

Stability Analysis of Elastic Bearings with Flexible Reinforcement

Conference Paper

Author(s):

Kelly, James M.; Vassiliou, Michalis F.

Publication date:

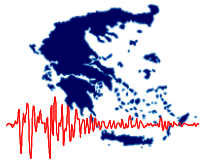
2008-11-05

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-b-000331575>

Rights / license:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)



Ανάλυση ευστάθειας ελαστικών εφεδράνων με εύκαμπτες ενισχύσεις

Stability analysis of elastomeric bearings with flexible reinforcements.

James M. KELLY¹, Μιχάλης ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ²

ΠΕΡΙΛΗΨΗ : Τα ελαστικά εφέδρανα που χρησιμοποιούνται για σεισμική μόνωση των κατασκευών αποτελούνται από στρώσεις καουτσούκ ανάμεσα από τις οποίες παρεμβάλλονται σχετικώς άκαμπτες χαλύβδινες πλάκες. Η συμπεριφορά των εφεδράνων περιγράφεται από μια θεωρία δοκού η οποία βασίζεται στην παραδοχή ότι επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες αλλά όχι κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα. Η μετακίνηση και η στροφή των διατομών λαμβάνονται ως ανεξάρτητες μεταβλητές. Η θεωρία αυτή δουλεύει καλά για εφέδρανα με πλάκες ενίσχυσης ικανού πάχους ώστε να θεωρηθούν άκαμπτες.

Για την αύξηση της κατακόρυφης ακαμψίας θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν λεπτότερες, εύκαμπτες αλλά μη εκτατές πλάκες. Τότε η παραδοχή περί επιπεδότητας των διατομών δεν περιγράφει επαρκώς την πραγματικότητα. Για το σκοπό αυτό ο Kelly έχει αναπτύξει μια θεωρία δοκού που λαμβάνει υπόψη της και τη στρέβλωση των διατομών. Στην εργασία αυτή εξετάζεται η ευστάθεια των λύσεων μιας τέτοιας δοκού. Προσδιορίζονται τα κρίσιμα φορτία και οι ιδιομορφές αστάθειας. Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν 3 κρίσιμα φορτία: Ένα σε θλίψη και δύο σε εφελκυσμό. Η παρουσία εφελκυστικού φορτίου λυγισμού ενδέχεται να είναι σημαντική γιατί, αντίθετα με ότι θα περίμενε κανείς με βάση τη διαίσθησή του, υποδεικνύει ότι η οριζόντια στιβαρότητα του εφεδράνου μειώνεται παρουσία εφελκυσμού. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σημαντικό σε περιπτώσεις που η σεισμική διέγερση είναι τόσο ισχυρή που να προκαλεί εφελκυσμό σε κάποια από τα εφέδρανα του συστήματος σεισμικής μόνωσης.

ABSTRACT : The multilayer elastomeric bearings used for seismic isolation are made of layers of rubber and steel reinforcing plates. The reinforcing plates increase the vertical stiffness of the bearings while leaving the horizontal unchanged. The behavior of the bearings is normally described by a beam theory that assumes plane sections to remain plane but not normal to the deformed axis. The displacement and the rotation of the cross-sections are taken as independent variables. This theory works well for reinforcing plates that are thick and rigid in bending so that the assumption of plane sections remaining plane is valid.

It is possible to use thinner, flexible but inextensible plates. In this case it is no longer acceptable to assume that plane sections will remain plane. For this reason Kelly has developed a beam theory that considers the warping of the cross-sections as well. In this paper we perform a stability analysis using this beam theory. We determine the buckling loads and the buckling modes. It turns out that there are 3 buckling loads: one in

¹ Professor Emeritus, Civil Engineering Department, UC Berkeley, USA, email: jmkelly@berkeley.edu

² Διδακτορικός Φοιτητής, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πάτρας, Ελλάδα, email: mfvassiliou@gmail.com

compression and 2 in tension. The tension buckling load is important because it shows that, contrary to physical intuition, tension decreases the horizontal stiffness of the bearing. This can have an important effect on the response of an isolated building using these bearings when the ground motion is large enough to generate tension in the isolation system.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα ελαστικά εφέδρανα που χρησιμοποιούνται για σεισμική μόνωση των κατασκευών είναι κοντόχοντρα. Εντούτοις «λυγίζουν». Και «λυγίζουν» όχι μόνο σε θλίψη αλλά και σε εφελκυσμό.

Τα ελαστικά εφέδρανα, για να είναι αποτελεσματικά, πρέπει να είναι εύκαμπτα όταν παραμορφώνονται διατμητικά αλλά δύσκαμπτα όταν παραμορφώνονται αξονικά. Τούτο επιτυγχάνεται με την παρεμβολή μεταλλικών πλακών ενίσχυσης μεταξύ στρώσεων ελαστομερούς υλικού (συνήθως αποτελούμενο από φυσικό καουτσούκ). Όταν το εφέδρανο θλίβεται κάθετα προς τις στρώσεις, οι πλάκες ενίσχυσης παρεμποδίζουν την πλευρική παραμόρφωση του ελαστικού δημιουργώντας τριαξονική εντατική κατάσταση. Αυτό αυξάνει τη θλιπτική στοιβαρότητα αφήνοντας την διατμητική αμετάβλητη.

Είναι προφανές ότι η πλευρική παραμόρφωση του καουτσούκ θα μπορούσε να παρεμποδιστεί και από λεπτές, εύκαμπτες αλλά μη εκτατές, μεταλλικές πλάκες ενίσχυσης. Εντούτοις, οι πλάκες ενίσχυσης που συνήθως χρησιμοποιούνται έχουν τέτοιο πάχος που μπορούν να θεωρηθούν άκαμπτες. Αυτό γίνεται γιατί η θεωρία δοκού που χρησιμοποιείται για να περιγράψει τη συμπεριφορά των εφεδράνων κάνει την παραδοχή ότι επίπεδες διατομές παραμένουν επίπεδες.

Μιας και τα εφέδρανα χρησιμοποιούνται για να φέρουν κατακόρυφα φορτία είναι σημαντικό να μπορεί να διερευνηθεί η ευστάθειά τους με ένα σχετικά απλό τρόπο. Για το σκοπό αυτό γίνεται μία ανάλυση λυγισμού των δοκών βασισμένη στη θεωρία δοκού κατά Timoshenko. Οι πρώτες αναλύσεις των ιδιοτήτων ελαστικών εφεδράνων έγιναν από τους Rocard (1937), Gent και Lindley (1959) και Gent και Meinecke (1970). Ο Kelly (1997) δημιούργησε μια θεωρία που αποτελεί απλουστευμένη εκδοχή των παραπάνω αναλύσεων. Η ευστάθεια των λύσεων αυτής της θεωρίας εξετάστηκε από τον Kelly (1997) και βασίζεται στη δουλειά του Haringx (1948) πάνω στα μηχανικά χαρακτηριστικά των ελικοειδών ελατηρίων η οποία εφαρμόστηκε από τον Gent (1964) για τη μελέτη της ευστάθειας θλιβόμενων ελατηρίων. Αποδείχθηκε από τον Kelly (2003) ότι η δοκός Timoshenko έχει δύο φορτία αστάθειας: Ένα σε θλίψη και ένα σε εφελκυσμό.

Το βασικό πρόβλημα των εφεδράνων είναι το κόστος τους. Όχι μόνο είναι ακριβή η κατασκευή τους αλλά, εξ αιτίας του βάρους τους, χρειάζονται ειδικά μηχανήματα για την εγκατάστασή τους. Το μεγαλύτερο μέρος του βάρους των εφεδράνων είναι οι μεταλλικές πλάκες ενίσχυσης. Άρα το βάρος τους μπορεί να μειωθεί σημαντικά χρησιμοποιώντας ελαφρύτερο και ισχυρότερο ινοπλισμό (fiber reinforcement). Τότε όμως, η παραδοχή περί επιπεδότητας των παραμορφωμένων διατομών δεν ισχύει.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι είναι χρήσιμο να αναπτυχθεί μια θεωρία που θα λαμβάνει υπόψη της και τη στρέβλωση (warping) των διατομών. Αυτή η θεωρία έχει αναπτυχθεί από τον Kelly (1999) και επεκτάθηκε από τους Tsai και Kelly (2005). Σε αυτό το άρθρο, γίνεται μια ανάλυση ευστάθειας δοκών στις οποίες λαμβάνονται ως ανεξάρτητες μεταβλητές η μετατόπιση, η στροφή και η στρέβλωση της διατομής. Υπολογίζονται τα φορτία και οι ιδιομορφές λυγισμού. Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν 3 φορτία αστάθειας: Ένα σε θλίψη και 2 σε εφελκυσμό. Για δοκούς υψίκορμες όσο ένα εφέδρανο, η στρέβλωση της διατομής γίνεται σημαντική (όσον αφορά το φορτίο λυγισμού) μόνο στον εφελκυσμό. Αν και τα εφέδρανα δεν θα εφελκυστούν αρκετά για να παρουσιάσουν αστάθεια, η παρουσία εφελκυστικού φορτίου (αντίθετα με ότι θα περίμενε κανείς) μειώνει την οριζόντια δυσκαμψία του εφεδράνου.

Είναι ενδιαφέρον ότι θεωρία προβλέπει 3 ξεχωριστά φορτία αστάθειας. Θα δείξουμε ότι το ένα θα είναι πάντα θλιπτικό (και αυτό θα είναι το σημαντικότερο όσον αφορά το σχεδιασμό των εφεδράνων). Τα άλλα δύο θα είναι πάντα εφελκυστικά. Από τα 2 μόνο το μικρότερο παρουσιάζει ενδιαφέρον.

Μία πλευρά αυτής της ανάλυσης θα είναι η αναγνώριση δυο ιδιαίτερων οριακών περιπτώσεων: Μία όταν οι πλάκες ενίσχυσης είναι άκαμπτες (η οποία εκφυλίζεται στην υπάρχουσα θεωρία λυγισμού εφεδράνων) και άλλη μία όταν οι πλάκες ενίσχυσης είναι εντελώς ελεύθερες να καμφθούν.

1) ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ

Η γεωμετρία της διατομής φαίνεται στο **Σχήμα 1**. Η παραμόρφωση της διατομής χαρακτηρίζεται από 4 ανεξάρτητες κινηματικές μεταβλητές, u, v, ψ, ϕ οι οποίες είναι συναρτήσεις του x_1 . Το πεδίο των μετακινήσεων το οποίο φαίνεται στο **Σχήμα 2**, (u_1, u_2) είναι:

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x_1) - \psi(x_1)x_2 + \phi(x_1)f_w(x_2) \\ u_2 &= v(x_1) \end{aligned} \quad (1)$$

Η συνάρτηση $\psi(x_1)$ είναι η μέση γωνία στροφής της διατομής και η $\phi(x_1)$ είναι μια συνάρτηση που εκφράζει τη στρέβλωση της διατομής. Οι συναρτήσεις $u(x_1)$ και $v(x_1)$ είναι η μετακίνηση της μέσης επιφάνειας κατά τις διευθύνσεις x_1 και x_2 αντίστοιχα. Η συνάρτηση $f_w(x_2)$ δίνει το σχήμα της στρεβλωμένης διατομής. Είναι βολικό να διαλέξουμε την $f_w(x_2)$ με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να είναι ορθογώνια πάνω στη διατομή τόσο ως προς το 1 όσο και ως προς το x_2 έτσι ώστε να μην δίνει ούτε αξονική δύναμη ούτε ροπή.

Για μια ορθογωνική διατομή $1 \times 2h$ (όπως φαίνεται στο **Σχήμα 1**) διαλέγουμε:

$$f_w(x_2) = \frac{x_2^3}{h^3} - \frac{3}{5} \frac{x_2}{h} \quad (2)$$

Μιας και η $f_w(x_2)$ είναι αδιάστατη, η $\phi(x_1)$ θα έχει μονάδες μετακινήσεων.

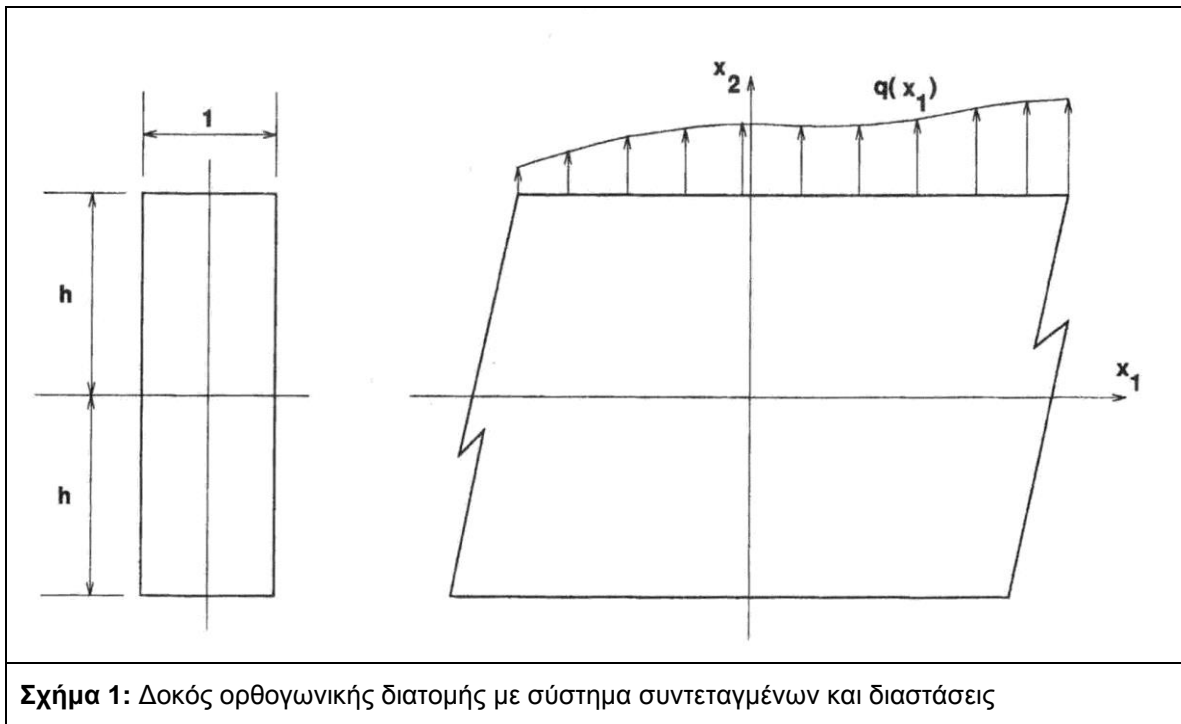
2) ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΗΣ ΔΟΚΟΥ

Οι προκύπτουσες τροπές είναι

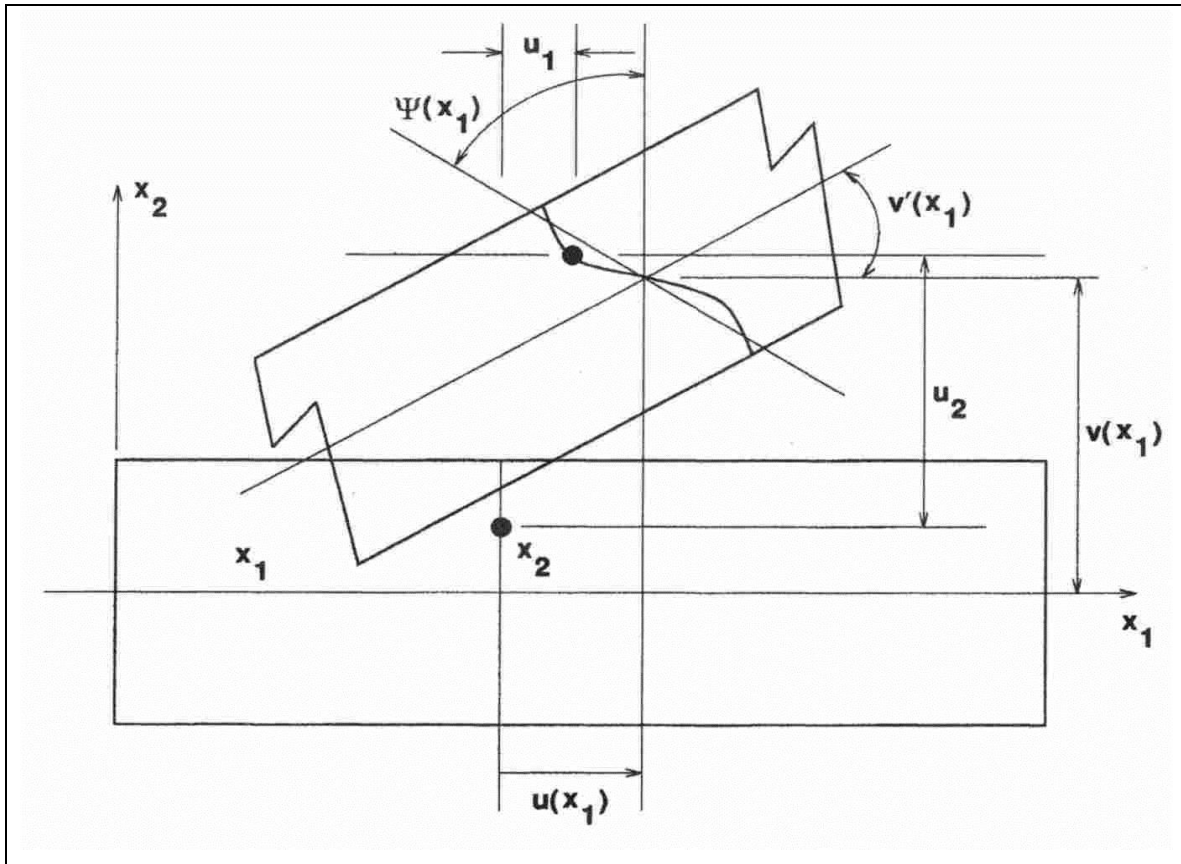
$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= u' - \psi' x_2 + \phi f_w \\ 2\varepsilon_{12} &= (v' - \psi) + \phi f_w'\end{aligned}\quad (3)$$

Για ελαστική συμπεριφορά έχουμε

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= Eu' - E\psi' x_2 + E\phi f_w'(x_2) \\ \sigma_{12} &= G(v' - \psi) + G\phi f_w'(x_2)\end{aligned}\quad (4)$$



Σχήμα 1: Δοκός ορθογωνικής διατομής με σύστημα συντεταγμένων και διαστάσεις



Σχήμα 2: Πεδίο μετατοπίσεων δοκού με διαμητική παραμόρφωση και στρέβλωση

Ορίζουμε τα παρακάτω μεγέθη διατομής

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_{11} dA \\
 M &= - \int_A \sigma_{11} x_2 dA \\
 V &= \int_A \sigma_{12} dA \\
 Q &= \int_A f_w(x_2) \sigma_{11} dA \\
 R &= \int_A f_w'(x_2) \sigma_{12} dA
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Τα παραπάνω μεγέθη διατομής συνδέονται με τις κινηματικές μεταβλητές με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
N &= EAu' \\
M &= EI\psi' \\
Q &= EJ\phi' \\
V &= GA(v' - \psi) + GB\phi \\
R &= GB(v' - \psi) + GC\phi
\end{aligned} \tag{6}$$

όπου

$$\begin{aligned}
A &= \int_A dA = 2h \\
I &= \int_A x_2^2 dA = \frac{2}{3}h^3 \\
J &= \int_A f_w^2(x_2) dA = \frac{8}{175}h \\
B &= \int_A f_w'(x_2) dA = \frac{4}{5} \\
C &= \int_A (f_w'(x_2))^2 dA = \frac{48}{25h}
\end{aligned} \tag{7}$$

Για να πάρουμε εξισώσεις ισορροπίας για το φορτίο λυγισμού ολοκληρώνουμε τις εξισώσεις ισορροπίας τάσεων.

Θεωρούμε ένα στοιχείο του υλικού με πλευρές dx_1 και dx_2 παράλληλη και κάθετη (στην μη παραμορφωμένη κατάσταση) στον άξονα της δοκού, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 3**. Στην παραμορφωμένη κατάσταση, οι πλευρές του στοιχείου που ήταν παράλληλες στον x_1 άξονα παραμένουν παράλληλες στην παραμορφωμένη μέση επιφάνεια της δοκού. Οι πλευρές που ήταν παράλληλες με τον άξονα x_2 στρέφονται κατά γωνίες θ και $\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x_1} dx_1$. Είναι:

$$\theta = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \psi - \phi f_w'(x_2) \tag{8}$$

Οι τάσεις στην παραμορφωμένη κατάσταση φαίνονται στο **Σχήμα 3**. Η εξίσωση ισορροπίας κατά τη διεύθυνση x_1 δίνει

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{11} - \sigma_{12}\theta) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}v') = 0 \tag{9}$$

Η εξίσωση ισορροπίας κατά τη διεύθυνση x_2 δίνει

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{12} - \sigma_{11}\theta) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{22} - \sigma_{21}v') = 0 \quad (10)$$

Η εξίσωση ισορροπίας ροπών γύρω από την αριστερή γωνία του στοιχείου δίνει:

$$\sigma_{21} - \sigma_{12} + \sigma_{11}(v' - \theta) = 0 \quad (11)$$

Αντικαθιστούμε την Εξίσωση (11) στην Εξίσωση (9) και στην Εξίσωση (10) και παίρνουμε

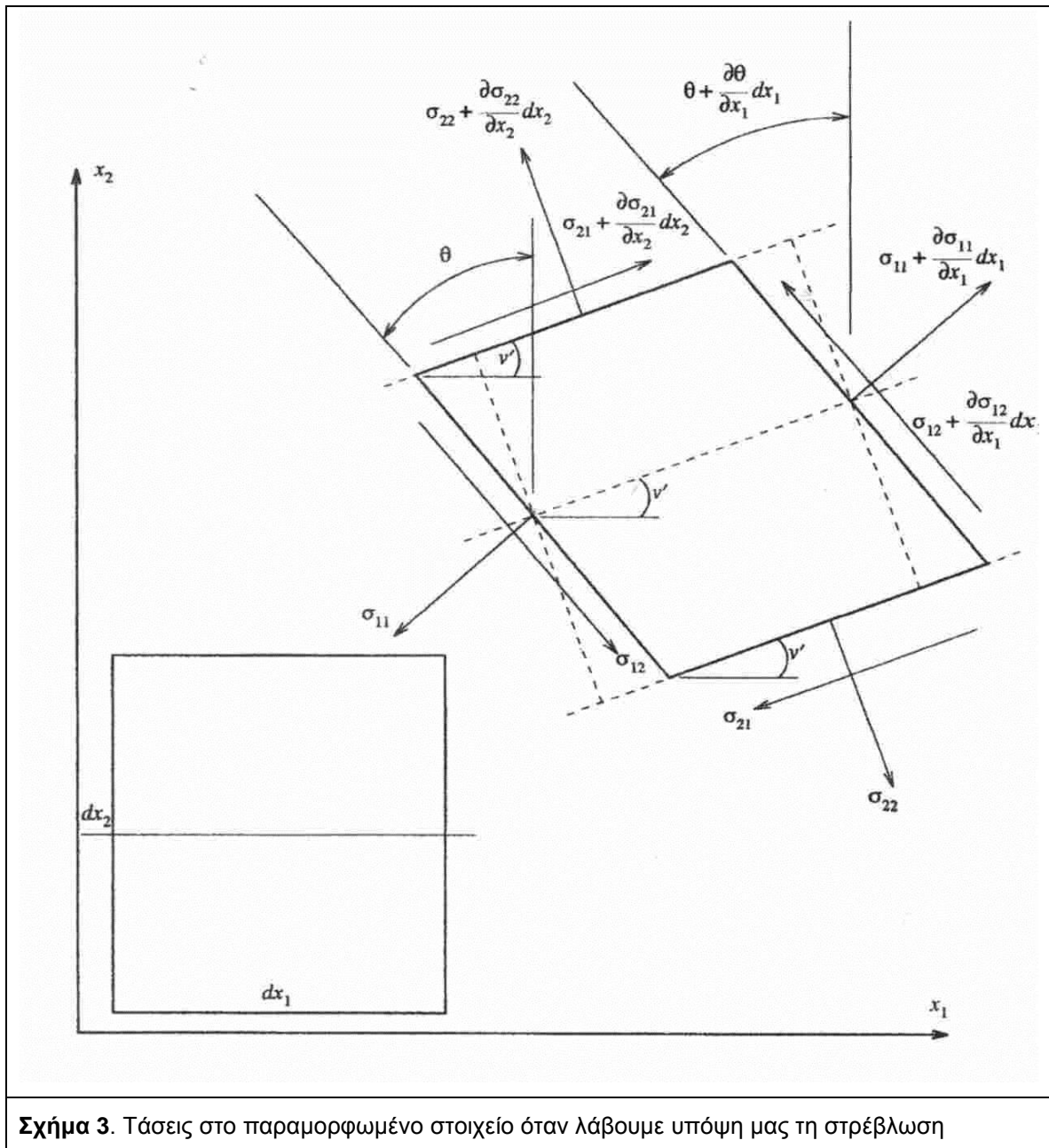
$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{11} - \theta\sigma_{12}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{12} - \sigma_{11}(v' - \theta) - \sigma_{22}v') = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\theta\sigma_{11} + \sigma_{12}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{22} + \sigma_{12}v') = 0 \quad (13)$$

Ολοκληρώνουμε και τις Εξισώσεις (12) και (13) πάνω στη διατομή $-h \leq x_2 \leq h$ και δεχόμαστε ελεύθερες επιφάνειες για $x_2 = \pm h$. Παίρνουμε

$$\frac{d}{dx_1}(N - \psi V) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{d}{dx_1}\left(N\psi - \frac{NB}{A}\phi + V\right) = 0 \quad (15)$$



Σχήμα 3. Τάσεις στο παραμορφωμένο στοιχείο όταν λάβουμε υπόψη μας τη στρέβλωση

Πολλαπλασιάζουμε την Εξίσωση (12) με x_2 και ολοκληρώνουμε πάνω στη διατομή. Παίρνουμε:

$$\frac{dM}{dx_1} + V - N(v' - \psi) - \frac{N}{A} B\phi = 0 \quad (16)$$

Πολλαπλασιάζουμε την Εξίσωση (12) με $f_w(x_2)$ και ολοκληρώνουμε πάνω στη διατομή. Παίρνουμε:

$$\frac{dQ}{dx_1} - R + \frac{N}{A} B(v' - \psi) + \frac{N}{A} C\phi = 0 \quad (17)$$

Το ψV περιλαμβάνει το γινόμενο κινηματικών μεταβλητών. Άρα η Εξίσωση (14) γίνεται

$$N = -P \quad (18)$$

Ολοκληρώνουμε την Εξίσωση (15) και παίρνουμε:

$$V - P \left(\psi - \frac{B}{A} \phi \right) = -H_0 \quad (19)$$

Βάζουμε την τελευταία εξίσωση στην Εξίσωση (16), ολοκληρώνουμε και παίρνουμε

$$M + Pv = H_0 x + M_0 + Pv_0 \quad (20)$$

Χρησιμοποιούμε τις καταστατικές εξισώσεις και οι εξισώσεις ισορροπίας γίνονται

$$EI\psi' + Pv = H_0 x + M_0 + Pv_0 \quad (21)$$

$$GA(v' - \psi) + \left(G + \frac{P}{A} \right) B\phi - P\psi = H_0 \quad (22)$$

$$EJ\phi'' - \left(G + \frac{P}{A} \right) B(v' - \psi) - \left(G + \frac{P}{A} \right) c\phi = 0 \quad (23)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να αναχθούν σε μία εξίσωση για το ϕ ή το ψ με την παρακάτω διαδικασία.

Από την Εξίσωση (22) έχουμε

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{GA}{P+GA} v' + \frac{\left(G + \frac{P}{A} \right) B\phi + \frac{H_0}{P+GA}}{\left(P + GA \right)} \\ &= \frac{GA}{P+GA} v' + \frac{B}{A} \phi + \frac{H_0}{P+GA} \end{aligned} \quad (24)$$

Παραγωγίζουμε την Εξίσωση (21) και παίρνουμε

$$v' = -\frac{EI}{P} \psi'' + \frac{H_0}{P} \quad (25)$$

και

$$\psi = \frac{GA}{P+GA} \left(-\frac{EI}{P} \psi'' + \frac{H_0}{P} \right) + \frac{B}{A} \phi + \frac{H_0}{P+GA} \quad (26)$$

οι οποίες δίνουν

$$\phi = \frac{A}{B} \left(\frac{GA EI}{(P+GA)P} \psi'' + \psi - \frac{H_0}{P} \right) \quad (27)$$

Επίσης

$$v' - \psi = -\frac{EI}{P} \psi'' + \frac{H_0}{P} - \psi \quad (28)$$

και βάζοντας αυτές στην Εξίσωση (23) παίρνουμε την τελική μορφή:

$$\begin{aligned} & EJGA EI \psi^{(4)} + \left[EJ \left(G + \frac{P}{A} \right) AP + EI \left(G + \frac{P}{A} \right)^2 B^2 - GA EI \left(G + \frac{P}{A} \right) C \right] \psi^{(2)} + \\ & + \left[\left(G + \frac{P}{A} \right)^2 B^2 P - \left(G + \frac{P}{A} \right)^2 PAC \right] \psi = \left(G + \frac{P}{A} \right)^2 (B^2 - AC) H_0 \end{aligned} \quad (29)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση για το ϕ είναι:

$$\begin{aligned} & EJGA EI \phi^{(4)} + \left[EJ \left(G + \frac{P}{A} \right) AP + EI \left(G + \frac{P}{A} \right)^2 B^2 - GA EI \left(G + \frac{P}{A} \right) C \right] \phi^{(2)} + \\ & + \left[\left(G + \frac{P}{A} \right)^2 B^2 P - \left(G + \frac{P}{A} \right)^2 PAC \right] \phi = \left(G + \frac{P}{A} \right)^2 (AB - B^2 I) H_0 \end{aligned} \quad (30)$$

3) ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΦΟΡΤΙΩΝ ΑΣΤΑΘΕΙΑΣ

Ψάχνουμε το φορτίο λυγισμού. Άρα θέτουμε $H_0 = 0$ και η Εξίσωση (29) γίνεται

$$\begin{aligned} & EJAEI \psi^{(4)} + \left[EJ \left(G + \frac{P}{A} \right) AP + EI \left(G + \frac{P}{A} \right)^2 B^2 - GA EI \left(G + \frac{P}{A} \right) C \right] \psi^{(2)} \\ & + \left[\left(G + \frac{P}{A} \right)^2 B^2 P - \left(G + \frac{P}{A} \right)^2 PAC \right] \psi = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Ορίζουμε τα ακόλουθα αδιάστατα μεγέθη

i) Αδιάστατο φορτίο αστάθειας:

$$p = \frac{P}{GA} \quad (32)$$

ii) Αδιάστατη γεωμετρία της δοκού:

$$\lambda = \frac{\pi h}{2l} \quad (33)$$

iii) Αδιάστατες στιβαρότητες

$$k_1 = \frac{GB^2h^2}{EAJ} \quad k_2 = \frac{GAh^2}{EI} \quad (34)$$

Για την υπό μελέτη διατομή οι αδιάστατες στιβαρότητες είναι:

$$k_1 = 7 \frac{G}{E} \quad k_2 = 0.75 \frac{G}{E} \quad (35)$$

Σημειωτέον ότι για την υπό μελέτη διατομή οι αδιάστατες στιβαρότητες δεν εξαρτώνται από το h . Εξαρτώνται μόνο από το λόγο G/E .

iv) Γεωμετρική παράμετρος της διατομής:

$$\gamma = \frac{AC}{B^2} \quad (36)$$

Τότε, η Εξίσωση (31) γίνεται:

$$h^4 \psi^{(4)} + \left[k_1 \left((p+1)^2 - \gamma(p+1) \right) + p(p+1)k_2 \right] h^2 \psi^{(2)} + k_1 k_2 p (p+1)^2 (1-\gamma) = 0 \quad (37)$$

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $\psi(x) = e^{\frac{m}{h}x}$.

Έτσι παίρνουμε την εξίσωση:

$$m^4 + \left[k_1 \left((p+1)^2 - \gamma(p+1) \right) + p(p+1)k_2 \right] m^2 + k_1 k_2 p (p+1)^2 (1-\gamma) = 0 \quad (38)$$

Θέτουμε $n = m^2$ και η Εξίσωση (38) γίνεται ένα τριώνυμο:

$$n^2 + bn + c = 0 \quad (39)$$

όπου

$$\begin{aligned} b &= k_1 \left((p+1)^2 - \gamma(p+1) \right) + p(p+1)k_2 \\ c &= k_1 k_2 p (p+1)^2 (1-\gamma) \end{aligned} \quad (40)$$

Η διακρίνουσά του είναι

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= b^2 - 4c \\ &= (p+1)^2 \left[p^2 (k_1 + k_2)^2 + 2k_1(1-\gamma)(k_1 - k_2)p + k_1^2(1-\gamma)^2 \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Ο πρώτος όρος είναι μη αρνητικός. Ο δεύτερος όρος είναι τριώνυμο του p με διακρίνουσα:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \left[2k_1(1-\gamma)(k_1 - k_2) \right]^2 - 4k_1^2(1-\gamma)^2(k_1 + k_2)^2 = \\ &= -16k_1^3(1-\gamma)^2 k_2 \end{aligned} \quad (42)$$

Για την ορθογωνική διατομή $\gamma=6$. Άρα $\Delta_2 < 0$. Άρα η Δ_1 είναι πάντα θετική για $p \neq -1$. Άρα η Εξίσωση (39) έχει πάντα 2 πραγματικές και άνισες ρίζες:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \\ n_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \end{aligned} \quad (43)$$

Μιας και $n = m^2$ χρειαζόμαστε το πρόσημο των n_1 και n_2 . Διακρίνουμε περιπτώσεις:

→ **Περίπτωση I: $p > 0$ (Θλίψη):**

$$c < 0 \Rightarrow b^2 - 4c > b^2 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4c} > |b| \Rightarrow \begin{cases} n_1 > 0 \\ n_2 < 0 \end{cases}$$

Άρα έχουμε 2 πραγματικές και 2 φανταστικές ρίζες για το m , και η γενική λύση της Εξίσωσης (37) είναι

$$\psi = c_1 \sinh\left(\frac{m_1 x}{h}\right) + c_2 \cosh\left(\frac{m_1 x}{h}\right) + c_3 \sin\left(\frac{m_2 x}{h}\right) + c_4 \cos\left(\frac{m_2 x}{h}\right) \quad (44)$$

όπου

$$m_1 = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \quad m_2 = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \quad (45)$$

Επιβάλλουμε συνοριακές συνθήκες μηδενικής οριζόντιας δύναμης, στρέβλωσης και στροφής στα άκρα και παίρνουμε:

$$\psi(l) = \psi(-l) = \psi^{(2)}(l) = \psi^{(2)}(-l) = 0$$

Η παραπάνω δίνει ένα σύστημα ως προς C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$\begin{bmatrix} \sinh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \cosh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \sin\left(\frac{m_2 l}{h}\right) & \cos\left(\frac{m_2 l}{h}\right) \\ -\sinh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \cosh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & -\sin\left(\frac{m_2 l}{h}\right) & \cos\left(\frac{m_2 l}{h}\right) \\ \left(\frac{m_1}{h}\right)^2 \sinh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \left(\frac{m_1}{h}\right)^2 \cosh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & -\left(\frac{m_2}{h}\right)^2 \sin\left(\frac{m_2 l}{h}\right) & -\left(\frac{m_2}{h}\right)^2 \cos\left(\frac{m_2 l}{h}\right) \\ -\left(\frac{m_1}{h}\right)^2 \sinh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \left(\frac{m_1}{h}\right)^2 \cosh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \left(\frac{m_2}{h}\right)^2 \sin\left(\frac{m_2 l}{h}\right) & -\left(\frac{m_2}{h}\right)^2 \cos\left(\frac{m_2 l}{h}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Απαιτούμε μη μηδενική λύση. Άρα η ορίζουσα του παραπάνω πίνακα πρέπει να είναι μηδέν. Αυτό δίνει εξίσωση λυγισμού:

$$\sin\left(\frac{m_2 l}{h}\right) \cosh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) \cos\left(\frac{m_2 l}{h}\right) (m_1^2 + m_2^2) = 0 \quad (47)$$

Έχουμε:

$$m_1^2 + m_2^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4c = 0 \Rightarrow c > 0, \text{ το οποίο είναι αδύνατο γιατί } p > 0.$$

Άρα η Εξίσωση (47) γίνεται

$$\sin\left(\frac{2m_2 l}{h}\right) = 0 \quad (48)$$

η οποία δίνει

$$\frac{m_2 l}{h} = \frac{k\pi}{2} \quad (49)$$

Συνδυάζουμε τις Εξισώσεις (46) και (49) για να πάρουμε τις ιδιομορφές αστάθειας.

Μελετάμε τις 2 περιπτώσεις: Το k να είναι περιττό ή άρτιο.

Αν το k είναι περιττό

$$\begin{bmatrix} \sinh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \cosh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & (-1)^{\frac{k-1}{2}} & 0 \\ -\sinh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \cosh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & -(-1)^{\frac{k-1}{2}} & 0 \\ \left(\frac{m_1}{h}\right)^2 \sinh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \left(\frac{m_1}{h}\right)^2 \cosh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & -\left(\frac{m_2}{h}\right)^2 (-1)^{\frac{k-1}{2}} & 0 \\ -\left(\frac{m_1}{h}\right)^2 \sinh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \left(\frac{m_1}{h}\right)^2 \cosh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \left(\frac{m_2}{h}\right)^2 (-1)^{\frac{k-1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

το οποίο δίνει $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ και το c_4 απροσδιόριστο. Άρα η ιδιοσυνάρτηση θα είναι:

$$\psi = c_4 \cos\left(\frac{k\pi}{2l}\right) \quad (51)$$

Αν το k είναι άρτιο παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} \sinh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \cosh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & 0 & (-1)^{\frac{k-1}{2}} \\ -\sinh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \cosh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & 0 & (-1)^{\frac{k-1}{2}} \\ \left(\frac{m_1}{h}\right)^2 \sinh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \left(\frac{m_1}{h}\right)^2 \cosh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & 0 & -\left(\frac{m_1}{h}\right)^2 (-1)^{\frac{k-1}{2}} \\ -\left(\frac{m_1}{h}\right)^2 \sinh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & \left(\frac{m_1}{h}\right)^2 \cosh\left(\frac{m_1 l}{h}\right) & 0 & -\left(\frac{m_1}{h}\right)^2 (-1)^{\frac{k-1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

το οποίο δίνει $c_1 = c_2 = c_4 = 0$ και το c_3 απροσδιόριστο. Άρα η ιδιοσυνάρτηση θα είναι:

$$\psi = c_3 \sin\left(\frac{k\pi}{2l}\right) \quad (53)$$

→ **Περίπτωση II** $-1 < p < 0$ (εφελκυσμός)

Από την Εξίσωση (40) παίρνουμε ότι

$$b = k_1 \left((p+1)^2 - \gamma(p+1) \right) + p(p+1)k_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b < k_1 \left((p+1)^2 - \gamma(p+1) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b < k_1 (p+1)(p+1-\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b < 0$$

Επίσης παίρνουμε ότι $c = k_1 k_2 p (p+1)^2 (1-\gamma) \Rightarrow c < 0$

Άρα $b^2 > b^2 - 4c \Rightarrow |b| > \sqrt{b^2 - 4c}$.

Άρα $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} > 0$.

Άρα η Εξίσωση (39) έχει δύο θετικές ρίζες, η Εξίσωση (38) έχει 4 πραγματικές ρίζες και η Εξίσωση (37) έχει την ακόλουθη γενική λύση:

$$\psi = c_1 \sinh\left(\frac{m_1 x}{h}\right) + c_2 \cosh\left(\frac{m_1 x}{h}\right) + c_3 \sinh\left(\frac{m_2 x}{h}\right) + c_4 \cosh\left(\frac{m_2 x}{h}\right) \quad (54)$$

όπου τα m_1 και m_2 δίνονται από

$$m_1 = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \quad m_2 = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \quad (55)$$

Εφαρμόζοντας τις ίδιες συνοριακές συνθήκες με πριν παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση λυγισμού:

$$(m_2^2 - m_1^2)(m_2^2 + m_1^2) = 0 \quad (56)$$

η οποία είναι αδύνατη. Άρα δεν έχουμε αστάθεια για $-1 < p < 0$.

→ **Περίπτωση III** $p = -1$

Η Εξίσωση (37) γίνεται $\psi^{(4)} = 0$ και προφανώς δεν υπάρχει αστάθεια.

→ **Περίπτωση IV** $p < -1$

Από την Εξίσωση (40) έχουμε ότι

$$b = k_1 \left((p+1)^2 - \gamma(p+1) \right) + p(p+1)k_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b > k_1 \left((p+1)^2 - \gamma(p+1) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b > k_1 (p+1)(p+1-\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b > 0$$

Επίσης έχουμε ότι $c = k_1 k_2 p (p+1)^2 (1-\gamma) \Rightarrow c < 0$

Άρα $b^2 > b^2 - 4c \Rightarrow |b| > \sqrt{b^2 - 4c}$.

Άρα $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} < 0$.

Άρα η Εξίσωση (39) έχει 2 αρνητικές ρίζες, η Εξίσωση (38) έχει 4 φανταστικές ρίζες και η Εξίσωση (37) έχει την ακόλουθη γενική λύση:

$$\psi = c_1 \sin\left(\frac{m_1 x}{h}\right) + c_2 \cos\left(\frac{m_1 x}{h}\right) + c_3 \sin\left(\frac{m_2 x}{h}\right) + c_4 \cos\left(\frac{m_2 x}{h}\right) \quad (57)$$

όπου τα m_1 και m_2 δίνονται από:

$$m_1 = \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \quad m_2 = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}} \quad (58)$$

Εφαρμόζοντας τις ίδιες συνοριακές συνθήκες με πριν παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση λυγισμού:

$$\sin\left(\frac{2m_1 l}{h}\right) \sin\left(\frac{2m_2 l}{h}\right) = 0 \quad (59)$$

η οποία δίνει

$$\frac{m_1 l}{h} = \frac{k\pi}{2} \quad \text{or} \quad \frac{m_2 l}{h} = \frac{k\pi}{2} \quad (60)$$

Και στις 2 περιπτώσεις, αφού βάλουμε την Εξίσωση (60) στο σύστημα για τις c_1, c_2, c_3, c_4 παίρνουμε ότι η ιδιοσυνάρτηση είναι:

$$\begin{aligned} \psi &= c \cos\left(\frac{k\pi x}{2l}\right), \quad k \text{ odd} \\ \psi &= c \sin\left(\frac{k\pi x}{2l}\right), \quad k \text{ even} \end{aligned} \quad (61)$$

Άρα συγκρίνοντας την Εξίσωση (51) και την Εξίσωση (53) με την Εξίσωση (61) παίρνουμε ότι η ιδιοσυνάρτηση για το ψ είναι η ίδια σε θλίψη και εφελκυσμό.

Για να βρούμε το πρώτο φορτίο αστάθειας βάζουμε την Εξίσωση (51) ή την Εξίσωση (53) ή την Εξίσωση (61) στην Εξίσωση (37) και παίρνουμε:

$$\lambda^4 - \left((1+p)pk_2 + (1+p)^2 k_1 - \gamma(1+p)k_1\right) \lambda^2 + (1+p)^2 pk_1 k_2 = 0 \quad (62)$$

όπου ορίσαμε την αδιάστατη παράμετρο λ ως:

$$\lambda = \frac{\pi h}{2l} \quad (63)$$

αν θέσουμε $k_1 \rightarrow 0$ (δηλαδή $EJ \rightarrow \infty$, δηλαδή μηδενική στρέβλωση) η Εξίσωση (62) γίνεται:

$$\lambda^4 - k_2 p (1 + p) \lambda^2 = 0 \quad (64)$$

το οποίο δίνει

$$\frac{EI\pi^2}{4l^2} = P \left(1 + \frac{P}{GA} \right) \quad (65)$$

η οποία είναι η εξίσωση για το φορτίο αστάθειας αν επιτρέπουμε την διατμητική παραμόρφωση της δοκού αλλά δεν επιτρέπουμε στρέβλωση. Σημειωτέον ότι αν θέσουμε $GA \rightarrow \infty$ παίρνουμε το φορτίο λυγισμού κατά Euler.

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξίσωση (62) ως πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού κατά p :

$$k_1 k_2 p^3 + \left(-(k_1 + k_2) \lambda^2 + 2k_1 k_2 \right) p^2 + \left(-(k_2 + 2k_1 - \gamma k_1) \lambda^2 + k_1 k_2 \right) p + \lambda^2 (\lambda^2 - k_1 (1 - \gamma)) = 0 \quad (66)$$

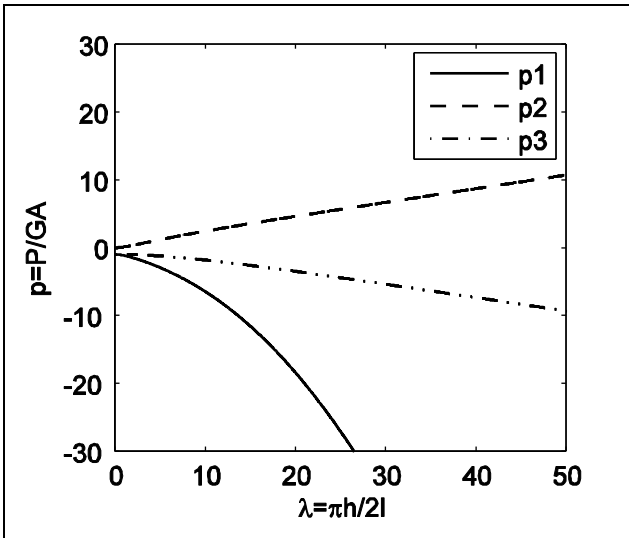
Οι ρίζες αυτού του πολυωνύμου δίνουν τα φορτία αστάθειας. Οι ρίζες εξαρτώνται από τις αδιάστατες στιβαρότητες (k_1, k_2) και από την αδιάστατη παράμετρο λ που δίνεται στην Εξίσωση (63). Η παράμετρος γ εξαρτάται μόνο από το σχήμα της διατομής και, για διατομή λωρίδας μοναδιαίου πλάτους, ισούται με 6.

Η παραπάνω εξίσωση 3^{ου} βαθμού έχει κλειστή λύση (η οποία δίνεται από τον τύπο του Cardano) αλλά η λύση αυτή είναι τόσο περίπλοκη που την καθιστά άχρηστη για επίλυση με το χέρι. Επίσης αποδεικνύεται ότι η κλειστή λύση περιέχει και φανταστικούς αριθμούς ακόμα και όταν το τελικό αποτέλεσμα είναι πραγματικό. Για αυτό η εξίσωση λύθηκε συμβολικά με τη γλώσσα συμβολικού προγραμματισμού Mathematica, έκδοση 5.2. Παίρνουμε 3 λύσεις:

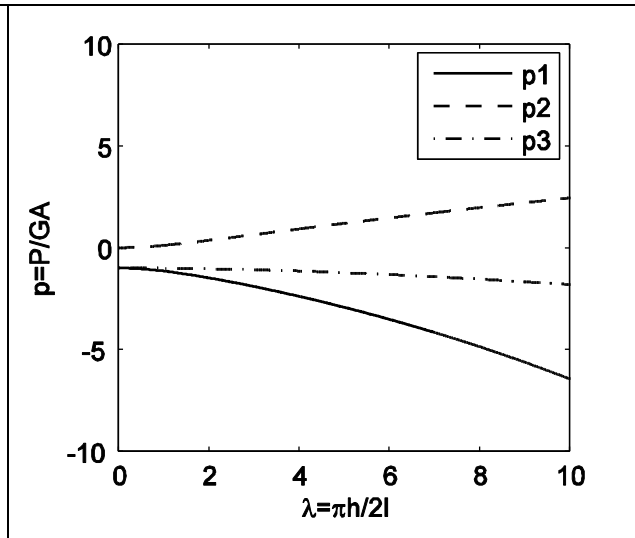
- p_1 (εφελκυσμός)
- p_2 (θλίψη)
- p_3 (εφελκυσμός)

Όπως φαίνεται από τα παρακάτω σχήματα $p_1 \gg p_3$. Για αυτό θα αναφερόμαστε στο p_1 ως το «μεγάλο» εφελκυστικό φορτίο αστάθειας και στο p_3 ως το «μικρό» εφελκυστικό φορτίο αστάθειας.

Παρακάτω δίνονται τα διαγράμματα των 3 αδιαστατοποιημένων φορτίων αστάθειας για συναρτήσει του λ για $E/G = 2.5$.



Σχήμα 4. Αδιαστατοποιημένα φορτία αστάθειας συναρτήσει των χαρακτηριστικών της δοκού

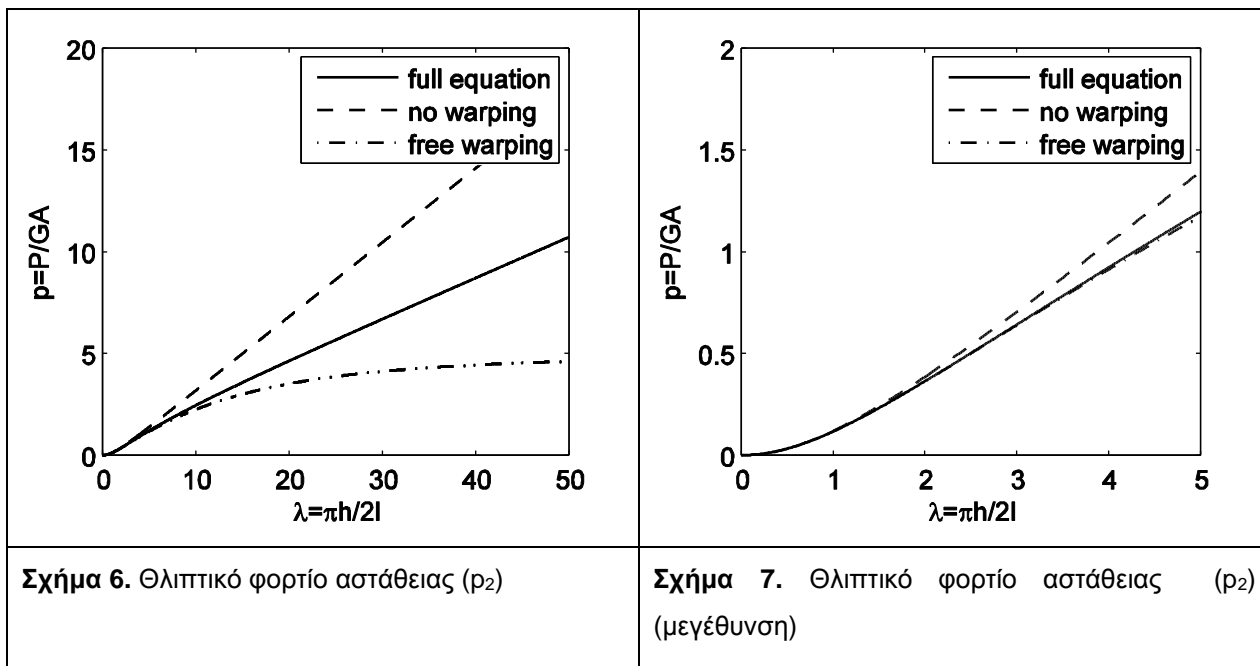


Σχήμα 5. Αδιαστατοποιημένα φορτία αστάθειας συναρτήσει των χαρακτηριστικών της δοκού (μεγέθυνση)

Παρατηρούμε ότι θα έχουμε 3 διακριτά φορτία αστάθειας για την ίδια ιδιοσυνάρτηση ψ . Αυτά τα 3 φορτία αστάθειας δεν αντιστοιχούν στην ίδια συνολική ιδιομορφή. Αντιστοιχούν σε 3 διαφορετικές ιδιομορφές. Έχουν το ίδιο $\psi = C \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$ αλλά τα ϕ και ν θα διαφέρουν.

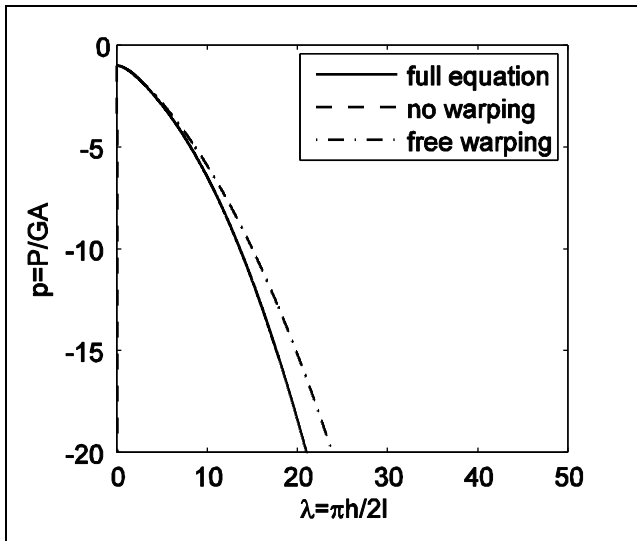
Στα παρακάτω διαγράμματα σχεδιάσαμε το αδιαστατοποιημένο θλιπτικό φορτίο αστάθειας (p_2) για 3 περιπτώσεις:

- Πλήρης εξίσωση
- Μηδενική στρέβλωση (δηλαδή $EJ \rightarrow \infty$)
- Ελεύθερη στρέβλωση (δηλαδή $EJ \rightarrow 0$)

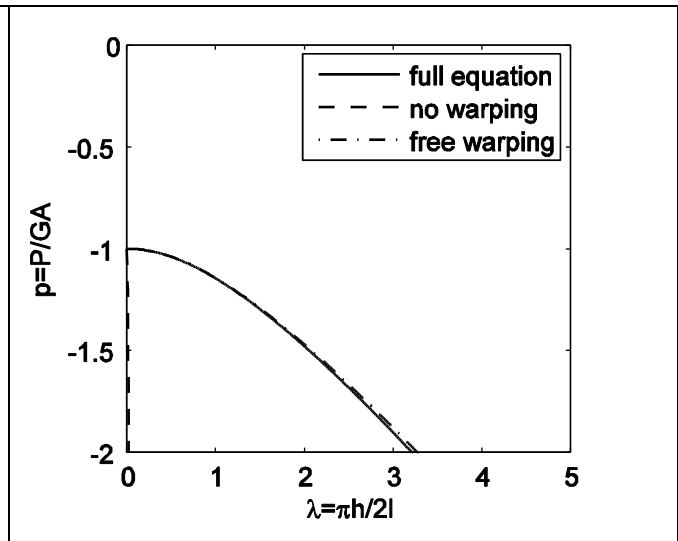


Συνήθως εφαρμόζουμε την θεωρία δοκού σε μέλη με h/l της τάξης του $1/10$. Για αυτές τις τιμές του h/l η διαφορά στο φορτίο αστάθειας είναι, όπως περιμέναμε, εντελώς αμελητέα. Τα ελαστικά εφέδρανα μπορεί να έχουν h/l της τάξης του 3, δίνοντας λ περίπου 4.5. Σε αυτή την περιοχή φαίνεται ότι αν αμελήσουμε τη στρέβλωση υπερεκτιμάμε το φορτίο αστάθειας. Εντούτοις η διαφορά είναι μικρή.

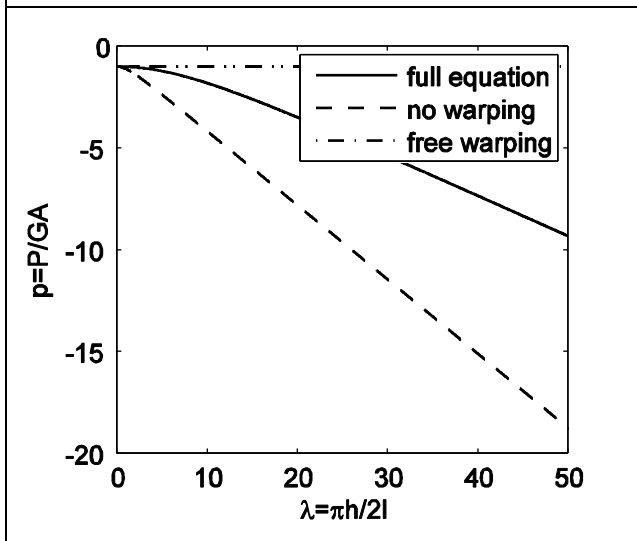
Οι ίδιες περιπτώσεις σχεδιάζονται (Σχήματα 8-11) για τα εφελκυστικά φορτία αστάθειας



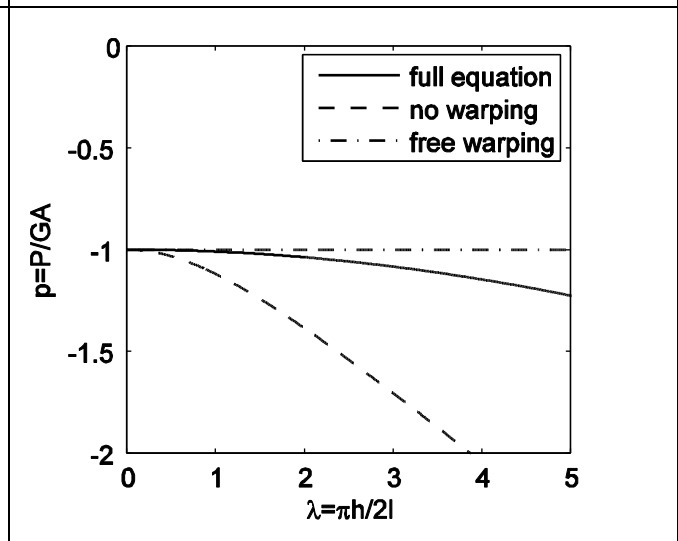
Σχήμα 8. «Μεγάλο» εφελκυστικό φορτίο αστάθειας (ρ_1)



Σχήμα 9. «Μεγάλο» εφελκυστικό φορτίο αστάθειας (ρ_1) (μεγέθυνση)



Σχήμα 10. «Μικρό» εφελκυστικό φορτίο αστάθειας (ρ_3)



Σχήμα 11. Μικρό εφελκυστικό φορτίο αστάθειας (ρ_3) (μεγέθυνση)

Από το Σχήμα 9 παρατηρούμε ότι η περίπτωση μηδενικής στρέβλωσης δίνει απείρως μεγάλο φορτίο αστάθειας (σχεδιάζεται ως η σχεδόν κατακόρυφη γραμμή η οποία ίσα που φαίνεται). Άρα η λύση ρ_1 αντιστοιχεί στην επιπλέον (σε σχέση με την θεωρία διατμητικής δοκού) ιδιομορφή αστάθειας. Αυτή η επιπλέον ιδιομορφή εμφανίζεται λόγω της επιπλέον παραμέτρου, της στρέβλωσης.

Από το **Σχήμα 10** παρατηρούμε ότι αν αμελήσουμε τη στρέβλωση υποεκτιμάμε το εφελκυστικό φορτίο αστάθειας σημαντικά.

4) ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΜΟΡΦΩΝ

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε το σχήμα των ιδιομορφών. Παρατηρούμε ότι για $H_0 = 0$ η (30) για το ϕ είναι η ίδια με την Εξίσωση (29) για το ψ , με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες. Άρα η πρώτη ιδιοσυνάρτηση για το ϕ θα είναι $\phi = C \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$. Άρα ονοματίζοντας ξανά τις σταθερές έχουμε:

$$\begin{aligned}\psi &= C_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \\ \phi &= C_2 \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)\end{aligned}\tag{67}$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (22) και (23), και για $H = 0$ παίρνουμε ότι:

$$EJ\phi^{(2)} - \left(G + \frac{P}{A}\right)B \left[\frac{P\psi - \left(G + \frac{P}{A}\right)B\phi}{GA} \right] - \left(G + \frac{P}{A}\right)C\phi = 0\tag{68}$$

Βάζοντας την Εξίσωση (67) στην Εξίσωση (68) παίρνουμε:

$$PC_1 = \left(-\frac{AEJ}{\left(1 + \frac{P}{GA}\right)B} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 + \left(\frac{P}{GA} + 1\right)GB - \frac{AGC}{B} \right) C_2\tag{69}$$

Χρησιμοποιώντας τις αδιάστατες ποσότητες που ορίσαμε πιο πάνω παίρνουμε

$$C_1 = \left(-\frac{\lambda^2}{(p+1)k_1} + (p+1) - \gamma \right) \frac{B}{A} \frac{1}{p} C_2\tag{70}$$

Η παραπάνω εξίσωση δίνει μία σχέση μεταξύ C_1 and C_2 , δηλαδή μεταξύ των σταθερών της στροφής και της στρέβλωσης των διατομών.

Επίσης η Εξίσωση (21) για $v(-l) = 0$ και $H = 0$ δίνει:

$$M_0 = M(-l) = EI \frac{\pi}{2l} C_1 \quad (71)$$

Βάζοντας τη λύση για το ψ (η οποία δίνεται στην Εξίσωση (67)) στην Εξίσωση (21), και χρησιμοποιώντας τις προαναφερθείσες αδιάστατες ποσότητες παίρνουμε:

$$v = \frac{1}{p} \frac{C_1}{k_2} \lambda h \left(1 + \sin \left(\frac{\pi x}{2l} \right) \right) \quad (72)$$

Ορίζουμε

$$C_3 = \frac{1}{p} \frac{C_1}{k_2} \lambda h \quad (73)$$

και παίρνουμε

$$v = C_3 \left(1 + \sin \left(\frac{\pi x}{2l} \right) \right) \quad (74)$$

Για να πάρουμε μια ιδέα για τη μορφή των ιδιομορφών ορίζουμε τα παρακάτω αδιάστατα μεγέθη:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{C_1 h}{C_2} = \left(-\frac{\lambda^2}{(p+1)k_1} + p+1-\gamma \right) \frac{B}{A} \frac{h}{p} \\ M_2 &= \frac{C_1 h}{C_3} = \frac{pk_2}{\lambda} \\ M_3 &= \frac{C_3}{C_2} = \frac{\lambda h}{pk_2} \left(-\frac{\lambda^2}{(p+1)k_1} + p+1-\gamma \right) \frac{B}{A} \frac{1}{p} \end{aligned} \quad (75)$$

Τα παραπάνω μεγέθη είναι ένα μέτρο των $\frac{\text{στροφή}}{\text{στρέβλωση}}$, $\frac{\text{στροφή}}{\text{μετατόπιση}}$, $\frac{\text{μετατόπιση}}{\text{στρέβλωση}}$ αντίστοιχα.

Για μια ορθογωνική διατομή μοναδιαίου πλάτους είναι $\frac{B}{A} = \frac{2}{5h}$ και η Εξίσωση (75) γίνεται

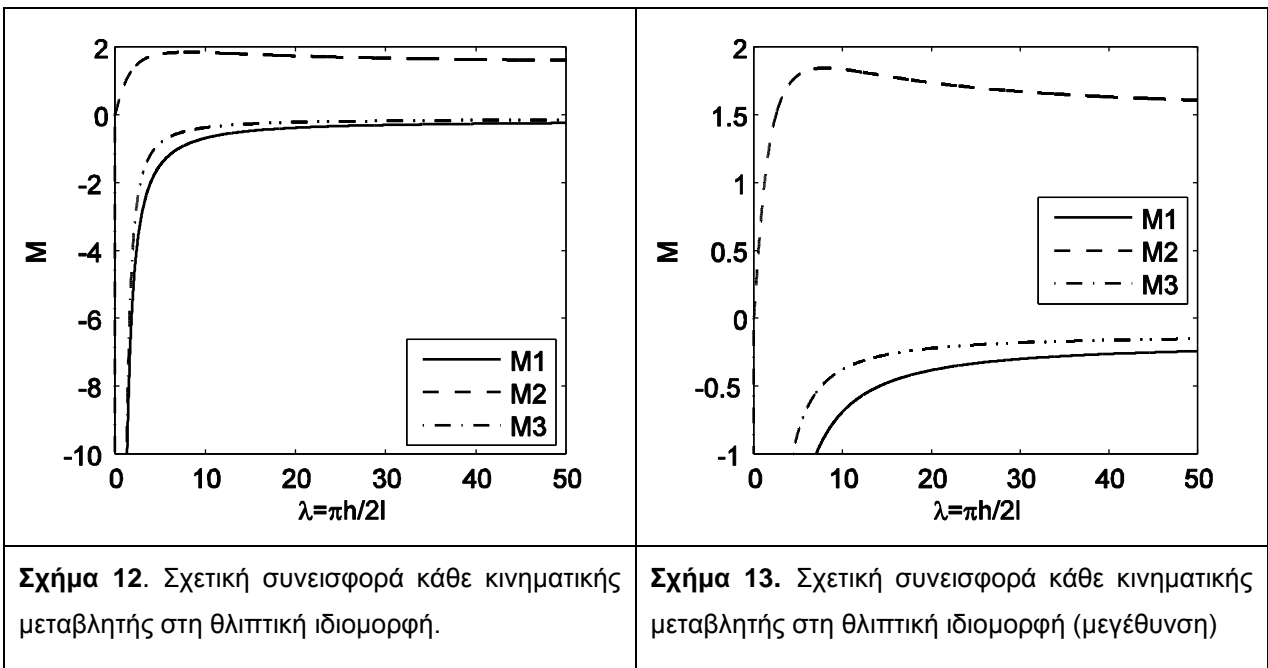
$$M_1 = \frac{C_1 h}{C_2} = \left(-\frac{\lambda^2}{(p+1)k_1} + p+1-\gamma \right) \frac{2}{5} \frac{1}{p}$$

$$M_2 = \frac{C_1 h}{C_3} = \frac{pk_2}{\lambda} \tag{76}$$

$$M_3 = \frac{C_3}{C_2} = \frac{\lambda}{pk_2} \left(-\frac{\lambda^2}{(p+1)k_1} + p+1-\gamma \right) \frac{2}{5} \frac{1}{p}$$

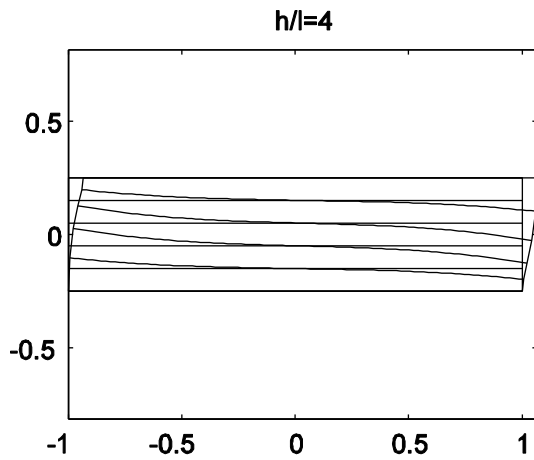
Άρα η σχετική συνεισφορά κάθε κινηματικής μεταβλητής (στροφής, στρέβλωσης και μετακίνησης) εξαρτάται από τις αδιαστατοποιημένες στιβαρότητες, την αδιάστατη παράμετρο λ και από την ιδιομορφή στην οποία αναφερόμαστε (θλίψη, «μικρός» εφελκυσμός, «μεγάλος» εφελκυσμός).

Σχεδιάζουμε τις παραπάνω ποσότητες (**Σχήματα 12 και 13**) για το θλιπτικό φορτίο αστάθειας.

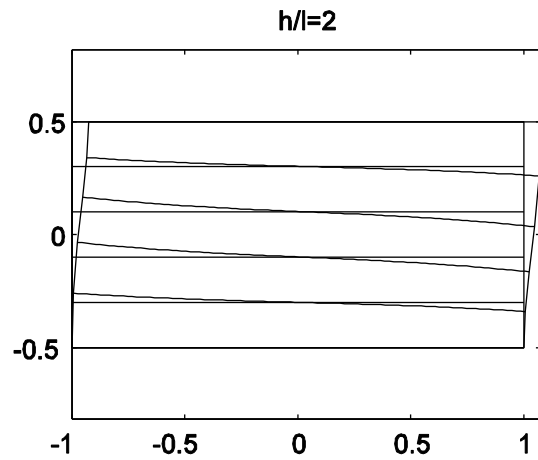


Από το **Σχήμα 12** παρατηρούμε ότι για δοκούς μεγάλου μήκους (δηλαδή μικρού λ) $C_3 \gg C_1 h \gg C_2$ (δηλαδή μετακίνηση \gg στροφή \gg στρέβλωση), όπως και περιμέναμε. Για δοκούς πολύ μικρού μήκους η βασική συνεισφορά είναι από τη στρέβλωση, παρά την ύπαρξη μιας μικρής μετακίνησης και στροφής.

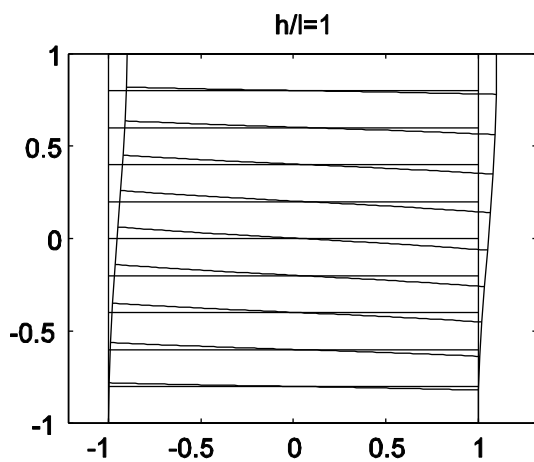
Οι θλιπτικές ιδιομορφές αστάθειας σχεδιάζονται στα **Σχήματα 14-17** για $h/l=4, 2, 1, 0.5$:



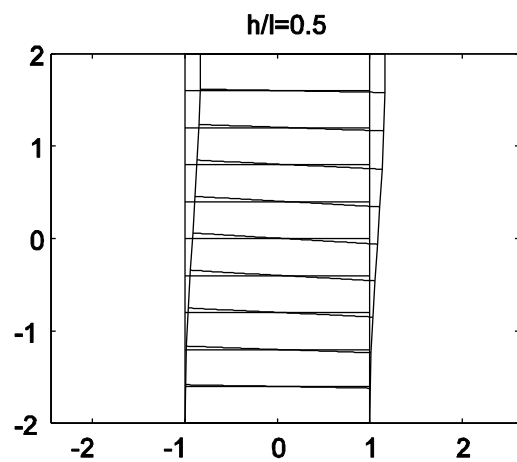
Σχήμα 14. Θλιπτική ιδιομορφή για $h/l=4$



Σχήμα 15. Θλιπτική ιδιομορφή για $h/l=2$



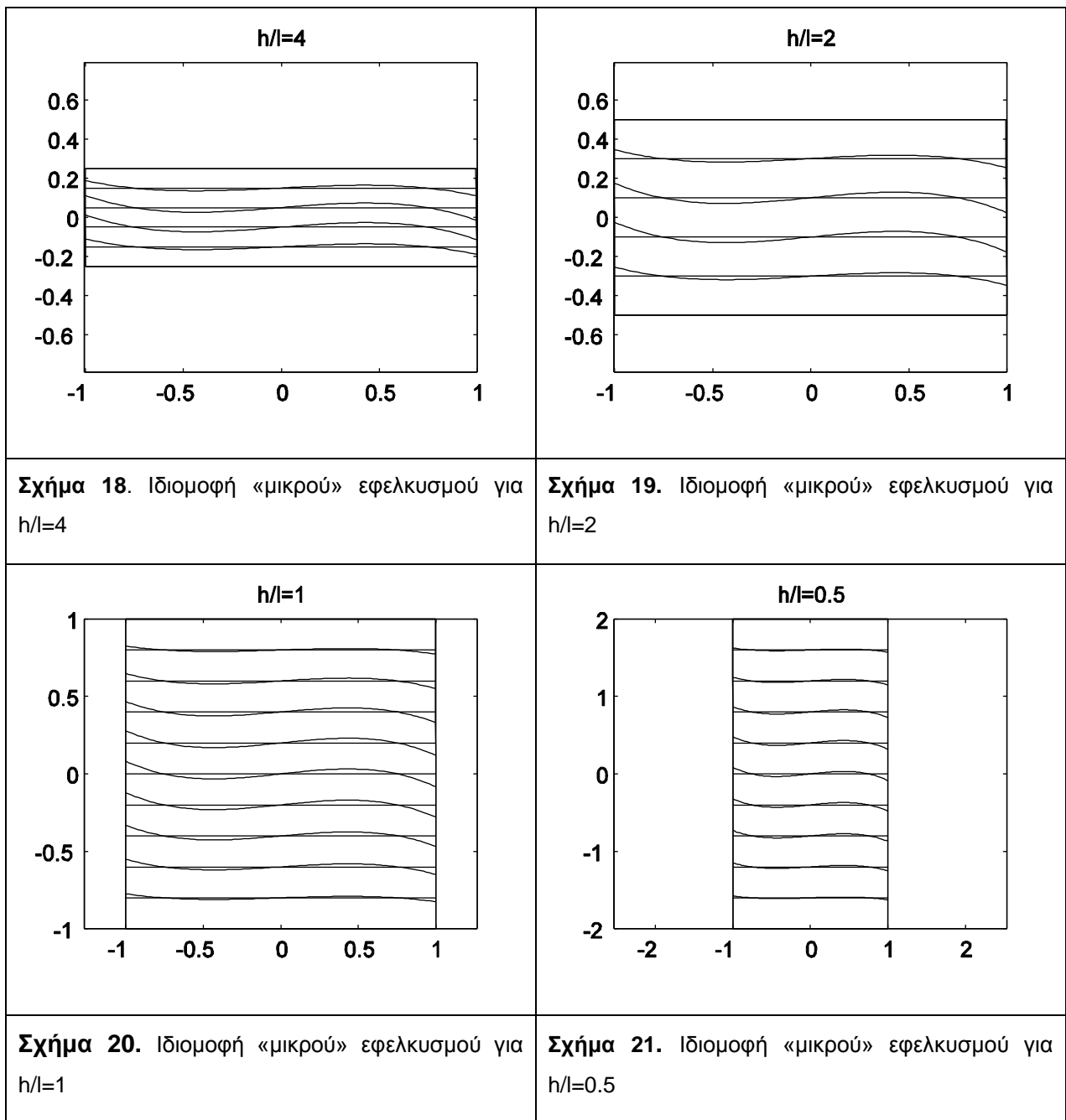
Σχήμα 16. Θλιπτική ιδιομορφή για $h/l=1$



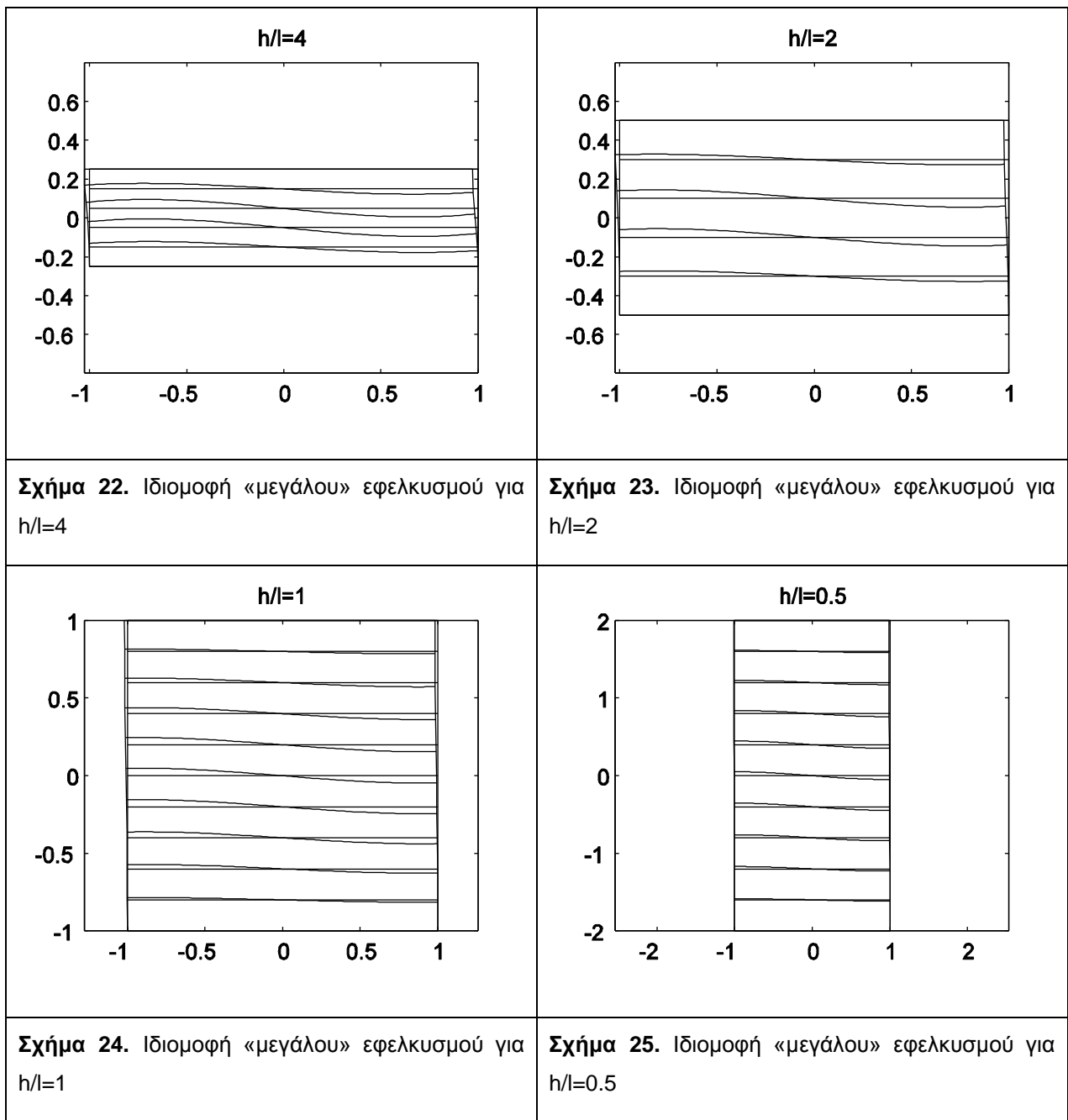
Σχήμα 17. Θλιπτική ιδιομορφή για $h/l=0.5$

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρούμε ότι όσο η δοκός γίνεται κοντύτερη, η στρέβλωση γίνεται πιο σημαντική

Στα **Σχήματα 18-21** σχεδιάζουμε τις ιδιομορφές αστάθειας για το «μικρό» εφελκυστικό φορτίο αστάθειας, για $E/G=2.5$. Η στρέβλωση γίνεται κυρίαρχη. Κάτι τέτοιο ήταν αναμενόμενο επειδή η τιμή του μικρού εφελκυστικού φορτίου αστάθειας επηρεάζεται σημαντικά από την ύπαρξη στρέβλωσης (δες **Σχήμα 10.**)



Για το «μεγάλο» εφελκυστικό φορτίο αστάθειας, η στρέβλωση είναι παρούσα ακόμα και στις δοκούς μεγάλου μήκους. Αυτό είναι λογικό μιας και αυτό το φορτίο είναι το φορτίο που εμφανίζεται λόγω της προσθήκης στην θεωρία διατμητικής δοκού της επιπλέον κινηματικής μεταβλητής, δηλαδή της στρέβλωσης. Όταν παίρνουμε το όριο $EJ \rightarrow \infty$ (δηλαδή όχι στρέβλωση, δηλαδή διατμητική δοκός) αυτό το φορτίο πάει στο άπειρο. Άρα είναι λογικό να αναμένουμε ότι η ιδιομορφή αυτή θα κυριαρχείται από στρέβλωση.



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα ελαστικά εφέδρανα μπορούν να «λυγίσουν» τόσο σε θλίψη όσο και σε εφελκυσμό. Τούτο δεν είναι ευρέως γνωστό. Η παρουσία εφελκυστικών φορτίων λυγισμού είναι σημαντική όχι γιατί τα εφέδρανα θα εφελκυστούν αρκετά για να «λυγίσουν» αλλά γιατί η παρουσία τους υποδεικνύει ότι η παρουσία αξονικού φορτίου μειώνει την οριζόντια στιβαρότητα των εφεδράνων είτε αυτά θλίβονται είτε αυτά εφελκύνονται. Αυτό είναι ένα αξιοσημείωτο αποτέλεσμα γιατί η οριζόντια στιβαρότητα των εφεδράνων είναι σημαντική παράμετρος για την ανάλυση των σεισμικών μονωμένων κατασκευών.

Επίσης αν συγκρίνουμε το εφελκυστικό φορτίο αστάθειας μίας δοκού Timoshenko και μιας δοκού στην οποία λαμβάνεται υπόψη και η στρέβλωση των διατομών παρατηρούμε ότι, για τα μεγέθη των εφεδράνων που χρησιμοποιούμε, το θλιπτικό φορτίο αστάθειας δεν αλλάζει σημαντικά. Αντίθετα το εφελκυστικό φορτίο αστάθειας της δοκού Timoshenko είναι αρκετά μεγαλύτερο.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα εργασία υποστηρίχθηκε μερικώς από το κοινωφελές ίδρυμα Αλέξανδρος Ωνάσης μέσω του προγράμματος υποτροφιών για Έλληνες.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- 1) Gent A.N., Lindley P.B. (1959), "The compression of bonded rubber bonds", *Proceedings Institution of Mechanical Engineers*; 173:324
- 2) Gent A.N., Meinecke E.A.(1970), "Compression, bending and shear of bonded rubber blocks". *Polymer Engineering and Science*; 10(2):48-53
- 3) Haringx J.A. (1948), "On Highly compressible helical springs and rubber rods, and their application for vibration – free mountings, III". *Philips Research Reports*; 4:206-220.
- 4) Kelly J.M. (1994), "The influence of plate flexibility on the buckling load of elastomeric isolators". Report UCB/EERC-94/03, *Earthquake Engineering Research Center*, University of California Berkeley
- 5) Kelly J.M. (1997), "*Earthquake Resistant Design with Rubber*", Second Edition, Springer
- 6) Kelly J.M.(1999), Analysis of Fiber Reinforced Elastomeric Isolators, *Journal of Seismology and Earthquake Engineering*, Vol.2, No 1,19-34
- 7) Kelly J.M. (2003), "Tension buckling in multilayer elastomeric bearings." *Journal of Engineering Mechanics*. 129(12) 1363-1368
- 8) Rocard Y. (1937), "Note sur le calcul des proprietes elastique des supports en caoutchouc adherent. *J. de Physique et de Radium*, 5:197-203
- 9) Tsai H.-C, Kelly J.M. (2005), "Buckling of short beams with warping effect included", *International Journal of Solids and Structures* 42, 239-253