

Diss. ETH No. 21669

DISCONTINUOUS PERCOLATION TRANSITIONS
AND LATTICE MODELS OF FRACTAL
BOUNDARIES AND PATHS

A thesis submitted to attain the degree of

DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH

(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

KEN JULIAN SCHRENK

MSc ETH Physics

born on 02.08.1986

citizen of

Germany

accepted on the recommendation of

PROF. DR. HANS JÜRGEN HERRMANN, examiner

PROF. DR. PETER GRASSBERGER, co-examiner

2014

Zusammenfassung

Konnektivität in einem ungeordneten System beizubehalten oder zu verhindern, scheinen gegensätzliche Ziele zu sein. Hier erörtern wir, dass sie sich vielmehr ergänzen und schöne und komplizierte geometrische Objekte, nämlich zufällig gekrümmte Pfade und Flächen, hervorbringen. Diese Objekte treten in vielen scheinbar unabhängigen Optimierungs- und geometrischen Problemen auf, wie optimalen Pfaden in stark ungeordneten Medien, Wasserscheiden in zufälligen Landschaften, minimalen Spannbäumen, beim Brechen ungeordneter Materialien und in diskontinuierlichen Perkulationsübergängen. Ihre Eigenschaften zu kennen, hilft dabei, Herausforderungen wie das Teilen unterirdischer Lagerstätten (z.B. Grundwasserschichten oder Ölfelder) zu verstehen, sowie bei der Regulierung von Oberflächenwasser und Wasserspeicherung von Landschaften.

Um all diese Modelle und Phänomene im selben Rahmen zu beschreiben, führen wir das Konzept einer diskreten, mit Rängen versehenen, Oberfläche, oder eines solchen Gitters, ein. Dort hat jedes Gitterelement einen eindeutigen Rang, der von der zugrundeliegenden Unordnung abhängt. Das versetzt uns in die Lage, systematisch die Geometrie der auftretenden Pfade und Flächen zu untersuchen und die Beziehungen zwischen einigen dieser Probleme zu klären. Durch Monte-Carlo-Simulationen erhalten wir sehr präzise Ergebnisse für die fraktalen Dimensionen, die diese Objekte beschreiben. In zwei Dimensionen ist die fraktale Dimension der Pfade 1.2168 ± 0.0005 und, indem wir die Vorhersagen der Theorie der Schramm-Loewner-Evolution (SLE) in numerisch testbare Hypothesen übersetzen, finden wir heraus, dass die betreffenden Zufallspfade mit SLE mit Diffusivität $\kappa \approx 26/15 = 1.7\bar{3}$ kompatibel sind. Um die Ausbeutung einer Lagerstätte durch konkurrierende Parteien zu modellieren, wenden wir unseren Ansatz in höheren Dimensionen an. Wir studieren die Mechanismen, die kontinuierliche Übergänge zwischen unterschiedlichen geometrischen Zuständen zu diskontinuierlichen machen, indem wir zwei modifizierte Perkulationsmodelle untersuchen. Wir finden numerische Evidenz dafür, dass deren Perkulationsübergänge diskontinuierlich sind, und untersuchen ihre Eigenschaften in verschiedenen Dimensionen. Zum Abschluss unserer Studien untersuchen wir den Einfluss von langreichweitig korrelierter Unordnung auf die Herausbildung von Clustern und Grenzen in Zufallslandschaften, sowie auf deren Wasserspeicherungskapazität. Einerseits testet das einige inkompatible analytische Vorhersagen für langreichweitig korrelierte Perkulation und andererseits zeigt es, wie diese Frage mit derjenigen der Wasserspeicherungskapazität natürlicher Landschaften zusammenhängt.

Summary

Maintaining and suppressing connectivity in a disordered system seem to be antagonistic aims. Here we argue that they are in fact complementary and lead to beautiful and complicated geometrical objects, randomly corrugated paths and surfaces. These appear in many apparently unrelated optimization and geometrical problems, such as optimum paths in strongly disordered media, watersheds in random landscapes, minimum spanning trees, fracturing of disordered materials and discontinuous percolation transitions. Knowing their nature helps to understand challenges such as dividing underground reservoirs, like aquifers or oil fields, among several parties and to manage surface water and retention of landscapes.

To describe all these models and phenomena within the same framework, we introduce the concept of a discrete ranked surface, or lattice, where each lattice element has a unique rank related to the underlying disorder. This enables us to systematically study the geometry of the involved paths and surfaces and to clarify the relationship between several of these problems. Using Monte Carlo simulations, we obtain high-precision results for the fractal dimensions describing these objects. In two dimensions, the fractal dimension of the paths is 1.2168 ± 0.0005 and translating the predictions of the theory of Schramm-Loewner evolution (SLE) into numerically testable hypotheses, we learn that the obtained random paths are compatible with SLE of diffusivity $\kappa \approx 26/15 = 1.7\bar{3}$. To model the competitive exploration of a reservoir, we apply our approach to higher dimensions. We explore the mechanisms turning continuous transitions between different geometrical states into discontinuous ones by studying two models of modified percolation. Numerical evidence for the discontinuous nature of their percolation transition is obtained and their properties are analyzed in different spatial dimensions. To conclude our studies, we explore the impact of long-range correlated disorder on the formation of clusters and boundaries in random landscapes as well as on their water retention capacity. On the one hand, this tests some conflicting analytical predictions for long-range correlated percolation, and on the other hand it shows how this problem is related to the retention capacity of natural landscapes.