

# Optimal Control of Traffic Networks Based on the Theory of Monotone Systems

**Doctoral Thesis**

**Author(s):**

Schmitt, Marius

**Publication date:**

2018

**Permanent link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-b-000278557>

**Rights / license:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

Diss. ETH Zurich No. 25272

# **Optimal Control of Traffic Networks based on the Theory of Monotone Systems**

A thesis submitted to attain the degree of  
DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH

(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

MARIUS GERHARD SCHMITT

MSc ETH Zurich

born on 16. Jan. 1990

citizen of Germany

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. John Lygeros, examiner (ETH Zurich, Switzerland)  
Prof. Dr. Giacomo Como, co-examiner (Lund University, Sweden)  
Prof. Dr. Samuel Coogan, co-examiner (Georgia Tech, United States)

2018

# Abstract

This thesis addresses the optimal control of traffic networks. In road traffic control, the objective is to reduce congestion and minimize the total delay incurred by all drivers, for example by controlling traffic lights, adjusting variable speed limits, and by ramp metering for freeways. If a model of the traffic dynamics is available, then an optimal control problem can be posed as a mathematical optimization problem. However, such optimization problems are typically non-convex, due to the nonlinear relationship between traffic density and traffic flow. Computing the global optimizer of non-convex problems is computationally intractable in most cases, even for problems of only moderate size. In addition, problem data in traffic models are often not known with certainty. For example, predictions of future traffic demand are never exact. Furthermore, the flow-density relationship ultimately depends on the behavior of individual drivers and therefore, significant variance is observed in practice, in particular during congestion. The main objective of this thesis is to identify a class of traffic control problems that can be reduced to convex optimization problems, and therefore solved efficiently, despite the nonlinear traffic dynamics and potential uncertainty in the model.

In particular, we consider a special case of the dynamic traffic assignment problem, in which the aim is to optimize the operation of a traffic network by controlling flows, e.g. via traffic lights or variable speed limits, but without re-routing traffic. We consider a first-order, compartmental model based on the celebrated cell transmission model, with diverging junctions described by first-in, first-out (FIFO) dynamics. If the fundamental diagram is relaxed, then a convex problem is obtained. Prior work has established conditions under which solutions of the relaxed problem are feasible in the original system dynamics, or can be mapped to a feasible solution with equal objective value. In this thesis, we generalize these conditions, for the case when demand functions are concave and non-decreasing and supply functions are concave and non-increasing. In this case, we prove that if the objective is to minimize the total time spent in traffic, controlling solely the flows into merging junctions is sufficient to achieve the optimal objective value of the relaxed problem. We derive this result by introducing an alternative system representation, obtained via a state transformation. In the new representation, the system dynamics are convex and state-monotone. Notably, this result also implies that the non-transformed FIFO diverging dynamics are monotone with respect to a particular, polyhedral cone.

---

Subsequently, we consider the uncertainty inherent in traffic models, which poses a challenge for model- and optimization-based control approaches. We propose a robust counterpart to the deterministic traffic control problem, in which we introduce uncertainty sets for the flow-density relationship and future traffic demand. We seek to minimize the worst-case, cumulative delay incurred by all drivers, for any uncertainty realization. For a network with controlled merging junctions, and uncertainty sets that satisfy certain technical conditions, we show that this robust counterpart can be reduced to a finite-dimensional, convex, and deterministic optimization problem, whose numerical solution is tractable.

Finally, we show that monotonicity of the traffic dynamics in our setting can be leveraged to analyze an important special case, the problem of (optimal) freeway ramp metering. Empirical studies have shown that in freeway ramp metering, decentralized feedback laws often achieve performance comparable to optimization-based, centralized control approaches. While heuristic explanations for this observation have been suggested, a theoretical analysis of this phenomenon has been lacking. We use our prior results to derive sufficient optimality conditions for a particular, decentralized and non-anticipative ramp metering policy, for a freeway with monotone dynamics. Notably, we demonstrate numerically that this policy shows comparable closed-loop behavior to the successful Alinea ramp metering policy. We therefore conclude that if optimization-based or coordinated ramp metering policies seek to improve performance substantially over decentralized policies such as Alinea, then they need to specifically target non-monotone effects, in particular the capacity drop of a congested bottleneck.

# Zusammenfassung

Die vorliegende Dissertation behandelt die optimale Regelung von Strassenverkehrsnetzen. Das Ziel ist, Staus zu vermeiden oder zu reduzieren, indem Lichtsignale und variable Geschwindigkeitsbeschränkungen in Abhängigkeit von der Verkehrsdichte in Echtzeit angepasst werden. Die Berechnung idealer Steuersignale kann unter Zuhilfenahme eines mathematischen Modells des Strassenverkehrsnetzes als Optimierungsproblem formuliert werden. Die nichtlineare Abhängigkeit von Verkehrsdichte und Verkehrsfluss führt allerdings zu nichtkonvexen Nebenbedingungen und die resultierenden, nichtkonvexen Optimierungsprobleme sind im Allgemeinen nicht effizient lösbar. Der wissenschaftliche Beitrag dieser Dissertation besteht in der Herleitung einer Klasse von Optimalsteuerungsproblemen für Verkehrsnetze, welche auf konvexe Optimierungsprobleme zurückgeführt und daher effizient gelöst werden können.

Dazu konzentriert sich diese Arbeit auf einen Spezialfall, die Steuerung eines Strassenverkehrsnetzes ausschliesslich mittels selektiver Regelung des Verkehrsflusses, etwa mittels Lichtsignalen oder variablen Geschwindigkeitsbeschränkungen, ohne dass die Routenwahl einzelner Fahrer beeinflusst werden könnte. Die theoretische Analyse des Problems erfolgt auf der Basis eines Strassenverkehrsmodells erster Ordnung, basierend auf dem erfolgreichen “Cell Transmission Model”, welches insbesondere die first-in, first-out Dynamik von Strassenverkehr reproduziert. Es ist bekannt, dass in bestimmten Spezialfällen die konvexe Relaxation verwendet werden kann, um eine Lösung des nichtkonvexen Problems zu berechnen. Diese Dissertation zeigt, dass dies insbesondere für das Problem der optimalen Verkehrsregelung gilt, falls dynamische Vorfahrtsregelung (zum Beispiel mittels Verkehrsampeln) an allen Kreuzungen möglich ist und beschreibt ferner Bedingungen, welche im voraus sicherstellen, dass die aktive Steuerung bestimmter Kreuzungen *nicht* notwendig ist, um den insgesamt optimalen Verkehrsfluss zu erreichen. Im Gegensatz zur existierenden Literatur wird dieses Resultat mittels der Theorie monotoner Systeme hergeleitet. Wir zeigen, dass ein äquivalentes Verkehrsmodell, hergeleitet mittels einer Zustandstransformation, monoton im Zustand und konvex in Zustand und Steuergrösse ist. Wir beweisen ferner, dass aus diesen Eigenschaften die Exaktheit der konvexen Relaxation entsprechender Optimalsteuerungsprobleme folgt.

In der Praxis wird allerdings die Modellunsicherheit zu einem potentiellen Problem: viele Parameter des verwendeten Verkehrsmodells sind zum Zeitpunkt der Optimierung nur näherungsweise bekannt oder sogar inhärent stochastisch, insbesondere die

---

Abhängigkeit von Verkehrsdichte und Verkehrsfluss und das zukünftige Verkehrsaufkommen. Diese Modellunsicherheit sollte in der Optimierung explizit berücksichtigt werden. Zu diesem Zweck wird das Problem der robusten Verkehrsregelung definiert, in welchem Kenntnis der exakten Parameterwerte zum Zeitpunkt der Optimierung nicht vorausgesetzt wird, sondern nur, dass diese Teil einer bekannten Menge an möglichen Parameterwerten sind. Wir zeigen, wie das Problem der Verkehrsoptimierung unter worst-case Bedingungen (in Bezug auf die unbekannt Parameterwerte) auf ein deterministisches, konvexes Optimierungsproblem zurückgeführt werden kann, falls ähnliche Annahmen wie zuvor erläutert (insbesondere die Möglichkeit der dynamischen Vorfahrtsregelung) erfüllt sind.

Darüber hinaus wenden wir die vorherigen Resultate auf einen weiteren Spezialfall an, auf die Optimierung der Zuflussregelung für Schnellstrassen, besser bekannt im Englischen als “ramp metering”. Die empirische Erprobung hat gezeigt, dass verhältnismässig einfache Rückkopplungsregler, welche den Zufluss in Abhängigkeit von der lokal gemessenen Verkehrsdichte regeln, häufig ähnlich gute Resultate erzielen wie komplexe Optimalregler. Zwar wurden heuristische Erklärungen für dieses Phänomen vorgeschlagen, doch fehlt bisher eine schlüssige, theoretische Analyse. Wir zeigen, dass sich aus den vorhergehenden Resultaten dieser Dissertation im Falle monotoner Verkehrsdynamik hinreichende Optimalitätsbedingungen für eine verteilte Regelstrategie herleiten lassen, welche ähnliches Regelverhalten wie der in der praktischen Anwendung erfolgreiche “Alinea”-Regler zeigt. Daraus schliessen wir, dass koordinierte, optimierungsbasierte Zuflussregelung primär dazu dienen sollte, nicht-monotonen Phänomenen, wie dem Abfall der Strassenkapazität an einem Engpass im Stau (besser bekannt im Englischen als “capacity drop”), entgegenzuwirken.