



Doctoral Thesis

## Fractal dimension in information theory

**Author(s):**

Stotz, David

**Publication Date:**

2015

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-010579305> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

DISS. ETH NO. 23125

# FRACTAL DIMENSION IN INFORMATION THEORY

A thesis submitted to attain the degree of

DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH

(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

DAVID STOTZ

Dipl. Mathematician,

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau (Germany)

born on 04.02.1986

citizen of the Federal Republic of Germany

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Helmut Bölcskei,   examiner

Prof. Dr. Giuseppe Caire,   coexaminer

2015

# Abstract

In a world where the number of wirelessly connected devices is predicted to grow from 16 billion in 2014 to 40.9 billion in 2020,<sup>1</sup> dealing with interference becomes one of the major challenges for meeting the increasing demand in traffic. A possible candidate for a sophisticated transmission scheme that helps to deal with this challenge is *interference alignment*. This scheme emerged from recent advances in information theory showing that communication in interference channels (ICs) is not fundamentally interference limited (Jafar, 2011). Concretely, it was found for a number of classes of  $K$ -user ICs that the degrees of freedom (DoF), which characterizes the growth of capacity for large signal-to-noise ratio, is given by  $K/2$ , i.e., the number of DoF grows linearly in the number of users. However, the fundamental theoretical phenomenon which allows this scheme to work is still not well-understood, which is one of the central motivations for this work.

In the first part of this thesis, we explore the underlying mechanisms for constant scalar ICs. We identify explicit and almost surely satisfied conditions on the channel matrix, so that for  $K$  users, the IC has  $K/2$  DoF. In particular, this sheds light on the previous finding of Motahari et al. (2014a) that almost all  $K$ -user ICs have  $K/2$  DoF, but where no explicit characterization of the corresponding channel matrices was available. Furthermore, we obtain a general characterization of DoF in terms of entropy of discrete random variables, which reveals

---

<sup>1</sup>See <https://www.abiresearch.com/press/the-internet-of-things-will-drive-wireless-connect/>, Sep., 2015

a fundamental connection between DoF and the field of additive combinatorics.

A crucial tool for obtaining these results is the use of a class of singular input distributions called *self-similar* distributions. These distributions arise from fractal constructions and their complexity can be characterized by an associated fractal dimension called *Rényi information dimension*. Thanks to a recent breakthrough by Hochman (2014), we are able to compute the Rényi information dimension under very mild assumptions on the self-similar distribution.

The second part of this thesis extends the general DoF-characterization for constant scalar ICs in terms of Rényi information dimension (Wu et al., 2015) to vector ICs. Since the vector IC model covers the constant scalar IC, the MIMO IC, time- and/or frequency-selective ICs, and combinations thereof as special cases, it allows for a unified treatment of various different interference alignment schemes. Moreover, it allows us to evaluate the DoF achieved by new signaling schemes for vector ICs. As found for the scalar case in (Wu et al., 2015), using singular input distributions is necessary for achieving full DoF, but strikingly, in the vector case it suffices to enforce singularity on the joint distribution of each individual transmit vector. This can be realized through signaling in subspaces of the ambient signal space, which is in accordance with the idea of “classical” interference alignment à la Cadambe and Jafar (2008), and Maddah-Ali et al. (2008).

In the third and final part of this thesis we study signal separation. The problem is to identify conditions under which it is possible to recover vectors  $\mathbf{y}$  and  $\mathbf{z}$  from a sum of linear measurements

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{z}. \tag{1}$$

Numerous problems in signal processing can be cast in the form (1), e.g., the recovery of signals corrupted by impulse noise or narrowband interference such as electric hum, the separation of (audio or video) signals into two distinct components, inpainting, and super-resolution. In particular, the research literature on sparse signal recovery provides recovery guarantees under constraints on the number of non-zero

entries in  $\mathbf{y}$  and  $\mathbf{z}$ , e.g., (Donoho and Kutyniok, 2013; Studer et al., 2012).

We develop an information-theoretic framework for the signal separation problem, i.e., we study the existence of a separator that recovers  $\mathbf{y}$  and  $\mathbf{z}$  as the dimensions of  $\mathbf{y}$  and  $\mathbf{z}$  get sufficiently large. In our achievability results we derive asymptotic recovery results for random, possibly dependent,  $\mathbf{y}$  and  $\mathbf{z}$ , where the distributions of  $\mathbf{y}$  and  $\mathbf{z}$  are general, i.e., mixtures of discrete, absolutely continuous, and singular distributions. Again, we rely on a fractal dimension concept, which allows us to characterize the description complexity of the source distribution. Specifically, here we use *Minkowski dimension* which quantifies the number of balls needed to cover a set as the radius of the balls tends to zero. Using Minkowski dimension, we introduce a probabilistic uncertainty relation, which is the crucial tool for guaranteeing uniqueness of signals  $\mathbf{y}$  and  $\mathbf{z}$  satisfying (1). Our probabilistic uncertainty relation is inspired by dynamical systems theory and can be geometrically interpreted as a guarantee that the intersection of generic subspaces with subsets of sufficiently small Minkowski dimension is empty. For the case where we additionally require the separator to be Hölder continuous, we establish a regularized probabilistic uncertainty relation, which allows us to develop a theory on the existence of Hölder continuous separators that parallels the one discussed above.

# Kurzfassung

In einer Welt, in der die Anzahl drahtlos kommunizierender Geräte von 16 Milliarden im Jahre 2014 auf geschätzte 40.9 Milliarden im Jahre 2020 anwachsen wird,<sup>2</sup> ist der Umgang mit Interferenz eine der zentralen Herausforderungen für die Bewältigung des steigenden Datenverkehrs. Ein möglicher Kandidat für ein fortschrittliches Kommunikationsschema welches dazu beitragen könnte, dieser Herausforderung zu begegnen, ist *Interference Alignment*.<sup>3</sup> Dieses Kommunikationsschema ging aus jüngsten informationstheoretischen Forschungsergebnissen hervor, die gezeigt haben, dass die Kommunikation in Interferenzkanälen (ICs, engl.: interference channels) durch Interferenz nicht fundamental beschränkt wird (Jafar, 2011). Konkret wurde für einige Klassen von ICs mit  $K$  Nutzern gezeigt, dass die Freiheitsgrade (DoF, engl.: degrees of freedom), welche das Wachstum der Kapazität für hohes Signal-Rausch-Verhältnis charakterisieren, durch  $K/2$  gegeben sind. Dies bedeutet insbesondere, dass die DoF linear mit der Anzahl von Nutzern anwachsen. Die theoretischen Grundlagen, die Interference Alignment möglich machen, sind jedoch nach wie vor nicht ausreichend verstanden. Die Weiterentwicklung dieses Verständnisses ist Motivation für ein Grossteil dieser Thesis.

Im ersten Teil der Thesis werden die zu Grunde liegenden Mechanismen für konstante, skalare ICs untersucht. Wir bestimmen explizite und fast sicher erfüllte Bedingungen an die Kanalmatrix, sodass ein IC

---

<sup>2</sup>Vgl. <https://www.abiresearch.com/press/the-internet-of-things-will-drive-wireless-connect/>, Sep., 2015

<sup>3</sup>z. Dt.: das Ausrichten von Interferenz

mit  $K$  Nutzern  $K/2$  DoF besitzt. Dieses Ergebnis erlaubt ein besseres Verständnis des Resultats von Motahari et al. (2014a), welches besagt, dass fast alle ICs mit  $K$  Nutzern  $K/2$  DoF besitzen, wobei jedoch keine explizite Charakterisierung dieser Kanalmatrizen möglich war. Darüber hinaus, ermitteln wir eine allgemeine Charakterisierung von DoF durch eine Formel bestehend aus der Entropie von diskreten Zufallsvariablen. Diese Charakterisierung zeigt einen grundsätzlichen Zusammenhang von DoF und dem Gebiet der additiven Kombinatorik auf.

In der Herleitung der genannten Ergebnisse spielen *selbstähnliche* Verteilungen, welche durch fraktale Konstruktionen entstehen, eine entscheidende Rolle. Die zugehörige Komplexität einer solchen Verteilung kann durch eine fraktale Dimensionsgrösse, die sogenannte *Rényi Informationsdimension*, beschrieben werden. Ein Durchbruch in der Theorie zur fraktalen Geometrie von Hochman (2014) erlaubt es uns, die Rényi Informationsdimension unter sehr milden Annahmen an die selbstähnliche Verteilung zu berechnen.

Im zweiten Teil der Thesis erweitern wir die DoF-Charakterisierung für konstante, skalare ICs mittels Rényi Informationsdimension von Wu et al. (2015) auf vektorwertige ICs. Da vektorwertige ICs die Fälle des konstanten, skalaren ICs, des MIMO ICs, des zeit- und/oder frequenzselektiven ICs und Kombinationen der zuvor genannten abdecken, können wir hiermit verschiedene Inkarnationen von Interference Alignment einheitlich behandeln. Darüber hinaus können wir allgemein die DoF ermitteln, die von neuartigen Kommunikationsschemata erreicht werden. Es stellt sich heraus, dass es wie im Fall konstanter, skalarer ICs (Wu et al., 2015) notwendig ist, singuläre Eingangsverteilungen zu verwenden, um alle DoF zu erhalten. Bemerkenswerterweise genügt es im Vektorfall die Singularität auf der multivariaten Verteilung jedes Signalvektors zu realisieren. Dies können wir erreichen, indem wir die Signale auf Unterräumen verteilt wählen, welches gerade der Idee des “klassischen” Interference Alignment von Cadambe and Jafar (2008) und Maddah-Ali et al. (2008) entspricht.

Im dritten und letzten Teil der Thesis studieren wir die Trennung

von Vektoren  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{z}$  unter der Beobachtung einer Summe linearer Messungen

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{z}. \quad (2)$$

Das Ziel hierbei ist es, Bedingungen zu bestimmen, die eine erfolgreiche Rekonstruktion von  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{z}$  ermöglichen. Dieses Forschungsproblem ist von Bedeutung in der Signalverarbeitung, da es eine Reihe von Anwendungen abdeckt. Beispielhafte Anwendungen sind das Trennen eines Nutzsignals von einem ungewollten Störsignal, z.B. Impulsrauschen, Schmalbandinterferenz oder Netzbrummen, das Trennen eines (Audio- oder Video-) Signals in zwei strukturell verschiedene Teilsignale, Inpainting und Super Resolution. In der Forschungsliteratur über dünnbesetzte Signale finden sich einige Resultate, die Garantien für erfolgreiche Rekonstruktion bereitstellen, unter Bedingungen an die Anzahl von Nicht-Null-Einträgen in  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{z}$ , vergleiche z.B. (Donoho and Kutyniok, 2013; Studer et al., 2012).

Wir entwickeln einen informationstheoretischen Ansatz für das Trennungsproblem, das heisst, wir studieren die Existenz einer Trennungsabbildung, welche für genügend grosse Dimensionen die Signale  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{z}$  rekonstruiert. In unseren Ergebnissen leiten wir asymptotische Rekonstruktionsbedingungen her für Zufallssignale  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{z}$ , die voneinander abhängen und allgemeine Verteilungen haben können, das heisst, Mischungen aus diskreten, absolut stetigen und singulärer Verteilungen. Hierbei verwenden wir wiederum ein Konzept von fraktaler Dimension, um die Komplexität der Signalverteilungen zu charakterisieren. In diesem Fall verwenden wir die sogenannte *Minkowski Dimension*, welche die Anzahl von Bällen beschreibt, die nötig ist, um eine Menge zu überdecken, wenn der Radius der Bälle gegen Null strebt. Mithilfe der Minkowski Dimension führen wir eine probabilistische Unschärferelation ein, welche eine zentrale Rolle spielt, um die Eindeutigkeit der Signale  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{z}$  in (2) zu garantieren. Unsere probabilistische Unschärferelation ist inspiriert durch Arbeiten aus der Theorie über dynamische Systeme und kann geometrisch interpretiert werden als die Aussage, dass der Schnitt eines generischen Unterraums mit einer Menge von genügend kleiner Minkowski Dimen-



sion leer ist. Schliesslich untersuchen wir das Problem der Existenz von Trennungsabbildungen, die zusätzlich Hölder-stetig sind. Hierfür entwickeln wir eine regularisierte probabilistische Unschärferelation, welche es uns ermöglicht, hierfür eine Theorie analog zu der oben beschriebenen aufzubauen.