

# Relativistic fluid dynamics in complex systems

**Doctoral Thesis**

**Author(s):**

Mendoza Jimenez, Miller

**Publication date:**

2012

**Permanent link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-007571799>

**Rights / license:**

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Diss. ETH No. 20675

# Relativistic Fluid Dynamics in Complex Systems

A dissertation submitted to  
ETH ZURICH

for the degree of  
DOCTOR OF SCIENCES

presented by  
MILLER MENDOZA JIMENEZ  
MSc. Phys., National University of Colombia

born 07.11.1983  
citizen of Colombia

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. Hans J. Herrmann, examiner  
Prof. Dr. Sauro Succi, co-examiner

2012

# Zusammenfassung

Wir beginnen unsere Untersuchungen von relativistischen Systemen, indem wir zunächst einen Übergang in einem Gas relativistischer Teilchen analysieren, bei dem durch steigende Temperatur die Geschwindigkeitsverteilung von einem Peak zu einer bimodalen Verteilung wechselt, im Gegensatz zu einem nicht-relativistischen Gas, wo nur eine monotone Verbreiterung der glockenförmigen Verteilung beobachtet wird. Dieser Übergang resultiert aus dem Zusammenspiel des Anstiegs der thermischen Energie und der Zwangsbedingung der maximalen Geschwindigkeit, gegeben durch die Lichtgeschwindigkeit. Wir untersuchen die Bose-Einstein-, die Fermi-Dirac- und die Maxwell-Jüttner-Verteilung, wobei alle das gleiche qualitative Verhalten zeigen. Das Wesen des Übergangs beschreiben wir im Rahmen der Theorie kritischer Phänomene und zeigen, dass er je nach Gruppengeschwindigkeit stetig oder unstetig ist. Den Übergang analysieren wir in ein, zwei und drei Dimensionen. Wobei der Schwerpunkt auf dem zwei-dimensionalen Fall liegt, für den ein mögliches Experiment in Graphen vorgeschlagen wird, das auf der Messung des Johnson-Nyquist-Rauschens basiert.

Um komplexere relativistische Systeme zu untersuchen, entwickeln wir eine Lattice-Boltzmann-Formulierung für relativistische Fluide. Diese wird durch einen quantitativen Vergleich mit den jüngsten hydrodynamischen Simulationen numerisch validiert. Die relativistische Formulierung eröffnet des weiteren die Möglichkeit, die erwiesenen Vorteile von Lattice-Boltzmann-Methoden - nämlich rechnerische Effizienz und die einfache Handhabung komplexer Geometrien - in den Zusammenhang (mässig) relativistischer Flu-

iddynamik im Grossen zu übertragen; von Quark-Gluonen-Plasma bis hin zu Supernovaüberresten.

Als ein weiteres relativistisches System studieren wir den Elektronentransport in Graphen, wo die Elektronen sich wie ein ultrarelativistisches Gas von Quasiteilchen verhalten, das die Gleichungen der relativistischen Fluiddynamik erfüllt. Wir beweisen numerisch, dass unter gegenwärtigen experimentellen Bedingungen elektronische prä-turbulente Phänomene in Graphen durch messbare Stromfluktuationen beobachtet werden können, die das Ablösen von Wirbeln, hinter lokalisierten mikron-grossen Störstellen widerspiegeln. Weiter untersuchen wir die Entstehung von Wirbeln durch mikron-grosse Einengungen, mit besonderem Augenmerk auf den Einfluss von relativistischen Korrekturen der gewöhnlichen Navier-Stokes-Gleichungen. Es zeigt sich, dass diese Korrekturen das Einsetzen von Instabilitäten verzögern, sowie eine kleine Verschiebung der Wirbelablösefrequenz verursachen. Schliesslich zeigen wir eine Beziehung zwischen der Strouhal-Zahl (einem dimensionslosen Mass der Wirbelablösefrequenz) und der Reynolds-Zahl unter Bedingungen auf, die für künftige Experimente von Interesse sind. Aufbauend auf dem jüngst entwickelten Bild eines idealen relativistischen Elektronen-Fluids am Dirac-Punkt, stellen wir des weiteren ein analytisches Modell für die Leitfähigkeit von Graphen vor, das in der Lage ist, die lineare Abhängigkeit von der Ladungsträgerdichte und die Existenz einer minimalen Leitfähigkeit zu beschreiben. In enger Analogie zur Hydrodynamik behandelt das Modell Störstellen als umströmte, starre Hindernisse, die ein ungeordnetes Medium bilden, durch das Graphen-Elektronen fliessen. Um die minimale Leitfähigkeit zu beschreiben, berücksichtigen wir die zusätzliche Ladungsträgerdichte, die durch die Störstellen der Probe hervorgerufen wird. Das Modell, das die Leitfähigkeit als Funktion der Störstellenkonzentration vorhersagt, wird durch umfangreiche Simulationen mit verschiedenen Werten von  $\mathcal{E}$ , der dimensionslosen Stärke des elektrischen Feldes, validiert und stimmt hervorragend mit experimentellen Daten überein. Wir untersuchen ebenfalls das Kleinsche Paradoxon, in der Gegenwart zufällig angeordneter Störstellen. Für diesen Fall zeigen wir mehrere Simulationen, die die quantenmechanische Lattice-Boltzmann-Methode zur Lösung der Dirac-Gleichung

verwenden. Weiter wird ein allgemeiner Ausdruck für den Verlust an Leitfähigkeit als Funktion der Störstellenkonzentration vorgestellt und erfolgreich mit dem Kozeny-Carman-Gesetz für ungeordnete Medien in der klassischen Fluidodynamik verglichen.

Abschliessend untersuchen wir klassische Fluide die gezwungen sind, sich entlang nicht-geradliniger Trajektorien (gekrümmte Geodäten) zu bewegen, was zu einer starken Zunahme von Trägheitskräften führt. Dies kann lediglich als erster Schritt zur Erweiterung der relativistischen Lattice-Boltzmann-Methode verstanden werden, auch die Gravitation berücksichtigen zu können. Wir entwickeln ein neues kinetisches Gittermodell, das in der Lage ist, Fluidströmungen in beliebig gekrümmten Mannigfaltigkeiten und hochgradig komplexen Räumen auf sehr kompakte und effiziente Art zu handhaben. Wir zeigen eine rechnergestützte Untersuchung der Transporteigenschaften kampylotischer (allgemein gekrümmter) Medien. Es zeigt sich, dass die Beziehung zwischen dem Fluss durch ein kampylotisches Medium (bestehend aus zufällig angeordneten Krümmungsstörungen) und dem mittleren Ricci-Skalar des Systems, zwei unterschiedliche funktionale Ausdrücke aufweist, abhängig davon ob das typische räumliche Ausmass der Krümmungsstörung, ober- oder unterhalb des kritischen Wertes (der die totale Ricci-Krümmung minimiert) liegt. Darüber hinaus stellt man fest, dass der Fluss durch solche Systeme, als Funktion der Krümmungsstörunszahl bei hohen Konzentrationen, ein sublineares Verhalten aufweist, da die Interferenz zwischen Krümmungsstörungen zu einem global weniger gekrümmten Raum führt. Ebenfalls haben wir den Fluss durch solche Medien als Funktion der lokalen Reynolds-Zahl und des Grades der Wechselwirkung zwischen den Störungen beschrieben.

# Summary

To start our study on relativistic systems, we first analyze a transition from single peaked to bimodal velocity distribution in a gas of relativistic particles under increasing temperature, in contrast with a non-relativistic gas, where only a monotonic broadening of the bell-shaped distribution is observed. Such transition results from the interplay between the raise in thermal energy and the constraint of maximum velocity imposed by the speed of light. We study the Bose-Einstein, the Fermi-Dirac, and the Maxwell-Jüttner distributions, all exhibiting the same qualitative behavior. We characterize the nature of the transition in the framework of critical phenomena and show that it is either continuous or discontinuous, depending on the group velocity. We analyze the transition in one, two, and three dimensions, with special emphasis on two-dimensions, for which a possible experiment in graphene, based on the measurement of the Johnson-Nyquist noise, is proposed.

To study more complex relativistic systems, we develop a lattice Boltzmann (LB) formulation for relativistic fluids, which is numerically validated through quantitative comparison with recent hydrodynamic simulations. The relativistic formulation also opens up the possibility of exporting the proven advantages of Lattice Boltzmann methods, namely computational efficiency and easy handling of complex geometries, to the context of (mildly) relativistic fluid-dynamics at large, from quark-gluon plasmas up to supernovae with relativistic outflows.

As another relativistic system, we study the electronic transport in graphene, which electrons behave as ultrarelativistic gas of quasiparticles satisfying the equations of relativistic fluid dynamics. We provide numerical evidence

that electronic pre-turbulent phenomena in graphene could be observed, under current experimental conditions, through detectable current fluctuations, echoing the detachment of vortices past localized micron-sized impurities. Vortex generation, due to micron-sized constriction, is also explored with special focus on the effects of relativistic corrections to the normal Navier-Stokes equations. These corrections are found to cause a delay in the stability breakout of the fluid as well as a small shift in the vortex shedding frequency. Finally, a relation between the Strouhal number, a dimensionless measure of the vortex shedding frequency, and the Reynolds number is provided under conditions of interest for future experiments. Based on the recently developed picture of an electronic ideal relativistic fluid at the Dirac point, we also present an analytical model for the conductivity of graphene that is able to describe the linear dependence on the carrier density and the existence of a minimum conductivity. The model treats impurities as submerged rigid obstacles, forming a disordered medium through which graphene electrons flow, in close analogy with hydrodynamics. To describe the minimum conductivity, we take into account the additional carrier density induced by the impurities in the sample. The model, which predicts the conductivity as a function of the impurity concentration, is validated by extensive simulations for different values of  $\mathcal{E}$ , the dimensionless strength of the electric field, and provides excellent agreement with experimental data. We also study the Klein paradox in the presence of randomly located impurities. In this case, we show several simulations using the quantum lattice Boltzmann, which solves the Dirac equation. A general expression for the loss of conductivity as a function of the impurity percentage is presented and successfully compared with the Kozeny-Carman law for disordered media in classical fluid dynamics.

Finally, as a first step to extend the relativistic lattice Boltzmann method to take into account gravity, we study classical fluids which are forced to move along non-straight trajectories (curved geodesics), leading to the upsurge of non-inertial forces. We develop a new lattice kinetic model, capable of handling fluid flow in arbitrarily curved manifolds and highly complex spaces, in a very compact and efficient way. We present a computational study of

the transport properties of campylotic (generally curved) media. It is found that the relation between the flow through a campylotic media, consisting of randomly located curvature perturbations, and the average Ricci scalar of the system, exhibits two distinct functional expressions, depending on whether the typical spatial extent of the curvature perturbation lies above or below the critical value maximizing the overall Ricci curvature. Furthermore, the flow through such systems as a function of the number of curvature perturbations, is found to present a sublinear behavior for large concentrations, due to the interference between curvature perturbations leading to an overall less curved space. We have also characterized the flux through such media as a function of the local Reynolds number and the scale of interaction between impurities.