Concentration-compactness phenomena in conformal geometry

Author(s):
Martinazzi, Luca M.

Publication Date:
2009

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-005861876

DISS. ETH NO. 18237

CONCENTRATION-COMPACTNESS PHENOMENA IN CONFORMAL GEOMETRY

A dissertation submitted to the

SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of

Doctor of Sciences

presented by

LUCA M. MARTINAZZI

M.Sc. Università di Pisa

and Scuola Normale Superiore di Pisa

born June 5, 1981

citizen of Italy

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Michael Struwe, examiner

Prof. Dr. Tristan Rivière, co-examiner

Prof. Dr. Andrea Malchiodi, co-examiner

2009

Abstract

Consider a smooth Riemannian manifold (M, g) of arbitrary even dimension $2m$, and a sequence of conformal metrics $g_k = e^{2u_k} g$ on M, $u_k \in C^\infty(M)$. In this work we study the concentration-compactness behaviour of this sequence of metrics, under the assumption that their volumes are equibounded and their Q-curvatures $Q^{2m}_{g_k}$ converge uniformly or even in C^0 to a given continuous function Q_0.

We start by taking (M, g) to be $\mathbb{R}^{2m}$ with the Euclidean metric. Then, in analogy with a 4-dimensional result of Adimurthy, F. Robert and M. Struwe, we show that, in case of non-compactness and up to subsequences, the metrics vanish in the limit uniformly locally outside a rectifiable set of dimension at most $2m - 1$.

We have a much stronger result, if (M, g) is a *closed* Riemannian manifold, satisfying a generic (hence not restrictive) condition which will be discussed. In this case, we either have compactness, or in the limit (up to subsequences) the metrics vanish outside a *finite* concentration set S. Moreover Q_0 is positive on S, and the measures $Q^{2m}_{g_k} \mathrm{dvol}_{g_k}$ converge weakly to $\sum_{x\in S} \Lambda_1 \delta_x$, where $\Lambda_1 = (2m-1)!\mathrm{vol}(S^{2m})$ is the total Q-curvature of the sphere. In particular the total Q-curvature of the metrics g_k (it does not depend on k) is an integer multiple of the total Q-curvature of the sphere. Our approach generalizes the 4-dimensional argument of O. Druet and F. Robert to arbitrary dimension, also allowing for the Q-curvatures $Q^{2m}_{g_k}$ to have varying sign. Quantization results for similar equations, have also been obtained by A. Malchiodi and C. B. Ndiaye using other techniques.

In the case of the round sphere, $(M, g) = (S^{2m}, g_{S^{2m}})$, the concentration result is particularly explicit. We either have compactness, or we have concentration at a single point, and the pull-back metrics $\Phi_k^* g_k$ converge up to a subsequence towards the round metric $g_{S^{2m}}$, if the Φ_k's are suitably chosen Möbius diffeomorphisms. This generalizes to arbitrary dimension previous results in dimension 2 by M. Struwe and in dimension 4 by A. Malchiodi and M. Struwe. We also allow the $Q^{2m}_{g_k}$'s to have varying sign, and show that concentration only occurs at places of positive Q-curvature.

These concentration-compactness results rely heavily on a blow-up technique and on the classification and study of the asymptotic behaviour at infinity of the conformal metrics on $\mathbb{R}^{2m}$ of constant Q-curvature $Q \in \mathbb{R}$ and finite volume. When $Q > 0$, we do this in arbitrary dimension, building upon several previous partial results. For $Q \leq 0$, we first show the existence of such metrics if $m > 1$,

which was previously unknown, and then develop an analysis analogous to the one done for the positive case.

Quite remarkably, the above geometrical results, can be used to give an elegant proof of a concentration-compactness result for the equation

$$(-\Delta)^m u_k = \lambda_k u_k e^{m u_k^2},$$

which arises from the Adams-Moser-Trudinger inequality:

$$\sup_{u \in H_0^m(\Omega),\, \|\nabla^m u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \Lambda_1} \fint_\Omega e^{mu^2} dx = c_0(m) < +\infty.$$

This generalizes previous works of Adimurthy, O. Druet, F. Robert and M. Struwe. The proof we give, shows a clean relation between the geometric problem of prescribing the Q-curvature and an apparently unrelated imbedding problem in functional analysis. Here we use some sharp Lorentz-space estimates, which allow a more transparent approach.

Zusammenfassung

Sei (M, g) eine glatte Riemannsche Mannigfaltigkeit beliebiger gerader Dimension $2m$, und sei $g_k = e^{2u_k} g$, mit $u_k \in C^\infty(M)$, eine Folge konformer Metriken auf M. In dieser Arbeit studieren wir das Verhalten dieser Folge von Metriken im Hinblick auf Konzentrations-Kompaktheit unter der Annahme, daß ihre Volumina gleichmässig beschränkt sind und ihre Q-Krümmungen $Q^{2m}_{g_k}$ gleichmäßig, oder sogar in C^0, gegen eine gegebene stetige Funktion Q_0 konvergieren.

Zu Beginn wählen wir für (M, g) den euklidischen $\mathbb{R}^{2m}$. In Analogie zu einem Resultat von Adimurthy, F. Robert und M. Struwe in Dimension 4 zeigen wir im nicht-kompakten Fall zunächst, daß eine Teilfolge der Folge der Metriken g_k im Limes lokal gleichmäßig außerhalb einer rektifizierbaren Menge der Dimension höchstens $2m - 1$ verschwindet.

Eine viel stärkere Aussage erhalten wir, wenn (M, g) eine *geschlossene* Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, welche eine generische (also nicht restriktive) Bedingung erfüllt, die wir später erklären. In diesem Fall liegt entweder Kompaktheit vor, oder eine Teilfolge der Metriken verschwindet im Limes außerhalb einer endlichen Konzentrationsmenge S. Desweiteren ist Q_0 positiv auf S, und die Maße $Q^{2m}_{g_k} \mathrm{dvol}_{g_k}$ konvergieren schwach gegen $\sum_{x \in S} \Lambda_1 \delta_x$, wobei wir mit $\Lambda_1 = (2m - 1)!\mathrm{vol}(S^{2m})$ die totale Q-Krümmung der Sphäre beschreiben. Insbesondere ist die totale Q-Krümmung der Metriken g_k (welche nicht von k abhängt) ein ganzzahliges Vielfaches der totalen Q-Krümmung der Sphäre. Unser Zugang verallgemeinert ein Argument, welches O. Druet and F. Robert für den vierdimensionalen Fall gegeben haben, auf beliebige Dimensionen, wobei das Vorzeichen der Q-Krümmungen $Q^{2m}_{g_k}$ nun springen darf. Mit anderen Methoden A. Malchiodi und C. B. Ndiaye haben Quantisierungsresultate für ähnliche Gleichungen erzielt.

Im Falle der runden Sphäre, $(M, g) = (S^{2m}, g_{S^{2m}})$, können wir unser Resultat über das Konzentrationsverhalten der Folge g_k noch verfeinern: Entweder liegt Kompaktheit vor, oder es kommt zur Konzentration an einem einzigen Punkt und eine Teilfolge der zurückgezogenen Metriken $\Phi_k^* g_k$ konvergiert gegen die runde Metrik $g_{S^{2m}}$, unter der Voraussetzung, daß die Φ_k geeignet gewählte Möbiusdiffeomorphismen sind. Dies verallgemeinert bekannte Resultate von M. Struwe für Dimension 2 und von A. Malchiodi und M. Struwe für Dimension 4 auf den Fall beliebiger Dimension. Darüberhinaus lassen wir zu, daß das Vorzeichen von $Q^{2m}_{g_k}$ springt, und zeigen, daß die Konzentration nur an Stellen positiver Q-Krümmung auftritt.

Unsere Resultate zur Konzentrations-Kompaktheit fußen zum einen auf einer blow-up-Technik, und zum anderen auf der Klassifikation und dem Studium des

asymptotischen Verhaltens der konformen Metriken auf $\mathbb{R}^{2m}$ von konstanter Q-Krümmung $Q \in \mathbb{R}$, und endlichem Volumen. Im Falle $Q > 0$ zeigen wir dies unter Benutzung verschiedener früherer Teilresultate in beliebiger Dimension. Im Falle $Q \leq 0$ zeigen wir zunächst die Existenz solcher Metriken für $m > 1$ — ein bis dahin unbekanntes Resultat — und führen sodann analoge Untersuchungen wie im Falle $Q > 0$ durch.

Eine bemerkenswerte Tatsache ist, daß obige geometrische Ergebnisse einen eleganten Beweis eines Konzentrations-Kompaktheits-Resultates für die Gleichung

$$(-\Delta)^m u_k = \lambda_k u_k e^{m u_k^2}$$

liefern, welche mit der Adams-Moser-Trudinger Ungleichung

$$\sup_{u \in H_0^m(\Omega),\, \|\nabla^m u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \Lambda_1} \fint_\Omega e^{m u^2} dx = c_0(m) < +\infty$$

verknüpft ist. Dies verallgemeinert frühere Arbeiten von Adimurthy, O. Druet, F. Robert und M. Struwe. Unser Beweis deckt einen Zusammenhang zwischen dem geometrischen Problem, die Q-Krümmung vorzuschreiben, und einem offensichtlich damit nicht verwandten funktionalanalytischen Einbettungsproblem auf. Wir benützen hierbei einige scharfe Abschätzungen für Lorentzräume, welche eine besonders klare Argumentation ermöglichen.

Riassunto

Consideriamo una varietà riemanniana liscia (M, g) di dimensione pari $2m$ ed una successione di metriche conformi $g_k = e^{2u_k} g$ su M, $u_k \in C^\infty(M)$. In questo lavoro studiamo i fenomeni di concentrazione-compattezza di questa successione di metriche, nell'ipotesi che i loro volumi siano equilimitati e che le loro Q-curvature $Q^{2m}_{g_k}$ convergano uniformemente o addirittura in C^0 verso una data funzione Q_0.

Iniziamo con il prendere (M, g) uguale a $\mathbb{R}^{2m}$ con metrica euclidea. Quindi, in analogia con un risultato di Adimurthy, F. Robert e M. Struwe in dimensione 4, mostriamo che in caso di non compattezza e a meno di una sottosuccessione, le metriche vanno a zero nel limite per $k \to \infty$ localmente uniformemente al di fuori di un insieme rettificabile di dimensione al più $2m - 1$.

Abbiamo un risultato molto più forte se (M, g) è una varietà riemanniana *chiusa*, che soddisfa una certa condizione generica (quindi ben poco restrittiva) che discuteremo. In questo caso, o abbiamo compattezza, oppure nel limite (a meno di sottosuccessioni) le metriche vanno a zero al di fuori di un insieme di concetrazione *finito* S. Inoltre Q_0 è positivo su S, e le misure $Q^{2m}_{g_k} \mathrm{dvol}_{g_k}$ convergono debolmente verso $\sum_{x \in S} \Lambda_1 \delta_x$, laddove $\Lambda_1 = (2m-1)!\mathrm{vol}(S^{2m})$ è la Q-curvatura totale della sfera. In particolare, la Q-curvatura totale delle metriche g_k (non dipende da k) è un multiplo intero della Q-curvatura totale della sfera. Il nostro approccio generalizza a dimensione arbitraria un metodo che O. Druet e F. Robert hanno sviluppato in dimensione 4. Inoltre permettiamo alle Q-curvature $Q^{2m}_{g_k}$ di cambiare segno. Risultati di quantizzazione per equazioni simili sono anche stati ottenuti da A. Malchiodi e C. B. Ndiaye usando tecniche diverse.

Nel caso della sfera standard, $(M, g) = (S^{2m}, g_{S^{2m}})$, il risultato di concentrazione-compattezza risulta particolarmente esplicito. O abbiamo compattezza, o abbiamo concentrazione in un singolo punto, e i pull-back $\Phi_k^* g_k$ delle metriche g_k convergono, a meno di una sottosuccessione, verso la metrica standard $g_{S^{2m}}$, se le Φ_k sono diffeomorfismi di Möbius opportunamente scelti. Questo generalizza a dimensione arbitraria precedenti risultati di M. Struwe in dimensione 2 e di A. Malchiodi e M. Struwe in dimensione 4. Inoltre permettiamo alle $Q^{2m}_{g_k}$ di cambiare segno, e mostriamo che la concentrazione può avvenire solo nei punti di Q-curvatura positiva.

Questi risultati di concentrazione-compattezza dipendono fortemente da una certa tecnica di blow-up e dalla classificazione e studio asintotico ad infinito delle metriche conformi su $\mathbb{R}^{2m}$ di Q-curvatura costante $Q \in \mathbb{R}$ e volume finito. Per $Q > 0$, facciamo ciò in dimensione arbitraria, migliorando vari lavori precedenti.

Per $Q \leq 0$, dapprima mostriamo l'esistenza di tali metriche quando $m > 1$, cosa precedentemente non nota, poi sviluppiamo un'analisi analoga a quella prodotta nel caso positivo.

È molto interessante notare che i risultati geometrici sopra descritti possono essere usati per dare un'elegante dimostrazione di un risultato di concentrazione-compattezza per l'equazione

$$(-\Delta)^m u_k = \lambda_k u_k e^{m u_k^2},$$

che nasce nell'ambito della disuguaglianza di Adams-Moser-Trudinger:

$$\sup_{u \in H_0^m(\Omega),\, \|\nabla^m u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \Lambda_1} \fint_\Omega e^{mu^2} dx = c_0(m) < +\infty.$$

Così facendo, generalizziamo precedenti lavori di Adimurthy, O. Druet, F. Robert e M. Struwe. La dimostrazione che diamo mostra una relazione molto chiara tra il problema geometrico della Q-curvatura prescritta e un problema di immersione in analisi funzionale che, in apparenza, è completamente scollegato. Qui facciamo uso di alcune stime in spazi di Lorentz, che permettono un approccio più trasparente.