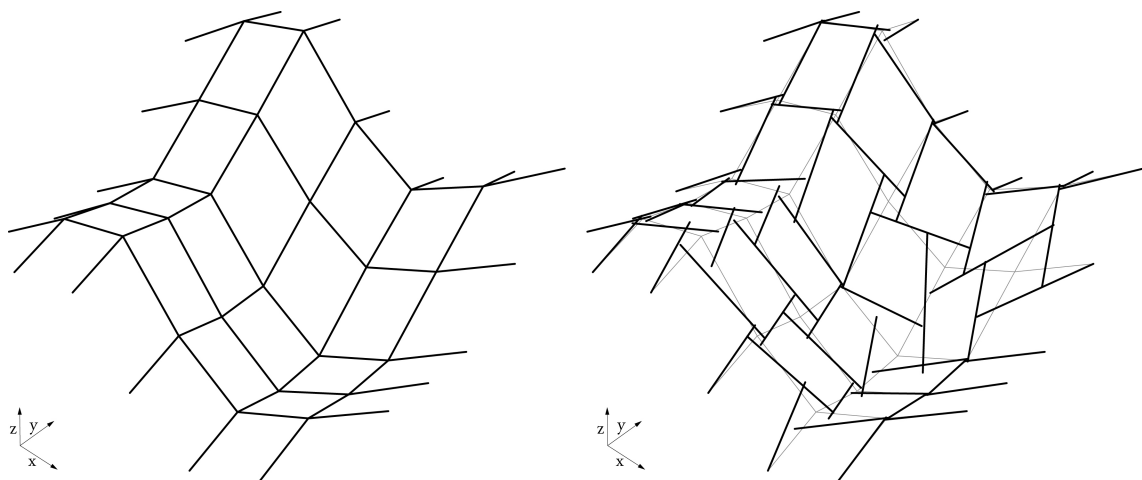


Abb. 132: 3. Beispiel: Tragsystem. a) links: Referenzgitter für das Optimierungsmodell; b) rechts: Bezüglich Materialmenge optimierte Stabkonfiguration.

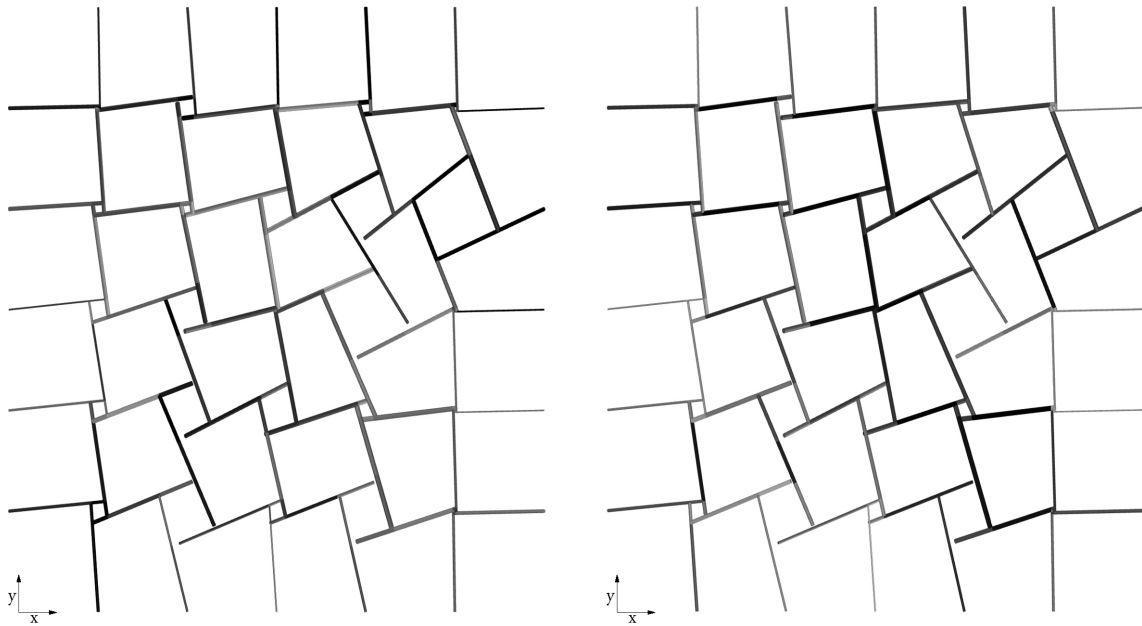


Abb. 133: 3. Beispiel: Durchmesser und Schnittgrößen der Stäbe in eben projizierter Darstellung. a) links: Normalkräfte; b) rechts: Biegemomente.

In Abbildung 133b sind zwei Streifen mit bevorzugt biegebeanspruchten Stäben erkennbar. Einer verläuft in der projizierten Darstellung von rechts unten in einem Bogen über das Zentrum nach rechts oben. Der andere erstreckt sich nahe des oberen Rands von links nach rechts. Die in 133a stärker durch Normalkräfte beanspruchten Stäbe befinden sich in zwei konvex gekrümmten Bereichen des Tragsystems, und können als bogenartige Abstützungen auf die durch Biegung tragenden Streifen interpretiert werden.

7 Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein Modell hergeleitet mit welchem Tragwerke von räumlich gekrümmten Flächen bezüglich ihres Materialaufwands optimiert werden können. Dabei wird eine gegebene Form mittels eines stabförmigen Tragsystems abgebildet und dessen innere Kräfte mit Hilfe der entwickelten Methode der Reziproken Analyse ermittelt. Mit der Öffnungsweite der Verbindungen des Tragsystems und den Neigungswinkeln der inneren Kräfte an den Stabenden existieren variable Systemparameter, innerhalb deren Wertebereich mit Hilfe des Optimierungsmodells derjenige Zustand der Struktur ermittelt wird, welcher unter minimalem Materialverbrauch in ein Tragwerk übersetzt werden kann. Wie in Abschnitt 1.4.2 beschrieben, hängt die erforderliche Materialmenge eines Tragwerks stark von seiner Biegebeanspruchung ab.

7.1 Tragsystem

Das in Kapitel 3 hergeleitete Tragsystem basiert auf dem Hebelstabsystem und wurde verallgemeinert durch die Einführung der Öffnungsweiten r_v der reziproken Verbindungen, wodurch für den Grenzfall $r_v = 0$ das System des Einfachen Gitters eingeschlossen ist. Die Öffnungsweiten stellen den ersten Typ variabler Systemparameter dar. Durch deren Veränderung kann die Biegebeanspruchung der Struktur lokal angepasst werden. Als Potential der Weiterentwicklung dieses Tragsystems werden vor allem die zwei folgenden Ansatzpunkte gesehen: Einerseits das Finden weiterer reziproker Anordnungen von Stabelementen und andererseits die Ausformulierung andersartiger diskreter Elemente.

Bezüglich anderer reziproker Anordnungen von Stabelementen sei vor allem der Ansatz erwähnt, das Tragverhalten des in dieser Arbeit hergeleiteten Systems von stabförmigen Flächentragwerken auf räumliche Tragwerke zu übertragen. Dies bedeutet, dass anstatt einer räumlich gekrümmten Fläche ein volumetrisches Kontinuum diskretisiert beschrieben wird (vgl. Abb. 134a). Das volumetrische Referenzgitter dieses Tragsystems besteht ebenfalls aus geraden Stäben und kann durch Polyeder beschrieben werden, für welche die Raumfüllung des betrachteten Volumens erfüllt sein muss. Für das Subsystem Stab und seine Eigenschaften, insbesondere jene, welche die Annahmen zur Reduktion der Freiheitsgrade im Rahmen der Plastizitätstheorie betreffen, scheint dies wenig Anpassungen gegenüber dem in dieser Arbeit gezeigten zu erfordern. Die Ausbildung einer reziproken Verbindung mit einer Öffnungsweite $r > 0$ stellt dagegen eine gewisse Herausforderungen dar, da wesentliche Anpassungen und Erweiterungen gegenüber 3.2 erforderlich sind. Abbildung 134b zeigt eine Möglichkeit, eine solche Verbindung auszubilden, jedoch ist leicht ersichtlich, dass bei räumlich zusammengeführten Stäben diesbezüglich nicht nur die Unterscheidung eines positiven und negativen Drehsinns notwendig ist, sondern einige weitere Parameter bei der Ausbildung einer reziproken Verbindung vorhanden sind. Auch ist zu beachten, dass, je nachdem wie diese Verbindung ausgebildet wird, ein komplexeres Verhalten bezüglich der Biegebeanspruchbarkeit des Tragwerks in die unterschiedlichen räumlichen Richtungen entsteht.

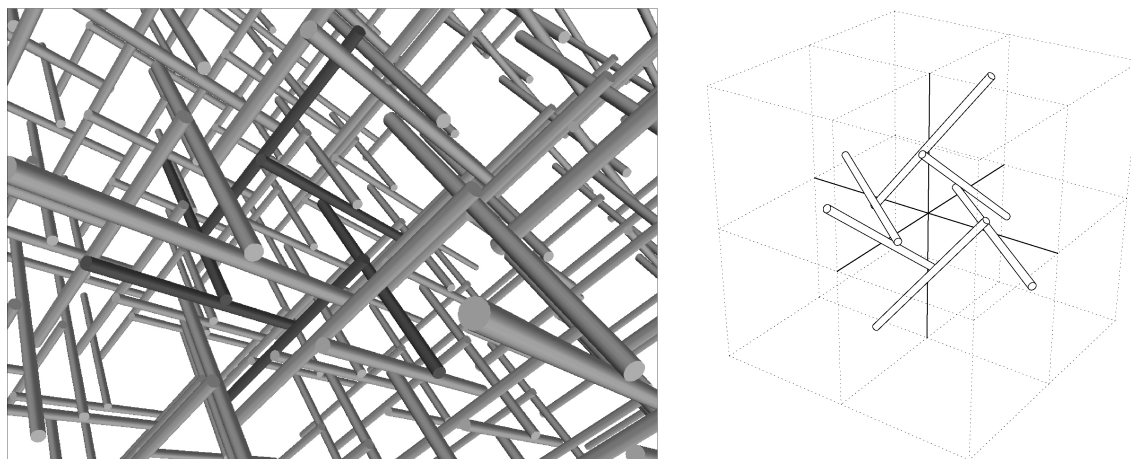


Abb. 134: a) links: Stabförmige Diskretisierung eines räumlichen Kontinuums durch ein Tragsystem mit reziproken Verbindungen; b) rechts: Eine Möglichkeit der Ausbildung einer einzelnen reziproken Verbindung.

In Bezug auf andersartige Subsysteme scheint vor allem Potential in der Ausbildung von flächigen gegenüber stabförmigen Elementen vorhanden zu sein. Der Vorteil hierbei ist, dass sich Eigenschaften des Verhaltens von Flächentragwerken direkt im Element implementieren lassen, während bei der stabförmigen Diskretisierung von flächenhaft wirkenden Tragwerken diese Eigenschaften durch die Art und Weise der Kombination von Stäben festgelegt wird. Beispielhaft hierfür wurde in Abschnitt 5.5 gezeigt, wie durch die Anordnung der Stäbe in der stabförmig diskreten Ausbildung einer Platte der Grad der Lastaufteilung bezüglich gegenüberliegender Auflagerlinien festgelegt werden kann. Im Falle einer Diskretisierung der Platte durch flächige Elemente (vgl. Abb. 135) lässt sich diese Eigenschaft direkt im Element in Abhängigkeit der Annahmen zur Reduktion der Freiheitsgrade in den Gleichgewichtsbedingungen festlegen.

Abbildung 135a zeigt ein Beispiel für die Ausbildung von flächigen, diskreten Elementen sowie ein simpler Fall von Interaktionsgrößen ohne die Betrachtung von Biegemomenten. Dabei ist ersichtlich, dass bereits in diesem einfachen Fall eine Eigenschaft der Flächentragwerke, die zweidimensionale Lastverteilung, im Element beschrieben wird. Mit flächigen Elementen lassen sich beispielsweise Systeme gemäss den Abbildungen 135b und 135c entwickeln, welche das Tragverhalten von Rechteckplatten mit Linienauflagern oder Punktauflagern beschreiben.

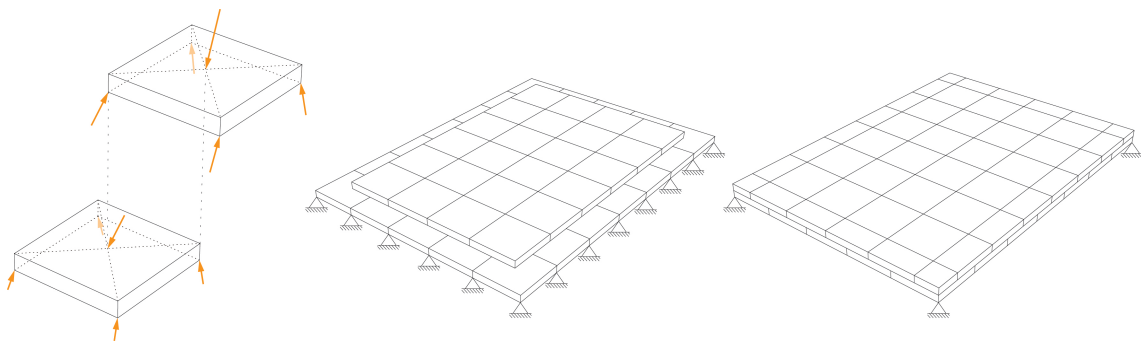


Abb. 135: a) links: Beispiel für die Ausbildung von flächigen Elementen eines diskreten Tragsystems mit Interaktionsgrößen; b) mittig: Diskretisierung einer liniengelagerten Rechteckplatte mit Hilfe eines Tragsystems mit flächigen Elementen; c) rechts: Diskretisierung einer punktgelagerten Rechteckplatte mit Hilfe eines Tragsystems mit flächigen Elementen.

In einem weiteren Schritt sind vergleichbare Ansätze mit Volumenelementen denkbar. Die Unterschiede zur stabförmigen Diskretisierung eines räumlichen Kontinuums (vgl. Abb. 134) liegen hierbei, wie für die flächigen Elemente beschrieben, in der Abbildung von Eigenschaften des Tragverhaltens sowohl im Element als auch in der kombinatorischen Anordnung.

7.2 Methode der Reziproken Analyse

In Kapitel 4 wurde zur Bestimmung der inneren Kräfte des Tragsystems eine Analyseverfahren entwickelt, deren zugrunde liegender Algorithmus aus dem spezifischen reziproken Verhalten des Systems abgeleitet ist. Die Methode basiert auf dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie, was in diesem Fall bedeutet, dass die Freiheitsgrade bei der Ermittlung der inneren Kräfte in statisch unbestimmten Subsystemen durch Annahmen eliminiert werden, welche die Wirkungen der inneren Kräfte und Momente einschränken und diese dadurch ausschliesslich mit den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden können. Diese Annahmen stellen den zweiten Typ variabler Systemparameter dar und ermöglichen es, das Tragverhalten innerhalb eines Spektrums zu steuern. Im Ansatz dieser Arbeit wird dadurch festgelegt, in welchem Winkel die inneren Kräfte zur Tangentialebene des Flächentragwerks verlaufen, wodurch ebenfalls die Biegebeanspruchung lokal beeinflusst werden kann. Ob die angenommenen Parameter einen Gleichgewichtszustand des Gesamtsystems ermöglichen, zeigt die Konvergenz der Superposition innerhalb der Methode der Reziproken Analyse.

Die Vorteile der entwickelten Methode sind Verwendung von Subsystemen, deren lokales Gleichgewicht einfach nachvollziehbar ist, und dass die getroffenen Annahmen eine direkte Auswirkung auf das Tragverhalten des Gesamtsystems haben. Diese beiden Aspekte ermöglichen und fördern das Verständnis von Strukturen mit komplexem Tragverhalten.

Für die Methode der Reziproken Analyse existieren zwei unterschiedliche Lösungen, die iterative und die geschlossene. Beide führen zu identischen inneren Kräften, jedoch weisen ihre Algorithmen unterschiedliche Geschwindigkeiten auf. Der Rechenaufwand der geschlossenen Lösung ist vergleichbar einer solchen, bei der alle unbekanntes Kräfte des Tragsystems gesamthaft durch ein lineares Gleichungssystem bestimmt werden, das aus den Gleichgewichtsbedingungen an den Stäben und Knoten resultiert. Die iterative Lösung gelangt in den meisten Fällen sehr viel schneller zum Ergebnis, da zwar weitaus mehr Matrizenoperationen durchgeführt werden müssen, jedoch die Matrizen erheblich kleiner sind. Beispielsweise werden bei der Analyse eines 100 Stäbe umfassenden Tragsystems mit der geschlossenen Lösung aufgrund der grossen Matrizen $276.7 \cdot 10^8$ Additionen und Multiplikationen von Skalaren durchgeführt, während die iterative Lösung des gleichen Systems mit 1000 Schritten nur $1.2 \cdot 10^8$ derartige Rechenoperationen erfordert. Die Erfahrung zeigt, dass bei den meisten Systemen schon nach bedeutend weniger als 1000 Schritten das Ergebnis der iterativen Lösung auf mehrere Nachkommastellen identisch zum exakten Resultat der geschlossenen ist. Die geschlossene Lösung ist dann vorteilhaft, wenn für ein Tragsystem eine Vielzahl verschiedener Lastfälle als äussere Einwirkungen berücksichtigt werden sollen, da in diesem Fall nur einmal die Matrix $(\mathbf{I} + \mathbf{G})(\mathbf{I} - \mathbf{VG})^{-1}$ bestimmt werden muss und damit sehr schnell die inneren Kräfte infolge vieler äusserer Lastfälle \mathbf{D}_a ermittelt werden können.

Insbesondere die iterative Lösung verspricht Potential zur Weiterentwicklung. Sie bietet die Möglichkeit, im laufenden Iterationsprozess die inneren Kräfte mit den maximal durch das Material aufnehmbaren zu vergleichen und damit Fließbedingungen direkt zu integrieren. Dadurch können Kraftumlagerungen beschrieben werden, welche entstehen, wenn bei plastischem Materialverhalten lokal Fließen eintritt, und somit an diesen Stellen keine Kraftsteigerung mehr stattfinden kann, und höhere innere Kräfte nur möglich sind, wenn diese an anderen Stellen des Tragwerks aufgenommen werden können. In dieser Arbeit wurde ein derartiger Weg nicht verfolgt, da vorerst aus den in Abschnitt 1.4.1 dargelegten Gründen angestrebt wurde, die inneren Kräfte ausschliesslich durch die Gleichgewichtsbedingungen zu bestimmen und keine Abhängigkeit von Materialeigenschaften herzustellen.

7.3 Ansatz für das Optimierungsmodell

In Kapitel 6 wurde der Ansatz eines Optimierungsmodells entwickelt, das auf Basis des Tragsystems und der Analysemethode diejenigen Werte der variablen Systemparameter ermittelt, für welche sich das gesuchte Optimum des minimalen Materialaufwands ergibt. Die Umsetzung des daraus resultierenden Ergebnisses kann entweder direkt in ein stabförmig diskretes Tragwerk erfolgen, oder in das Kontinuum einer räumlichen Fläche, für welches das optimierte Tragsystem die Resultierenden der inneren Kräfte beschreibt.

Da im Rahmen dieser Arbeit nur die Entwicklung eines Ansatzes für das Optimierungsmodell angestrebt wurde, existiert diesbezüglich noch umfangreiches Potential zur Weiterentwicklung. Beispielsweise können alle hier als konstant festgelegten Systemparameter, wie die Struktur des Referenzgitters oder die Momententragfähigkeit der Knoten, theoretisch auch als variabel definiert werden. Jedoch wird dadurch auch die Komplexität des Optimierungsprozesses beträchtlich gesteigert. Eine andere Möglichkeit der Weiterentwicklung ist die Berücksichtigung der Kräfte in den Knoten und der daraus resultierenden konstruktiven Ausbildung sowie der globalen Stabilität bei der Dimensionierung der Stäbe und der Knoten. Ausserdem könnte aus dem Ergebnis des Modells eine Visualisierung der Totalresultierenden generiert werden, anhand welcher ersichtlich wird, wohin gehend die Form für die inneren Kräfte optimiert werden kann, um den Materialaufwand noch weiter zu reduzieren.

Es ist ersichtlich, dass für das Optimierungsmodell bis zu einer praxistauglichen Anwendbarkeit noch Entwicklungsarbeit erforderlich ist, jedoch zeigt bereits der in dieser Arbeit hergeleitete Ansatz eine Vorgehensweise, welche der in Abschnitt 1.4.1 geforderten hierarchischen Betrachtungsweise von Geometrie, inneren Kräften und Materialisierung gerecht wird. Diese wird als essentiell erachtet, da durch die entkoppelte Betrachtung der drei Aspekte eine wesentlich höhere Nachvollziehbarkeit des Tragverhaltens, insbesondere von komplexen Strukturen, erreicht wird.

Quellen

- [1] *SIA 263:2003 Stahlbau*. Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, 2003.
- [2] *SIA 265:2003 Holzbau*. Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, 2003.
- [3] ABRAMOWSKI, S., AND MÜLLER, H. *Geometrisches Modellieren*. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1991.
- [4] BARTH, C., AND RUSTLER, W. *Finite Elemente in der Baustatik-Praxis*. Bauwerk, Berlin, 2010.
- [5] BAVEREL, O., DOUTHE, C., AND CARON, J.-F. Nexorade: a structure for 'free form' architecture. In *Adaptables* (Eindhoven, 2006), International Conference On Adaptable Building Structures, Eindhoven University of Technology, pp. 376–380.
- [6] BAVEREL, O., AND NOOSHIN, H. Formfinding of Nexorades using Genetic Algorithms. In *From models to realization* (Montpellier, 2004), IASS International Symposium on Shell and Spatial Structures, Université Montpellier II/ Ecole d'Architecture du Languedoc-Roussillon.
- [7] BAVEREL, O., AND SAIDANI, M. The Multi-Reciprocal Grid System. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 40, 1 (1999), 33–41.
- [8] BECHMANN, R. *Villard de Honnecourt - La Pensée Technique au XIIIe Siècle et sa Communication*. Picard, Paris, 1991.
- [9] BOGNER, D. *A friendly alien: ein Kunsthau für Graz*. Hatje Cantz, Ostfildern/Ruit, 2004.
- [10] BRÉMAUD, P. *Markov Chains, Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [11] CHILTON, J., SENG CHOO, B., AND POPOVIC, O. Reciprocal frames - past, present and future. In *Proceedings Lightweight structures in Civil Engineering* (Warsaw, 1995), IASS International Symposium on Shell and Spatial Structures, pp. 26–29.
- [12] CUITO, A. *Guggenheim*. LOFT Publications, Barcelona, 2001.
- [13] DAL CO, F., FORSTER, K., AND ARNOLD, H. *Frank O. Gehry - Das Gesamtwerk*. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1998.
- [14] DE HONNOCOURT, V. *Album de Villard de Honnecourt*. Laget, Paris, 1976.
- [15] DE L'ORME, P. *Architecture de Philibert de l'Orme*. Regnault Chaudiere, Paris, 1626.
- [16] DOUTHE, C., AND BAVEREL, O. Design of nexorades or reciprocal frame systems with the dynamic relaxation method. *Comput. Struct.* 87, 21-22 (Nov. 2009), 1296–1307.
- [17] EHLERS, W. *Technische Mechanik I-IV*. Vorlesungsskript, Universität Stuttgart, Stuttgart, 1997.
- [18] ELWORTHY, J. *Journey to the Core*. The Eden Trust, St Austell, 2005.
- [19] FOSTER, N. *Norman Foster and the British Museum*. Prestel Verlag, London, 2001.
- [20] FRAMPTON, K. *Grundlagen der Architektur: Studien zur Kultur des Tektonischen*. Oktagon, München, 1993.
- [21] FRAMPTON, K. *Die Entwicklung der Architektur im 20. Jahrhundert*. Springer-Verlag, Wien, 2007.
- [22] FRAMPTON, K. *Die Architektur der Moderne - eine kritische Baugeschichte*. Deutsche Verlags-Anstalt, München, 2010.

- [23] FRÖHLICH, M., AND SPERLICH, H.-G. *Georg Moller - Baumeister der Romanik*. Eduard Roether Verlag, Darmstadt, 1959.
- [24] GRAEFE, R., GAPPOEV, M., AND PERTSCHI, O. *Vladimir G. Šuchov 1853-1939 die Kunst der sparsamen Konstruktion*. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1990.
- [25] GROSS, D., HAUGER, W., SCHNELL, W., AND SCHRÖDER, J. *Technische Mechanik*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.
- [26] GÜNTHER, H. *Deutsche Architekturtheorie zwischen Gotik und Renaissance*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1988.
- [27] GUTDEUTSCH, G. *Das Detail in der Holzarchitektur: Konstruktion und Gestaltung*. Birkhäuser, Basel, 1996.
- [28] HADID, Z. *The complete Zaha Hadid*. Thames and Hudson, London, 2009.
- [29] HAMMACHER, W., AND STUTEN, C. *Der Goetheanum-Bau in seiner Landschaft*. baag Verlag, Arlesheim, 2006.
- [30] HEINLE, E., AND SCHLAICH, J. *Kuppeln aller Zeiten - aller Kulturen*. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1996.
- [31] HILLERBORG, A. *Strip method of design*. Viewpoint Publications, Wexham Springs, 1974.
- [32] HOSCHEK, J., AND LASSER, D. *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [33] JENCKS, C. *The Iconic Building*. Rizzoli International Publications, New York, 2005.
- [34] KNIPPERS, J. Johann Wilhelm Schwedler. *db*, 4 (2000), 105–110.
- [35] KOHLHMAIER, G., AND VON SARTORY, B. *Das Glashaus*. Prestel Verlag, München, 1981.
- [36] KRESSNER, D. *Lineare Algebra*. Vorlesungsskript, ETH Zürich, Zürich, 2011.
- [37] LENGWEILER, R., CONSTANTOULAKIS, C., SHEBL, A., AND LÜTHI, M. Verzerrte Bögen auf massiven Auflagerkraken. *TEC21*, 49-50 (12 2011), 30.
- [38] LEONHARDT, F. *Brücken*. Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1982.
- [39] LESLIE, P. H. On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics. *Biometrika* 33, 3 (November 1945), 183–212.
- [40] MARTI, P. *Baustatik*. Ernst und Sohn Verlag, Berlin, 2012.
- [41] MARTI, P., ALVAREZ, M., KAUFMANN, W., AND SIGRIST, V. *Tragverhalten von Stahlbeton*. Zürich, 1999.
- [42] MAYR, M., AND THALHOFER, U. *Numerische Lösungsverfahren in der Praxis: FEM - BEM - FDM*. Carl Hanser Verlag, München, 1993.
- [43] MCQUAID, M. *Shigeru Ban*. Phaidon, New York, 2003.
- [44] MOLLER, G. *Beiträge zu der Lehre von den Konstruktionen, Heft 1*. Verlag von Carl Wilhelm Leske, Darmstadt, 1833.
- [45] MUTTONI, A., SCHWARTZ, J., AND THÜRLIMANN, B. *Bemessung von Betontragwerken mit Spannungsfeldern*. Birkhäuser, Basel, 1997.
- [46] NERDINGER, W. *Leicht bauen, natürlich gestalten - Frei Otto, das Gesamtwerk*. Birkhäuser, Basel,

2005.

- [47] OTTO, F. *Gitterschalen*. Institut für Leichte Flächentragwerke, Stuttgart, 1974.
- [48] OTTO, F. *Netze in Natur und Technik*. Institut für Leichte Flächentragwerke, Stuttgart, 1975.
- [49] OTTO, F. *Multihalle Mannheim*. Institut für Leichte Flächentragwerke, Stuttgart, 1978.
- [50] OTTO, F. *Form Kraft Masse - Grundlagen*. Institut für Leichte Flächentragwerke, Stuttgart, 1979.
- [51] OTTO, F. *Experimente*. Institut für Leichte Flächentragwerke, Stuttgart, 1990.
- [52] OTTO, F. *Form Kraft Masse - Experimente*. Institut für Leichte Flächentragwerke, Stuttgart, 1991.
- [53] PEDRETTI, C. *LEONARDO architetto*. Electa Editrice, Milano, 1978.
- [54] PEHNT, W., AND SCHIRREN, M. *Hans Poelzig - Architekt, Lehrer, Künstler*. Deutsche Verlags-Anstalt, München, 2007.
- [55] PÉROUSE DE MONTCLOS, J.-M. *Étienne-Louis Boullée*. Flammarion, Paris, 1994.
- [56] PETERS, T. F. *How the Introduction of Iron in Construction Changed and Developed through Patterns in Design*. Before Steel - The introduction of structural iron and its consequences. Niggli, Zürich, 2010, pp. 127–154.
- [57] PFANKUCH, P. *Hans Scharoun - Bauten, Entwürfe, Texte*. Gebr. Mann Verlag, Berlin, 1974.
- [58] POELZIG, H. *Der Architekt*. Archibook-Verlag Düttmann, Berlin, 1986.
- [59] POPOVIC, O. *Reciprocal Frame Structures*. PhD thesis, University of Nottingham, Nottingham, Oct 1996.
- [60] POPOVIC LARSEN, O. *Reciprocal Frame Architecture*. Architectural Press, Elsevier, Oxford, 2008.
- [61] PUGNALE, A., PARIGI, D., KIRKEGAARD, P., AND SASSONE, M. The principle of structural reciprocity: history, properties and design issues. In *Taller, Longer, Lighter : meeting growing demand with limited resources : IABSE-IASS Symposium 2011* (London, 2011), Hemming Group Ltd.
- [62] RAMM, E., AND SCHUNCK, E. *Heinz Isler - Schalen*. Karl Krämer Verlag, Stuttgart, 1986.
- [63] RASMUSSEN, M., BRAMSEN, M., AND ANDERSEN, H. Design of a Concert Hall, Denmark. *Structural Engineering International* 21, 1 (February 2011), 107–113.
- [64] RIEGL, A. *Stilfragen: Grundlegungen zu einer Geschichte der Ornamentik*. Georg Siemens, Berlin, 1893.
- [65] RIZZUTO, J., SAIDANI, M., AND CHILTON, J. Multi-reciprocal elements (mre) space structure systems. In *Space structures 5* (London, 2002), Thomas Telford, pp. 641–649.
- [66] RÜSCH, E. *Baukonstruktion zwischen Innovation und Scheitern*. Michael Imhof Verlag, Petersberg, 1997.
- [67] SCHWEDLER, J. W. Gasometer fichtestrasse in berlin. *Zeitschrift für Bauwesen* (1876), 31.
- [68] SEMPER, G. *Der Stil in den technischen und tektonischen Künsten, oder Praktische Aesthetik: ein Handbuch für Techniker, Künstler und Kunstfreunde*. Verlag für Kunst und Wissenschaft, Frankfurt a. M., 1863.
- [69] SERLIO, S. *First book of architecture*. Benjamin Bloom Publishers, New York, 1970.
- [70] SERLIO, S. *On Architecture*. Yale University Press, New Haven, 1996.

- [71] SIZA, Á. *Serpentine Gallery Pavilion 2005*. Trolley Books, London, 2005.
- [72] SPIRO, A., THÖNNISSEN, U., AND WERENFELS, N. Objects in mirror are closer than they appear. Forschungsprojekt, 2011.
- [73] STALDER, L. *Architektur VI - Iconic Buildings: Architektur im Zeichen der Globalisierung*. ETH Zürich, Zürich, 2008.
- [74] SWEENEY, J. J., AND SERT, J. L. *Antoni Gaudí*. Verlag Gerd Hatje, Stuttgart, 1960.
- [75] TAUT, B. *Die Stadtkrone*. Eugen Diedrichs, Jena, 1919.
- [76] THE PALACE MUSEUM. *Life along the Bian River at the Pure Brightness Festival*. <http://www.dpm.org.cn/shtml/500/@/109321.html>, Stand: 30.06.2013.
- [77] VAN BRUGGEN, C. *Guggenheim Museum Bilbao*. Hatje, Ostfildern-Ruit, 1997.
- [78] VITRUVIUS POLLIO, M. *Zehn Bücher über Architektur - übersetzt und mit Anmerkungen versehen von Curt Fensterbusch*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1987.
- [79] VON BUTTLAR, A. *Gottfried Semper als Theoretiker*. Mäander Kunstverlag, 1977.
- [80] WALDMANN, K.-H., AND STOCKER, U. M. *Stochastische Modelle*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.
- [81] WALLIS, J. *Opera mathematica*. Oxoniae : E Theatro Sheldoniano, Oxford, 1695.
- [82] WERENFELS, N. Digitale Weiterentwicklung des Hebelstabsystems. Master's thesis, ETH Zürich, Departement Architektur, 2009.
- [83] WERNER, D. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [84] WINTER, K., AND RUG, W. Innovationen im Holzbau - Die Zollinger-Bauweise. *Bautechnik* 69, 4 (1992), 190–197.
- [85] WOLFF, M., HAUCK, P., AND KÜCHLIN, W. *Mathematik für Informatik und Bioinformatik*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.
- [86] ZEVI, B. *Towards an organic architecture*. Faber and Faber, London, 1950.
- [87] ZILCH, K., AND ZEHETMAIER, G. *Bemessung im konstruktiven Betonbau*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.