

DISS. ETH NO. 19272

OPTIMAL CONSUMPTION AND INVESTMENT WITH
POWER UTILITY

A dissertation submitted to
ETH ZURICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by
MARCEL FABIAN NUTZ
Dipl. Math. ETH
born October 2, 1982
citizen of Basel BS, Switzerland

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Martin Schweizer examiner
Prof. Dr. Huyêñ Pham co-examiner
Prof. Dr. H. Mete Soner co-examiner
Prof. Dr. Nizar Touzi co-examiner

2010

Abstract

In this thesis we study the utility maximization problem for power utility random fields in a general semimartingale financial market, with and without intermediate consumption. The notion of an opportunity process is introduced as a reduced form of the value process for the resulting stochastic control problem. This process is shown to describe the key objects: the optimal strategy, the value function, and the convex-dual problem. We show that the existence of an optimal strategy implies that the opportunity process solves the so-called Bellman equation. The optimal strategy is described pointwise in terms of the opportunity process, which is also characterized as the minimal solution of the Bellman equation. Furthermore, we provide verification theorems for this equation. As an example, we consider exponential Lévy models, for which we construct an explicit solution in terms of the Lévy triplet. Finally, we study the asymptotic properties of the optimal strategy as the relative risk aversion tends to infinity or to one. The convergence of the optimal consumption is obtained for the general case, while the convergence of the optimal trading strategy is obtained for continuous semimartingale models.

Kurzfassung

Diese Dissertation beschäftigt sich mit dem Nutzenmaximierungs-Problem für Potenznutzen, mit oder ohne Konsum, in einem allgemeinen Semimartingalmodell eines Finanzmarktes. Der so genannte Opportunitätsprozess wird eingeführt als reduzierte Form des Wertprozesses des zugehörigen stochastischen Kontrollproblems. Dieser Prozess beschreibt die fundamentalen Größen: die optimale Strategie, die Wertfunktion und das konvex-duale Problem. Der Opportunitätsprozess erfüllt die zugehörige Bellman-Gleichung, sobald eine optimale Strategie existiert. Umgekehrt wird dieser Prozess als die minimale Lösung dieser Gleichung charakterisiert, und die optimale Strategie wird punktweise mit Hilfe dieses Prozesses beschrieben. Des Weiteren zeigen wir verschiedene Verifikationstheoreme für die Bellman-Gleichung. Für den Spezialfall eines exponentiellen Lévy-Modells leiten wir die explizite Lösung des Problems unter minimalen Annahmen her. Schliesslich untersuchen wir das asymptotische Verhalten der optimalen Strategien, wenn die relative Risikoaversion gegen unendlich oder gegen eins strebt. Wir zeigen die Konvergenz des optimalen Konsums im allgemeinen Fall und die Konvergenz der optimalen Handelsstrategie für stetige Semimartingalmodelle.