DISS. ETH NO. 22275

BOUNDARY MAPS AND MAXIMAL REPRESENTATIONS OF COMPLEX HYPERBOLIC LATTICES IN $\mathrm{SU}(m, n)$

A thesis submitted to attain the degree of

DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH

(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by
MARIA BEATRICE POZZETTI

M.Sc. Università di Pisa
and Scuola Normale Superiore di Pisa
born on 16.08.1987
citizen of Italy

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Alessandra Iozzi, examiner
Prof. Dr. Domingo Toledo, co-examiner

2014

Abstract

Bounded cohomology can be used to define numerical invariants on the representation variety $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ of a discrete group Γ into a semisimple Lie group G. Such invariants, in turn, allow to select some components of $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ consisting of representations that, often, reflect situations of particular geometric interest: the *maximal representations*.

In the thesis we study maximal representations when Γ is a lattice in $\mathrm{PU}(1, p) = \mathrm{Isom}^\circ(\mathbb{H}^p_\mathbb{C})$ and G is the Hermitian Lie group $\mathrm{SU}(m, n)$, by analyzing geometric properties of the associated measurable boundary map $\phi : \partial\mathbb{H}^p_\mathbb{C} \to \mathcal{S}_{m,n}$. Here $\partial\mathbb{H}^p_\mathbb{C}$ is the visual boundary of the complex hyperbolic space and $\mathcal{S}_{m,n}$ is the compact homogeneous $\mathrm{SU}(m, n)$-space consisting of maximal isotropic subspaces of $\mathbb{C}^{m+n}$. It was conjectured that maximal representations of complex hyperbolic lattices are (essentially) obtained by restriction of a maximal representation of the ambient group $\mathrm{PU}(1, p)$. We prove this conjecture in two cases: when the Zariski closure of the image has no factor of tube type, and when p is big enough with respect to m.

The thesis consists of three parts: in the first part we review some background material about Hermitian symmetric spaces, bounded cohomology and maximal representations. This will allow us to define *chain geometry preserving* maps $\phi : \partial\mathbb{H}^p_\mathbb{C} \to \mathcal{S}_{m,n}$ and *weakly monotone* maps $\phi : \partial\mathbb{H}^p_\mathbb{C} \to \mathcal{S}_{m,m}$, singling out the properties of maps that are equivariant with respect to a maximal representation. One chapter of this part (Chapter 5) is devoted to a review and extension of the recent results of Hamlet's thesis: he classified all maximal representations between simple Hermitian Lie groups, we treat the more general case of classical Hermitian semisimple Lie groups.

In the second part we study maximal representations $\rho : \Gamma \to \mathrm{SU}(m, n)$ with $m < n$ and we analyze chain geometry preserving maps. We are able to show that each such a map agrees almost everywhere with an algebraic map. This allows us to prove the aforementioned conjecture in the case in which no factor in the Zariski closure of the image is of tube type.

In the third part we consider the case $m = n$, and study weakly monotone maps $\phi : \partial\mathbb{H}^p_\mathbb{C} \to \mathcal{S}_{m,m}$. In this case our conclusions are much weaker, but we exhibit an explicit, full measure set R, on which the restriction of ϕ is continuous and strictly equivariant. This allows to prove that all maximal representations are discrete and injective, and hence completely prove the conjecture if the dimension of the complex hyperbolic space is big enough when compared with the real rank of the target group.

Riassunto

Usando la coomologia limitata è possibile definire degli invarianti numerici sulle varietà delle rappresentazioni $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ di un gruppo discreto Γ in un gruppo di Lie semisemplice G. A loro volta questi invarianti permettono di selezionare alcune componenti connesse di $\mathrm{Hom}(\Gamma, G)$ formate dalle cosiddette *rappresentazioni massimali*.

Nella tesi ci concentriamo sulle rappresentazioni massimali nel caso in cui Γ sia un reticolo in $\mathrm{PU}(1,p) = \mathrm{Isom}^\circ(\mathbb{H}^p_\mathbb{C})$ e G denoti il gruppo di Lie Hermitiano $\mathrm{SU}(m,n)$. Lo studio è basato sull'analisi della mappa di bordo $\phi : \partial\mathbb{H}^p_\mathbb{C} \to \mathcal{S}_{m,n}$ naturalmente associata alla rappresentazione. Qui indichiamo con $\partial\mathbb{H}^p_\mathbb{C}$ il bordo visuale dello spazio iperbolico complesso e con $\mathcal{S}_{m,n}$ lo spazio omogeneo compatto formato dai sottospazi isotropici massimali di $\mathbb{C}^{m+n}$. Si congettura che tutte le rappresentazioni massimali di reticoli iperbolici complessi si ottengano per restrizione di rappresentazioni di $\mathrm{PU}(1,p)$. Dimostriamo la congettura in due casi: quando la chiusura di Zariski dell'immagine non ha fattori tube-type, e quando p è abbastanza grande rispetto a m.

Nella prima parte della tesi ricordiamo i concetti fondamentali riguardo a spazi simmetrici Hermitiani, coomologia limitata e rappresentazioni massimali, questo ci permette di definire mappe $\phi : \partial\mathbb{H}^p_\mathbb{C} \to \mathcal{S}_{m,n}$ che *preservano la geometria delle catene* e mappe *debolmente monotone* con immagine $\mathcal{S}_{m,m}$. Nell'ultimo capitolo della parte (il Capitolo 5), riassumiamo ed estendiamo parzialmente i recenti risultati della tesi di Hamlet, in cui classifica tutte le rappresentazioni massimali tra gruppi di Lie Hermitiani semplici.

Nella seconda parte del lavoro ci occupiamo del caso $m < n$ e studiamo mappe che preservano la geometria delle catene. Dimostriamo che ogni mappa con questa proprietà coincide quasi ovunque con una mappa algebrica. Quest'ultimo fatto ci permette di dimostrare la summenzionata congettura nel caso in cui nessun fattore della chiusura di Zariski dell'immagine sia di tube-type.

Nella terza parte della tesi consideriamo il caso $m = n$ e studiamo mappe debolmente monotone. In questo caso le nostre conclusioni sono molto più deboli, ma costruiamo esplicitamente un insieme R di misura piena su cui la restrizione della mappa sia continua. Questo ci permette di dimostrare che tutte le rappresentazioni massimali sono discrete e iniettive, e quindi dimostrare la congettura se la dimensione dello spazio iperbolico complesso è abbastanza grande quando confrontata con il rango del gruppo immagine.