



Doctoral Thesis

## Harmonic map flow and variants

**Author(s):**

Rupflin, Melanie

**Publication Date:**

2010

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-006133755> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

DISS. ETH NO. 19027

# Harmonic map flow and variants

A dissertation submitted to  
ETH ZURICH

for the degree of  
Doctor of Sciences

presented by  
Melanie Rupflin  
Dipl. Math. ETH Zurich  
born March 27, 1982  
citizen of Lommis TG, Switzerland

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. Michael Struwe, examiner  
Prof. Dr. Tristan Rivière, co-examiner  
Prof. Dr. Peter Topping, co-examiner

2010

## Abstract

We study weak solutions of the harmonic map heat flow and the related extrinsic polyharmonic map heat flows of arbitrary order.

In the first chapter of this thesis we consider the harmonic map heat flow in the critical dimension. We prove a sharp uniqueness criterion for weak solutions under a natural a priori assumption on the regularity of the energy function  $t \mapsto E(u(t))$  and thus establish a conjecture of Topping. Furthermore we establish uniqueness for general weak solutions under the assumption that the energy does not instantaneously increase by more than a certain positive quantum. This theorem in particular improves a well known uniqueness result of Freire.

In the second chapter we generalise these uniqueness results for the harmonic map flow to the extrinsic polyharmonic map flows of arbitrary order in the critical dimension. Furthermore we describe the behaviour of all weak solutions of the polyharmonic flows that satisfy a natural a priori assumption; we prove that uniqueness can only be lost by reverse bubbling and obtain that the weak solutions under consideration are smooth away from a discrete set of time-slices.

In the third chapter we study the related questions of existence and uniqueness of (outgoing) selfsimilar solutions of the harmonic map heat flow in supercritical dimensions. We show that for settings with appropriate symmetry the issue of uniqueness of selfsimilar solutions is determined by the properties of the so called *equator maps*. On the one hand, we show that the harmonic map heat flow has a unique equivariant and selfsimilar weak solution for any admissible initial data whenever the equator map is energy-minimising. On the other hand, we obtain non-uniqueness results for selfsimilar solutions in settings with equator maps that are not energy-minimising; in fact, we prove that the number of (genuinely different) selfsimilar solutions of the harmonic map flow can be arbitrarily large, even infinite, for suitably chosen initial data. These non-uniqueness results extend earlier work of Angenent, Ilmanen and Velazquez. Our results yield examples of non-uniqueness of solutions to the harmonic map heat flow that respect the monotonicity formula of Struwe extending the work of Coron and Hong.

## Zusammenfassung

Wir untersuchen schwache Lösungen des harmonischen Wärmeflusses und der verwandten extrinsischen polyharmonischen Wärmeflüsse.

Im ersten Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage der Eindeutigkeit von schwachen Lösungen des harmonischen Wärmeflusses in der kritischen Dimension. Wir beweisen ein optimales Eindeutigkeitskriterium für schwache Lösungen, deren Energiefunktional  $t \mapsto E(u(t))$  einer natürlichen a priori Regularitätsbedingung genügt und zeigen damit eine Vermutung von Topping. Andererseits beweisen wir Eindeutigkeit für beliebige schwache Lösungen des harmonischen Flusses in Dimension zwei unter der Annahme, dass die Energie zu keinem Zeitpunkt um mehr als eine bestimmte positive Zahl anwächst. Dieses Theorem stellt eine Verbesserung des bekannten Eindeutigkeitsresultates von Freire dar.

Im zweiten Kapitel beweisen wir, dass sich diese Eindeutigkeitsresultate für den harmonischen Fluss auf die gesamte Familie der extrinsischen polyharmonischen Wärmeflüsse beliebiger Ordnung in der jeweiligen kritischen Dimension erweitern lassen. Wir beschreiben ausserdem das Verhalten von schwachen Lösungen, deren Energie eine natürliche a priori Voraussetzung erfüllt; wir zeigen, dass der Verlust der Eindeutigkeit nur durch *reverse bubbling* verursacht werden kann und erhalten eine Regularitätsaussage für die betrachteten schwachen Lösungen.

Im dritten Kapitel untersuchen wir die Fragen der Existenz und Eindeutigkeit von selbstähnlichen Lösungen des harmonischen Wärmeflusses in superkritischen Dimensionen. Wir zeigen, dass unter geeigneten Symmetrieannahmen die Frage der Eindeutigkeit durch die Eigenschaften der sogenannten *Äquatorabbildungen* bestimmt wird. Wir beweisen einerseits, dass der harmonische Wärmefluss zu jeder zulässigen Anfangsbedingung eine eindeutige equivariante, selbstähnliche schwache Lösung besitzt, falls die Äquatorabbildung energie-minimierend ist. Andererseits erhalten wir Nichteindeutigkeitsresultate für den harmonischen Fluss, falls die Äquatorabbildung nicht energie-minimierend ist; wir zeigen insbesondere, dass für geeignete Anfangsbedingungen die Zahl der (tatsächlich unterschiedlichen) selbstähnlichen Lösungen des harmonischen Flusses beliebig gross, ja sogar unendlich, sein kann. Diese Nichteindeutigkeitsresultate verallgemeinern eine frühere Arbeit von Angenent, Imanen und Velazquez. Unsere Resultate liefern Beispiele für Nichteindeutigkeit von Lösungen des harmonischen Wärmeflusses, welche die Monotonieformel von Struwe erfüllen, und erweitern damit die Resultate von Coron und Hong.