DISS. ETH NO. 23172

Simultaneous embeddings

A thesis submitted to attain the degree of
DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH
(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by
Vincent Kusters
Master of Science (Computer Science and Engineering)
Technische Universiteit Eindhoven
born on September 2, 1988
citizen of the Netherlands

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Emo Welzl, examiner
Dr. Michael Hoffmann, co-examiner
Prof. Dr. Michael Kaufmann, co-examiner

2015

ABSTRACT

The field of graph drawing revolves around the problem of creating beautiful and useful depictions of graphs. The most commonly used drawings represent every vertex by a point in the plane and every edge by a curve between the corresponding points. Both from a theoretical and a practical point of view, it is desirable to avoid edge crossings in such drawings; a graph is planar if this is possible. The problem of drawing a single planar graph is well-understood. Kuratowski's famous forbidden-minor theorem gives us a combinatorial characterization of the planar graphs. We can decide whether a graph is planar in linear time, and we can find a crossing-free straight-line drawing of every planar graph on a small grid. In this thesis, we generalize this problem to drawing two or more related graphs instead of just one, subject to certain restrictions. Such *simultaneous embedding* problems can be classified into two categories.

In the first category, the mapping between the vertex sets of the input graphs is given in the input. Specifically, given k graphs on the same set of n vertices, we study the problem of finding a simultaneous geometric embedding: a plane straight-line embedding of each graph in which identical vertices are mapped to identical points. We prove that the problem of deciding whether such a drawing exists is complete for the existential theory of the reals. Hence, the problem is polynomial-time equivalent to several other problems in computational geometry, such as recognizing intersection graphs of line segments or finding the rectilinear crossing number of a graph. Though this complexity result was already known, our proof implies a new tight lower bound on the size of the point coordinates in a simultaneous geometric embedding on the grid. As an intermediate step, our reduction relies on radial systems. These describe the order in which a rotating ray centered at a point encounters the other points. We show under what circumstances the combinatorial structure of a point set can be reconstructed from the radial system. Since a simultaneous geometric embedding does not always exists (even for two trees), we study two relaxations of in which either the edges need not be represented by straight-line segments or some vertices may be mapped to different points in different drawings.

In the second category, the mapping between the vertex sets of the input graphs is not given in the input: instead, the algorithm is free to choose any desired mapping. Specifically, we consider the problem of finding a planar packing of two trees T_1 and T_2 on n vertices: a planar graph G on n vertices that contains T_1 and T_2 as edge-disjoint subgraphs. A planar packing does not exist if T_1 or T_2 is a star: in G the star would use all available edges incident to its center, leaving no edges to connect the vertex in the other tree. García et al. [62] conjectured in 1997 that this is the only obstruction. Over the last eighteen years, there have been six publications that solve this problem for restricted cases. The most important contribution of this thesis is a proof that the conjecture holds in full generality.

ZUSAMMENFASSUNG

Das Graphzeichnen beschäftigt sich damit, nützliche und ästhetisch ansprechende Darstellungen von Graphen zu finden. Gewöhnlich wird jeder Knoten des Graphen durch einen Punkt in der Ebene und jede Kante durch eine verbindende Kurve repräsentiert. Sowohl aus theoretischen als auch aus praktischen Gründen ist es wünschenswert, sich kreuzende Kanten zu vermeiden; wenn dies möglich ist, heißt der Graph planar. Die Aufgabe, einen einzigen planaren Graphen zu zeichnen, ist bereits gut untersucht. Durch den bekannten Satz von Kuratowski ist eine kombinatorische Charakterisierung der planaren Graphen gegeben. Planarität ist in Linearzeit entscheidbar, und jeder planare Graph lässt sich kreuzungsfrei und geradlinig auf einem kleinen Gitter zeichnen. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der allgemeineren Aufgabe, zwei oder mehrere Graphen (statt eines einzigen) gemäß gewissen Bedingungen zu zeichnen. Solche Simultaneinbettungsprobleme lassen sich in zwei Klassen einteilen.

Bei den Problemen der ersten Klasse sind Bijektionen zwischen den Knotenmengen der Graphen Teil der Eingabe. Gegeben sind also k Graphen auf derselben n-elementigen Knotenmenge, und gesucht ist eine simultane geometrische Einbettung, d. h. eine geradlinige Einbettung jedes Graphen in die Ebene, so dass identische Knoten auf identische Punkte abgebildet werden. Wir zeigen: Das Entscheidungsproblem, ob eine solche Zeichnung existiert, ist vollständig für die existentielle Theorie der reellen Zahlen. Es ist daher polynomialzeit-äquivalent zu verschiedenen anderen Problemen der algorithmischen Geometrie, wie z. B. der

Erkennung von Schnittgraphen von Geradenstücken oder der Berechnung der geradlinigen Kreuzungszahl. Obwohl dieses Komplexitätsresultat bereits bekannt war, liefert unser Beweis eine neue exakte untere Schranke für die Größe der Koordinaten in einer simultanen geometrischen Einbettung. Ein Zwischenschritt unserer Reduktion basiert auf sogenannten Radialsystemen. Diese beschreiben die Reihenfolge, in der ein um einen der Punkte rotierender Strahl auf die anderen Punkte trifft. Wir zeigen, unter welchen Bedingungen sich die kombinatorische Struktur einer Punktmenge aus dem Radialsystem rekonstruieren lässt. Da eine simultane geometrische Einbettung nicht immer existiert (nicht einmal für zwei Bäume), betrachten wir zwei Varianten des Problems: Entweder erlauben wir, die Kanten als Kurven statt als Geradenstücke zu zeichnen, oder wir erlauben, einige Knoten in den verschiedenen Zeichnungen auf verschiedene Punkte abzubilden.

Bei den Problemen der zweiten Klasse sind die Bijektionen zwischen den Knotenmengen der Eingabegraphen nicht vorgegeben; stattdessen ist es dem Algorithmus erlaubt, eine geeignete Bijektion zu wählen. Genauer interessieren wir uns für die Berechnung einer planaren Packung zweier Bäume T_1 und T_2 auf n Knoten, d. h. eines planaren Graphen G auf n Knoten, welcher T_1 und T_2 als kantendisjunkte Teilgraphen enthält. Eine planare Packung existiert nicht, wenn T_1 oder T_2 ein Stern ist, denn der Stern würde in G bereits alle zu seinem Zentrum inzidenten Kanten aufbrauchen. García u. a. [62] formulierten 1997 die Vermutung, dass dies die einzige Obstruktion sei. In den vergangenen achtzehn Jahren sind sechs Veröffentlichungen erschienen, welche Spezialfälle des Problems lösen. Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist der Beweis, dass die Vermutung in voller Allgemeinheit gilt.