



Doctoral Thesis

Hypervolume-based search for multiobjective optimization Theory and methods

Author(s):

Bader, Johannes

Publication Date:

2009

Permanent Link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-006055675> →

Rights / License:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH N° 18820

Hypervolume-Based Search for Multiobjective Optimization: Theory and Methods

A dissertation submitted to
ETH Zurich

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by
JOHANNES M. BADER

Dipl. El.-Ing., ETH Zürich
born April 6, 1981
citizen of Basel, BS

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Eckart Zitzler, examiner
Prof. Dr. Günter Rudolph, co-examiner

2009

Abstract

Most problems encountered in practice involve the optimization of multiple criteria. Usually, some of them are conflicting such that no single solution is simultaneously optimal with respect to all criteria, but instead many incomparable compromise solutions exist. At the same time, the search space of such problems is often very large and complex, so that traditional optimization techniques are not applicable or cannot solve the problem within reasonable time.

In recent years, evidence has accumulated showing that Evolutionary Algorithms (EAs) are effective means of finding good approximate solutions to such problems. Apart from being applicable to complex problems, EAs offer the additional advantage of finding multiple compromise solutions in a single run. One of the crucial parts of EAs consists of repeatedly selecting suitable solutions. The aim thereby is to improve the current set of solutions by cleverly replacing old solutions by newly generated ones. In this process, the two key issues are as follows: first, a solution that is better than another solution in all objectives should be preferred over the latter. Second, the diversity of solutions should be supported, whereby often user preference dictates what constitutes a good diversity.

The hypervolume offers one possibility to achieve the two aspects; for this reason, it has been gaining increasing importance in recent years as selection criterion in EAs. The present thesis investigates three central topics of the hypervolume that are still unsolved:

- Although more and more EAs use the hypervolume as selection criterion, the resulting distribution of points favored by the hypervolume has scarcely been investigated so far. Many studies only speculate about this question, and in parts contradict one another.
- The computational load of the hypervolume calculation sharply increases the more criteria are considered. This hindered so far the application of the hypervolume to problems with more than about five criteria.
- Often a crucial aspect is to maximize the robustness of solutions, which is characterized by how far the properties of a solution can degenerate when

implemented in practice—for instance when manufacturing imprecisions do not allow to build perfectly the solution. So far, no attempt has been made to consider robustness of solutions within hypervolume-based search.

First, the present thesis examines how hypervolume-based search can be formalized, by proposing a new perspective on EAs which emphasizes the importance of sets rather than single solutions. Different factors are stated that need to be considered when selecting and comparing sets of solutions. In this context, a new algorithm based on this formalism is proposed. A visual comparison illustrates the different outcomes with respect to the underlying set selection method; these differences are confirmed by a new statistical procedure.

This observation leads to a rigorous mathematical investigation of the set of solutions, obtained when optimizing according to the hypervolume. A concise description of the distribution of solutions in terms of a density function not only allows to predict the outcome of hypervolume-based methods, but also enables to implement precisely user preference within the hypervolume itself.

While the foundation to articulate user preference by means of hypervolume had already be laid by previous works, no study so far considered the integration of robustness issues in hypervolume-based search. The present thesis closes this gap by extending the definition of the hypervolume to also enabling the consideration of robustness properties.

Finally, to make the hypervolume applicable to problems with many criteria a new algorithm is proposed based on a fast approximation of the hypervolume values. Thereby, importance is attached to maintain the possibility for user preference articulation, as well as the consideration or robustness issues.

Zusammenfassung

In der Praxis auftretende Optimierungsprobleme beinhalten oft mehrere Kriterien, die berücksichtigt werden müssen. Diese Kriterien stehen dabei meist in Konflikt zueinander, so dass bei deren gleichzeitigen Betrachtung keine einzelne optimale Lösung resultiert, sondern mehrere Kompromisslösungen. Gleichzeitig ist der Suchraum der Probleme häufig so gross und komplex, dass deterministische Algorithmen das Problem nicht mehr in vertretbarer Zeit lösen können.

Evolutionäre Algorithmen (EAs) sind, wie sich gezeigt hat, eine leistungsstarke Technik zur approximativen Lösung solcher Probleme. Nebst dem Vorteil, dass EAs auch auf komplexe Probleme angewandt werden können wo klassische Verfahren versagen, liegt ein Vorteil darin, dass sie mehrere verschiedene Kompromisslösungen in einem Optimierungslauf finden. Eine der Hauptpunkte eines EAs liegt dabei in der wiederholten Auswahl geeigneter Lösungen, d.h. die Entscheidung, welche von neu generierten Lösungen am meisten zur Verbesserung der momentanen Auswahl an Lösungen beitragen. Dabei gilt es zwei Ziele zu berücksichtigen: Einerseits soll eine Lösung, die in allen Kriterien besser ist als eine andere Lösung, dieser vorgezogen werden. Andererseits soll die Diversität an Lösungen möglichst gewahrt werden, wobei häufig Anwenderpräferenzen einzubeziehen sind.

Das Hypervolumen bietet eine Möglichkeit, die zwei Kriterien zu berücksichtigen, weshalb es in den letzten Jahren vermehrt als Auswahlkriterium in EAs eingesetzt wird. Die vorliegende Arbeit untersucht drei zentrale, noch weitestgehend ungelöste Aspekte der Hypervolumen-basierten Suche:

- Obwohl das Hypervolumen als Selektionskriterium immer mehr an Bedeutung gewinnt, wurde bisher noch kaum theoretisch untersucht, welche Verteilung an Lösungen das Hypervolumen bevorzugt. Zu dieser Frage existieren bisher nur, sich zu teil widersprechende, Vermutungen.
- Der Berechnungsaufwand des Hypervolumens steigt sehr stark an, je mehr Kriterien betrachtet werden. Dies verhinderte bisher seinen Einsatz auf Problemen mit mehr als ungefähr fünf Kriterien.

- Oft ist die Robustheit einer Lösungen entscheidend; das heisst, wie stark sich die Eigenschaften der Lösung in der Praxis verschlechtern können, zum Beispiel wenn sie nicht präzise hergestellt werden kann. Bisher wurde die Berücksichtigung von Robustheit innerhalb der Hypervolumen-basierten Suche nicht angegangen.

Zunächst untersucht die vorliegende Arbeit, wie sich die Hypervolumen-basierte Suche formalisieren lässt. Dabei wird eine neue Sicht auf EAs gegeben, bei der nicht einzelne Lösungen, sondern die Menge derer im Vordergrund steht. Es werden Kriterien aufgestellt, die bei der Auswahl und beim Vergleich von Mengen zu berücksichtigen sind. In diesem Kontext wird ein Algorithmus vorgestellt, der gemäss dieser Vergleichsfunktionen optimiert. Wie ein visueller Vergleich zeigt, sind die erhaltenen Mengen an Kompromisslösungen abhängig von der zugrundeliegenden Bewertungsfunktion stark unterschiedlich, dies wird durch eine neue statistische Vergleichsmethodik bestätigt.

Diese Beobachtung führt anschliessend zu einer rigorosen Untersuchung der Menge, welche die beste Bewertung bezüglich des Hypervolumen erhält. Die genaue Beschreibung dieser Menge als Dichtefunktion erlaubt es dabei nicht nur, das Resultat von Hypervolumen-basierten Verfahren vorauszusagen, sondern hilft auch, beliebige Präferenzen des Entscheidungsträgers im Hypervolumen umzusetzen.

Während die Artikulation von Anwenderpräferenzen mittels Hypervolumen ein bekanntes Verfahren darstellt, wurde bisher die Berücksichtigung von Robustheit in der Hypervolumen-basierten Suche nicht angegangen. Die vorliegende Arbeit schliesst diese Lücke und erweitert die Definition des Hypervolumens dahingehend, dass auch Robustheitseigenschaften von Lösungen einfließen können.

Um schliesslich den Indikator auch für Probleme mit vielen Kriterien anwendbar zu machen, wird ein neuer Algorithmus vorgestellt, welcher auf einer schnellen Approximation der Hypervolumenwerte basiert. Dabei kann der Algorithmus gleichfalls für Präferenzartikulation als auch die Berücksichtigung von Robustheit verwendet werden.