

DISS.ETH NO.19866

# Rational Points and Transcendental Points

A dissertation submitted to  
ETH ZURICH

for the degree of  
Doctor of Sciences

presented by

MING-XI WANG

M.Phil. The University of Hong Kong  
born February 19th, 1983  
citizen of China

accepted on the recommendation of

Prof. Gisbert Wüstholz

Prof. Manfred Einsiedler

Prof. Tuen-Wai Ng

2011

# Abstract

In the second chapter we revisit the Ritt theory by the study of topological fundamental groups. Our main result of this chapter gives a presentation of  $(\text{End}(\mathbb{E}), \circ)$  which is the monoid of finite endomorphisms of the unit disk.

The third chapter, as a technical part of our thesis, is devoted to elliptic rational functions. Those functions were originally constructed by Zolotarev in terms of, essentially, descents of isogeny between elliptic curves. Our reconstruction of them is by means of monodromy representation, and this new viewpoint is essential for arithmetic or geometric applications. We shall verify that if the curve  $\mathbb{P}^1 \times_{f,g} \mathbb{P}^1$ , where  $f$  and  $g$  are elements of  $\text{End}(\mathbb{E})$ , admits certain special arithmetic or geometric properties then  $f$  and  $g$  admit special representations in  $(\text{End}(\mathbb{E}), \circ)$ . In addition elliptic rational functions contribute to most nontrivial cases of these representations.

The purpose of the fourth chapter is to prove that if two finite endomorphisms of the unit disk have orbits with infinitely many intersections then they have a common iteration. This implies as a corollary a dynamical analogue of Mordell-Lang and André-Oort type for finite endomorphisms of polydisks.

The last chapter is devoted to a generalization of Schneider's theorem in transcendence. The main result here is that under suitable conditions the image of  $f: C \rightarrow X_{\mathbb{C}}$ , which is a holomorphic map from an affine algebraic curve to a projective algebraic variety  $X$  defined over a number field, assumes finitely many times rational points.

Chapter 2 and Section 3.1 are joint with Tuen-Wai Ng and the last Chapter is joint with Gisbert Wüstholz.

# Zusammenfassung

Im zweiten Kapitel geben wir zunächst eine Darstellung der Ritt'schen Theorie mittels Fundamentalgruppen. Im Hauptresultat des Kapitels wird dann  $(\text{End}(\mathbb{E}), \circ)$  als Monoid von endlichen Endomorphismen des Einheitskreises repräsentiert.

Das dritte Kapitel, welches den technischen Teil der Dissertation darstellt, ist elliptischen rationalen Funktionen gewidmet. In der formalen Korrespondenz zwischen elliptischen und trigonometrischen Funktionen fungieren die letztgenannten als Analoga der Tschebyshev'schen Polynome.

Ziel und Zweck des vierten Kapitels ist der Beweis, dass zwei endliche Endomorphismen des Einheitskreises, welche Orbits mit unendlichem Durchschnitt besitzen, ein gemeinsames Interiertes aufweisen. Dies impliziert ein dynamisches Analogon für endliche Endomorphismen des Einheitskreises von Mordell-Weil and André-Oort.

Das letzte Kapitel ist einer Verallgemeinerung des Schneider'schen Transzendenzsatzes gewidmet. Das Hauptresultat hier ist, dass das Bild einer holomorphen Funktion  $f: C \rightarrow X_{\mathbb{C}}$  von einer affinen algebraischen  $C$  in eine projektive algebraische Varietät  $X$  über einem Zahlkörper  $K$  unter gewissen Bedingungen nur endlich viele  $K$ -rationale Punkte als Wert annimmt.

Kapitel 2 und Abschnitt 3.1 wurden zusammen mit Tuen-Wai Ng ausgearbeitet. Das letzte Kapitel geht aus einem gemeinsamen Paper mit Gisbert Wüstholz hervor.