Diss. ETH No. 19608

Eulerian and Semi-Lagrangian Methods for Advection-Diffusion of Differential Forms

A dissertation submitted to
ETH Zürich

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by

HOLGER HEUMANN

Dipl. Math. University Heidelberg

born March 21, 1981
citizen of Germany

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Ralf Hiptmair, ETH Zürich, examiner
Prof. Dr. Siddhartha Mishra, ETH Zürich, co-examiner
Prof. Dr. Stefan Kurz, Tampere University of Technology, co-examiner

2011

Abstract

We consider generalized linear transient advection-diffusion problems for differential forms on bounded domains in $\mathbb{R}^n$. These involve Lie-derivatives with respect to a prescribed smooth vector field. We construct both, new Eulerian and Semi-Lagrangian approaches for the discretization of the Lie-derivative in the context of a Galerkin approximation based on discrete differential forms.

While the discretization of scalar advection-diffusion has attracted immense attention in numerical analysis, there has been little research on the non-scalar case, even though the non-scalar advection-diffusion problems are relevant for numerical modeling. The so-called magnetic advection-diffusion problem in quasistatic electromagnetism, the main motivation of this thesis, is an important example for such a non-scalar advection-diffusion problem.

It is the language of differential forms and in particular the notion of exterior derivatives and Lie derivatives that allows for a unified treatment of many different advection-diffusion problems, including the scalar case and the magnetic advection-diffusion problem. The calculus of differential forms reveals the intrinsic structure of such problems, that might be blurred by the "metric overhead" carried by vector calculus.

Our main interest will be robustness of the methods, that is sustained performance for very small and even vanishing diffusion. Thus, the core part of the thesis is devoted to convergence analysis and numerical studies of the Eulerian and semi-Lagrangian methods for the generalized advection problems. For fully discrete schemes and fixed polynomial degree of discrete forms we prove a priori error estimates in terms of mesh width h and timestep size τ. While for the Eulerian schemes the proofs of the estimates are adapted from the scalar case we present an entirely new approach for the analysis of fully discrete semi-Lagrangian methods. Thereby we can give convergence results that account for all discretization steps involved in the derivation of fully discrete semi-Lagrangian schemes. We even get convergence results for lowest order approximation spaces.

Zusammenfassung

Wir betrachten verallgemeinerte lineare zeitabhänginge Advektions-Diffusions-Probleme für Differentialformen auf beschränkten Gebieten im $\mathbb{R}^n$. Die Formulierung dieser Probleme basiert auf sogenannten Lie-Ableitungen zu einem vorgegebenen glatten Vektorfeld. Wir präsentieren neue Methoden zur Diskretisierung der Lie-Ableitung im Rahmen von Galerkin Approximationen mit diskreten Differentialformen. Diese beinhalten sowohl Eulersche als auch semi-Lagrangesche Ansätze.

Während die Diskretisierung des skalaren Advektions-Diffusions-Problems ein grosses und vielbeachtetes Forschungsgebiet in der Numerik ist und obwohl auch die nicht-skalaren Advektions-Diffusions-Probleme in der numerischen Modellierung wichtig sind, gibt es relativ wenig Forschung zu diesen nicht-skalaren Problemen. Das magnetische Advektions-Diffusions-Problem im quasistatischen Elektromagnetismus, die Hauptmotivation dieser Arbeit, ist ein wichtiges Beispiel für ein solches nicht-skalares Advektions-Diffusions-Problem.

Dank dem Formalismus der Differentialformen, und hier insbesondere dank den Begriffen der äusseren Ableitung und der Lie Ableitung, ist eine einheitliche Behandlung verschiedener Advektion-Diffusion-Probleme, einschließlich des skalaren Problems und des magnetischen Advektions-Diffusions-Problems, möglich. Das Kalkül der Differentialformen verdeutlicht die solchen Problemen gemeinsame innere Struktur, die durch den "metrische Overhead" von Vektorrechnung verwischt werden könnte.

Unser Hauptinteresse gilt der Robustheit der Methoden, d.h. gleichbleibend gute Ergebnisse und gute Effizienz bei Problemen mit sehr kleinem oder sogar verschwindendem Diffusionsterm. Das Kernstück der Arbeit sind daher Konvergenzaussagen und numerische Experimente zu den Eulerschen und semi-Lagrangeschen Methoden für verallgemeinerte Advektions-Probleme. Für komplett diskrete Methoden und Approximationsräume mit festem Polynomgrad beweisen wir a priori Fehlerabschätzungen in Abhängigkeit der Diskretisierungsparameter Gitterweite h und Zeitschrittweite τ. Während bei den Eulerschen-Methoden die Beweise der Abschätzungen eine Verallgemeinerung der Beweise für den skalaren Fall sind, stellen wir bei der Analyse von semi-Lagrangeschen Verfahren einen völlig neuen Ansatz dar. Damit sind wir zum Einen in der Lage sämtliche Diskretisierungsschritte bei semi-Lagrangeschen Methoden in der Konvergenzanalyse explizit zu berücksichtigen. Zum Anderen erhalten wir sogar für Approximationsräume mit niedrigstem Polynomgrad Konvergenzaussagen.