



Doctoral Thesis

Lattice Boltzmann Models for Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics

Author(s):

Mohseni, Farhang

Publication Date:

2015

Permanent Link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-010489637> →

Rights / License:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH No. 22552

Lattice Boltzmann Models for Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics

A thesis submitted to attain the degree of
DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH

presented by

FARHANG MOHSENI

MSc. Mechanical Engineering, University of Tabriz, Iran

born on 03.08.1986

citizen of Iran

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Hans J. Herrmann, examiner

Prof. Dr. Sauro Succi, co-examiner

Prof. Dr. Bastien Chopard, co-examiner

2015

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit entwickeln wir Lattice Boltzmann (LB) Modelle zur Beschreibung verschiedener physikalischer Phänomene im Bereich der relativistischen Hydrodynamik und Magnetohydrodynamik. Zunächst leiten wir ein relativistisches LB Modell her, mit dem relativistische Fluide mit ultrahohen Geschwindigkeiten, d.h. mit Lorentz-Faktoren bis zur Ordnung $\gamma \sim 10$, im Rahmen der kinetischen Gastheorie beschrieben werden können. Im Rahmen dieses Modells entwickeln wir die Maxwell-Jüttner-Verteilung nach einer Basis orthogonaler Polynome und verwenden dabei eine spezielle Quadratur, um die diskrete Form der relativistischen Boltzmann-Gleichung und der entsprechenden Gleichgewichtsverteilung zu erhalten. Um ultrahohe Geschwindigkeiten zu erzielen, verwenden wir in der diskreten relativistischen Boltzmann-Gleichung ein Flux-Limiter Schema sowie eine geeignete Erweiterung der Volumenviskosität. Wir validieren unser Modell, indem wir Schockwellen in viskosen Quark-Gluon-Plasmen simulieren, wobei wir eine gute Übereinstimmung mit bereits existierenden Modellen feststellen. Ausserdem zeigen wir, dass unser Modell auch für niederviskose Fluide mit sehr hohen Geschwindigkeiten angewendet werden kann. Als astrophysikalisches Beispiel simulieren wir die Kollision zwischen einer bei einer Supernova-Explosion erzeugten relativistischen Schockwelle mit einer massiven interstellaren Gaswolke, z.B. einer Molekülwolke.

Als weitere Anwendungen unseres Modells studieren wir die relativistischen Effekte auf die Richtmyer-Meshkov (RM) Instabilität. Dabei zeigt sich, dass die RM Instabilität im Vergleich zum nicht-relativistischen Fall aufgrund von relativistischen Effekten abgeschwächt ist, und zwar sowohl in zwei- also

auch in dreidimensionalen Systemen. Diese numerischen Resultate vergleichen wir mit einer analytischen linearen Stabilitätsanalyse und finden eine sehr gute Übereinstimmung. Darüberhinaus stellen wir auf der Basis der numerischen Ergebnisse eine allgemeine Gleichung zur Charakterisierung der nicht-linearen Zeitentwicklung der Instabilität auf. Wir zeigen, dass durch die Anwesenheit von Jet-Teilchen Schockwellen in der Form von Mach-Kegeln erzeugt werden. Die Wechselwirkung zwischen mehreren dieser Schockwellen kann die RM Instabilität auslösen und schliesslich zur Abkühlung der Flüssigkeit führen. Um den beobachteten Abkühlungseffekt zu bestätigen, führen wir zusätzlich Stossrohr-Simulationen für die RM Instabilität durch. Als experimentelle Observable für die RM Instabilität messen wir hierbei die 2-Teilchen-Korrelationsfunktion und arbeiten die Effekte der Wechselwirkung heraus. Die Simulationen der RM Instabilität sowie der Mach-Kegel werden mit einer erweiterten Version unseres relativistischen LB Modells, welche auch die ideale Gasgleichung sowie externe Kräfte berücksichtigt, durchgeführt.

Auf der Basis unseres relativistischen LB Modells sowie eines LB Modells zum Lösen der Maxwellgleichungen entwickeln wir ein kombiniertes Modell für die relativistische Magnetohydrodynamik (MHD). Obwohl unser Modell für die resistive MHD hergeleitet wird, zeigt sich, dass es auch im hochleitfähigen Limes (ideale MHD) numerisch robuste Ergebnissen liefert. Um unser Modell zu validieren, führen wir verschiedene Testsimulationen sowohl im idealen als auch im resistiven Limes durch. Im idealen Limes betrachten wir die Ausbreitung von Alfvén-Wellen, während wir im resistiven Limes die Zeitentwicklung von Stromschichten studieren. In beiden Fällen beobachten wir eine sehr gute Übereinstimmung mit den analytischen Resultaten. Darüberhinaus untersuchen wir das Phänomen der durch die Kelvin-Helmholtz Instabilität getriebenen magnetischen Rekonnexion und erforschen den Einfluss verschiedener Parameter auf die Rekonnexionsrate. Es zeigt sich hierbei, dass das Dichteverhältnis einen vernachlässigbaren Effekt auf die Rekonnexionsrate besitzt, während ein Anstieg der Schergeschwindigkeit einen Abfall der Rekonnexionsrate zur Folge hat. Die Rekonnexionsrate ist dabei proportional zu $\sigma^{-\frac{1}{2}}$ (wobei σ die Leitfähigkeit bezeichnet) und stimmt damit

mit dem Sweet-Parker Modell überein. Schliesslich verwenden wir unser numerisches Modell, um magnetische Rekonnexion in stellaren Flares zu untersuchen. Eine dreidimensionale Simulation einer stellaren Eruption deutet darauf hin, dass die Schergeschwindigkeiten in der Photosphäre für die Rekonnexion zwischen den magnetischen Feldlinien des Hintergrundfeldes und den Feldlinienbündeln verantwortlich sind.

Die von uns entwickelten LB Modelle für die Hydrodynamik und Magneto-
hydrodynamik profitieren von den bekannten Vorteilen der LB Methode, insbesondere von Effizienz und von der einfachen Handhabung komplexer Geometrien.

Summary

In this work we develop lattice Boltzmann (LB) models for relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics and we demonstrate their applications in simulating relevant physical phenomena. First, a relativistic LB model capable of describing relativistic fluid dynamics at ultra-high velocities, with Lorentz factors up to $\gamma \sim 10$ is derived. To this purpose, we first build a new lattice kinetic scheme by expanding the Maxwell-Jüttner distribution function in an orthogonal basis of polynomials and applying an appropriate quadrature, providing the discrete versions of the relativistic Boltzmann equation and the equilibrium distribution. To achieve ultra-high velocities, we include a flux limiter scheme, and introduce the bulk viscosity by a suitable extension of the discrete relativistic Boltzmann equation. The model is validated by performing simulations of shock waves in viscous quark-gluon plasmas and comparing with existing models, finding very good agreement. Moreover, we show that our model can also be used for low-viscous flows even at very high velocities. As an astrophysical example, we simulate a relativistic shock wave, generated by a supernova explosion, colliding with a massive interstellar cloud, e.g. molecular gas.

As an application for the model, a detailed investigation of the relativistic effects on the Richtmyer-Meshkov (RM) instability is presented. It is found that the relativistic effects weaken the RM instability as compared to the non-relativistic case, both in two and three spatial dimensions. Linear stability is studied analytically and compared with numerical results in the linear growth regime. Also, based on the numerical results, a general expression characterizing the nonlinear evolution of the instability, is proposed.

Additionally, we provide numerical evidence that the Richtmyer-Meshkov instability contributes to the cooling of a relativistic fluid. We show that due to the presence of jet particles traveling throughout the medium, shock waves are generated in the form of Mach cones. The interaction of multiple shock waves can trigger the RM instability, and we have found that this process leads to a down-cooling of the relativistic fluid. To confirm the cooling effect of the instability, shock tube RM instability simulations are performed. Furthermore, in order to provide an experimental observable of the RM instability resulting from the Mach cone interaction, we measure the two particle correlation function and highlight the effects of the interaction. The simulations of the RM instability and Mach cones are performed by an extended version of the relativistic LB model which includes the ideal gas equation of state and external forces.

Based on our relativistic LB model and an LB solver for the Maxwell equations, we develop an LB model for relativistic magnetohydrodynamics (MHD). Even though the model is derived for resistive MHD, it is shown that it is numerically robust even in the high conductivity (ideal MHD) limit. In order to validate the numerical method, test simulations are carried out for both ideal and resistive limits, namely the propagation of Alfvén waves in the ideal MHD and the evolution of current sheets in the resistive regime, where very good agreement is observed comparing to the analytical results. Additionally, two-dimensional magnetic reconnection driven by Kelvin-Helmholtz instability is studied and the effects of different parameters on the reconnection rate are investigated. It is shown that the density ratio has negligible effect on the magnetic reconnection rate, while an increase in the shear velocity decreases the reconnection rate. Also it is found that the reconnection rate is proportional to $\sigma^{-\frac{1}{2}}$, with σ being the conductivity, which is in agreement with the scaling law of the Sweet-Parker model. Finally, the numerical model is used to study the magnetic reconnection in a stellar flare. Three-dimensional simulation suggests that the reconnection between the background and flux rope magnetic lines in a stellar flare can take place as a result of a shear velocity in the photosphere.

Our proposed LB models for hydrodynamics and magnetohydrodynamics

open up the possibility of exporting the proven advantages of LB methods, namely computational efficiency and easy handling of complex geometries, to the context of relativistic fluid dynamics.