Diss. ETH No. 22000

Analytic investigation of cotangent sums related to the Riemann zeta function

A dissertation submitted to

ETH–ZÜRICH

for the degree of

DOCTOR OF SCIENCES

Presented by

Michail Th. Rassias

Diploma in Electrical and Computer Engineering
National Technical University of Athens
Master of Advanced Study in Mathematics
University of Cambridge

Born August 3, 1987
Citizen of Greece

Accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Emmanuel Kowalski	Examiner
Prof. Dr. Helmut Maier	Co-examiner

2014

Abstract

Cotangent sums are associated to the zeros of the Estermann zeta function. They have also proven to be of importance in the Nyman-Beurling criterion for the Riemann Hypothesis.
The main result of the thesis is the proof of the existence of a unique positive measure μ on $\mathbb{R}$, with respect to which certain normalized cotangent sums are equidistributed.
An improvement as well as a further generalization of Vasyunin's asymptotic formula regarding the relevant cotangent sums is obtained. We also prove an asymptotic formula for a more general cotangent sum as well as asymptotic results for the moments of the cotangent sums under consideration. We also determine the rate of growth of the moments of order $2k$, as a function of k.

Deutsche Zusammenfassung

Diese Dissertation ist der analytischen Untersuchung von Kotangenssummen gewidmet, die mit der Riemannschen Zetafunktion zusammenhängen.
Kotangenssummen stehen in Beziehung zu den Nullstellen der Estermannschen Zetafunktion. Es hat sich ergeben, dass sie auch für das Nyman-Beurling Kriterium für die Riemannsche Vermutung von Bedeutung sind.
In der vorliegenden Dissertation erhalten wir sowohl eine Verbesserung als auch eine weitere Verallgemeinerung von Vasyunins asymptotischer Formel für die relevanten Kotangenssummen. Wir beweisen auch eine asymptotische Formel für eine allgemeinere Kotangenssumme und asymptotische Ergebnisse für die Momente der betrachteten Kotangenssummen. Weiter erhalten wir genaue Informationen über die Verteilung der Werte dieser Kotangenssummen. Wir bestimmen auch die Wachstumsrate der Momente von der Ordnung $2k$ als Funktion von k.
V.I.Vasyunin bewies 1995 unter Benutzung von Riemannschen Summen das folgende Ergebnis:
Für grosse ganzzahlige Werte von b gilt:

$$c_0\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{\pi}\, b\log b - \frac{b}{\pi}(\log 2\pi - \gamma) + O(\log b)\,.$$

Hier bedeutet γ die Euler-Mascheronische Konstante. Indem wir den gebrochenen Teil einer rationalen Zahl als endliche Summe ausdrücken, die die Kotangensfunktion enthält, erhalten wir eine Verbesserung von Vasyunins Ergebnis.
Diese Methode wird im dritten Kapitel der Arbeit verallgemeinert, wo wir das folgende Ergebnis beweisen: Unter gewissen Bedingungen für die positiven ganzen Zahlen b und n gilt die asymptotische Entwicklung:

$$c_0\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{1}{\pi} b\log b - \frac{b}{\pi}(\log 2\pi - \gamma) - 1 + \sum_{l=1}^{n} E_l b^{-l} + R_n^*(b)$$

wo

$$|R_n^*(b)| \leq (A_2 n)^{4n}\, b^{-(n+1)}$$

und A_2, E_l feste Konstanten sind.
Weiter untersuchen wir die Summe

$$c_0\left(\frac{r}{b}\right) := -\sum_{m=1}^{b-1} \frac{m}{b}\cot\left(\frac{\pi m r}{b}\right)\,,$$

wo r, $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, $1 \leq r \leq b$ und $(r, b) = 1$. Wir wählen feste positive ganze Zahlen r, b_0 mit $(r, b_0) = 1$ und betrachten natürliche Zahlen b mit $b \equiv b_0 (\bmod r)$.
Für grosse Werte von b erhalten wir die folgende Asymptotik:

$$c_0\left(\frac{r}{b}\right) = \frac{1}{\pi r} b \log b - \frac{b}{\pi r}(\log 2\pi - \gamma) + C_1\, b + O(1),$$

wo die Konstante $C_1 = C_1(r, b_0)$ nur von r und b_0 abhängt und $C_1(1, b_0) = 0$.
Für die Momente der Summen $c_0(r/b)$ erhalten wir die folgenden Ergebnisse:

$$\sum_{\substack{r:(r,b)=1 \\ A_0 b \leq r \leq A_1 b}} c_0\left(\frac{r}{b}\right)^{2k} = H_k \cdot (A_1 - A_0) b^{2k} \phi(b)(1 + o(1)), \quad (b \to +\infty),$$

wo A_0, A_1 feste Konstanten mit $1/2 < A_0 < A_1 < 1$ sind und $H_k > 0$ nur von k abhängt und

$$\sum_{\substack{r:(r,b)=1 \\ A_0 b \leq r \leq A_1 b}} c_0\left(\frac{r}{b}\right)^{2k-1} = o\left(b^{2k-1}\phi(b)\right), \quad (b \to +\infty).$$

Schliesslich untersuchen wir die Verteilung der Werte von $c_0(r/b)$ und zeigen, dass die Momente von $c_0(r/b)$ der Ordnung $2k$ als Funktion von k eine Wachstumsrate besitzen, die schneller ist als exponentielles Wachstum.