

Diss. ETH No. 23120

GEOMETRY AND STRUCTURE OF METRIC INJECTIVE HULLS

A thesis submitted to attain the degree of
DOCTOR OF SCIENCES OF ETH ZURICH
(DR. SC. ETH ZURICH)

presented by

MAËL PAVÓN

MSc ETH Math., ETH Zurich

born September 23rd, 1989

citizen of Haut-Intyamou (FR) and Spain

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Urs Lang, Examiner

Prof. Dr. Victor Chepoi, Co-Examiner

2016

Abstract

In this thesis, we prove various results on metric injective hulls and injective metric spaces. In Chapter II, we show that the operator given by assigning to a metric space the corresponding metric space defined by Isbell's injective hull is 2-Lipschitz in the Gromov-Hausdorff sense when defined on the class of general metric spaces and 1-Lipschitz when restricted to the class of tree-like metric spaces. These estimates are optimal. In Chapter III, we characterize effectively the injective affine subspaces of the finite dimensional injective normed spaces in any dimension and go on characterizing effectively injective convex polyhedra, this characterization provides in particular a concrete verification algorithm. We then make use of this result to prove that the solution set of a system of linear inequalities with at most two variables per inequality is injective if it is non-empty. Turning to injective hulls with the structure of a polyhedral complex, we extend in Chapter IV the canonical decomposition theory of Bandelt and Dress to infinite metric spaces with integer-valued metric. We consider infinite totally split-decomposable metric spaces with integer-valued metric and satisfying a local rank condition. We then give a characterization for Isbell's injective hull of such metric spaces to be combinatorially equivalent to a cube complex satisfying the CAT(0) link condition. We apply this, among others, to injective hulls of cycle graphs. In Chapter V, we give an alternative characterization of finite combinatorial dimension for metric spaces. We consider the canonical decomposition of the collection of extremal functions that induce admissible graphs. We prove an optimal bound on the diameters of the elements of this canonical decomposition for discretely path-connected metric spaces. We conclude by proving for different classes of metric spaces including any proper metric space, that such a space is injective if and only if it is 4-hyperconvex and possesses a geodesic bicombing.

Zusammenfassung

In dieser Dissertation beweisen wir Resultate über metrische injektive Hüllen und injektive metrische Räume. In Kapitel II beweisen wir, dass die Isbellsche injektive Hülle ein 2-Lipschitz-Operator ist im Sinne von Gromov-Hausdorff, wenn man sie auf der Klasse aller metrischen Räume definiert. Die Isbellsche injektive Hülle wird zu einem 1-Lipschitz-Operator, wenn man sie auf die Klasse aller baumartigen metrischen Räume einschränkt. In Kapitel III charakterisieren wir effektiv die injektiven affinen Teilmengen der endlich dimensional normierten Räume beliebiger Dimension. Ausserdem beweisen wir noch eine effektive Charakterisierung aller injektiven konvexen Polyeder. Diese Charakterisierung liefert insbesondere einen konkreten Verifikationsalgorithmus. Wir verwenden dieses Resultat, um zu beweisen, dass ein System linearer Ungleichungen mit höchstens zwei Variablen pro Ungleichung injektiv ist, wenn es nicht leer ist. Desweiteren betrachten wir diejenigen injektiven Hüllen, die die Struktur eines polyedrischen Komplexes haben und in Kapitel IV verallgemeinern wir die kanonische Zerlegungstheorie von Bandelt und Dress, indem wir sie für unendliche metrische Räume mit ganzzahliger Metrik entwickeln. Wir betrachten dann diejenigen unendlichen, vollständig split-zerlegbaren metrischen Räumen mit ganzzahliger Metrik, die eine lokale Rangbedingung erfüllen. Für diese Klasse metrischer Räume charakterisieren wir diejenigen, für die ihre Isbellsche injektive Hülle kombinatorisch äquivalent zu einem Würfelkomplex ist, welcher die CAT(0)-Link-Bedingung erfüllt. Wir wenden dieses Kriterium insbesondere auf Zykelgraphen an. In Kapitel V geben wir eine alternative Charakterisierung der endlichen kombinatorischen Dimension. Wir betrachten die kanonische Zerlegung der Familie aller Extremalfunktionen, die zulässige Graphen induzieren. Wir beweisen eine optimale Schranke an die Durchmesser der Elemente dieser kanonischen Zerlegung für diskret wegzusammenhängende metrische Räume. Schliesslich beweisen wir für verschiedene Klassen metrischer Räume, insbesondere für jeden sogenannten proper metrischen Raum, dass dieser genau dann injektiv ist, wenn er 4-hyperkonvex ist und ein Bicombing besitzt.