

DISS. ETH NO. 29863

PREPARING TO LEARN LINEAR ALGEBRA – PROBLEM-SOLVING  
BEFORE INSTRUCTION IN UNIVERSITY MATHEMATICS

A thesis submitted to attain the degree of

DOCTOR OF SCIENCES

(Dr sc. ETH Zurich)

presented by

VERA REBECCA BAUMGARTNER

Master of Science ETH in Mathematik, ETH Zurich

born on 01.01.1994

accepted on the recommendation of

Professor Dr Manu Kapur

Professor Dr Norbert Hungerbühler

Professor Dr Katharina Loibl

Professor Dr Megan Wawro

2023

## Zusammenfassung

Das Aufgabenlösen vor der Instruktion (problem-solving before instruction; PS-I) hat sich für mehrere mathematische Konzepte in der Sekundarstufe als effektivere Unterrichtsform erwiesen als das traditionelle Instruieren–und–Üben. Insbesondere ist der Effekt umso größer, je mehr ein PS-I-Design den Prinzipien des produktiven Scheiterns (productive failure; PF) folgt. Die universitäre Mathematikausbildung birgt mehrere Hürden, die die Umsetzung dieser PF-Prinzipien erschweren, wie beispielsweise formalere Inhalte, wesentlich größere Klassen und eine starrere Kursstruktur als in der Sekundarstufe. In meiner Dissertation habe ich ein PS-I-Design in einem universitären Kurs für lineare Algebra für Studierende im Maschinenbauprogramm implementiert und dabei die PF-Prinzipien so genau wie möglich befolgt. Ich untersuchte die Auswirkungen des PS-I-Designs auf das Lernen der Studierenden in einem designbasierten Forschungsansatz über vier einjährige Iterationen. Im Vergleich zur Kontrollgruppe, die aus einem Aggregat von mehreren Kohorten vor der PS-I-Intervention bestand, konnte ich für alle vier PS-I-Kohorten einen signifikanten Anstieg der Abschlussprüfungsleistungen mit Effektstärken zwischen Cohens  $d = 0.27$  und  $d = 0.58$  feststellen. Diese Ergebnisse sind beachtlich, wenn man bedenkt, dass die Implementierung nur geringfügige Änderungen an der ursprünglichen Kursstruktur mit sich brachte und nur wenig zusätzlichen Aufwand von den Studierenden erforderte. In meiner Dissertation zeige ich eine Möglichkeit auf, PS-I an den Hochschulkontext und abstrakte mathematische Inhalte anzupassen und gleichzeitig die PF-Prinzipien unter universitären Bedingungen umzusetzen.

Außerdem habe ich die zugrunde liegenden Lernmechanismen untersucht, die den Effekt der PS-I-Intervention auf den Lernerfolg der Studierenden ermöglichen. Ich überprüfte, ob die in der bestehenden Literatur vorgeschlagenen Lernmechanismen den positiven Effekt erklären und ich versuchte, andere

Mechanismen zu identifizieren, die das Lernen durch Aufgabenlösen vor der Instruktion erleichtern könnten. Ich fand heraus, dass das Erkennen von relevanten Merkmalen (recognition of relevant features) die Leistung der Studierenden signifikant vorhersagte. Im Gegensatz zu früheren Untersuchungen stellte ich fest, dass die Wahrnehmung von Wissenslücken (knowledge gap awareness) das Lernen behindert hatte. Außerdem fanden sich einige Faktoren in den Lösungen der Schüler zu den vorbereitenden Aufgaben, die sich positiv auf das Lernen auswirkten und von den vorgeschlagenen Lernmechanismen nicht erfasst wurden. Meine Ergebnisse weiten die bisherige Forschung über die Bedeutung des Erkennens relevanter Merkmale für das Aufgabenlösen vor der Instruktion auf die universitäre Mathematikausbildung aus. Darüber hinaus implizieren meine Ergebnisse bezüglich der Wahrnehmung von Wissenslücken, dass weitere Forschung zu diesem Mechanismus nötig sind.

Der Transfer der linearen Algebra in die Ingenieurwissenschaften ist für Studierende der Ingenieurwissenschaften von zentraler Bedeutung und wohl auch der eigentliche Zweck einer linearen Algebra Vorlesung in einem Ingenieurstudiengang. Frühere Untersuchungen haben ergeben, dass der Transfer von der Mathematik in die Ingenieurwissenschaften suboptimal ist. Generell gibt es nur wenig Studien, die den Transfer von linearer Algebra in die Ingenieurwissenschaften untersuchen. In meiner Dissertation habe ich einen repräsentativen Transfertest entwickelt und die Transferleistung der Studierenden nach Abschluss eines einjährigen Kurses in linearer Algebra im Rahmen des PS-I-Designs untersucht. Dabei wollte ich den Transfer der Studierenden in die Ingenieurwissenschaften evaluieren und prüfen, inwieweit die Teilnahme an den vorbereitenden Übungen in linearer Algebra diesen Transfer erleichtert. Ich stellte fest, dass die allgemeine Transferleistung der Studierenden relativ gering war und beobachtete einen Testuntergrenzeneffekt beim Erkennen und Ausführen kritischer Transferpunkte durch die Studierenden. Die Prüfungsleistungen der Studierenden in linearer Algebra sagten jedoch ihre

Transferfähigkeiten signifikant voraus, und insbesondere das Erkennen relevanter Merkmale beim vorbereitenden Aufgabenlösen erleichterte den Transfer. Ich schlage vor, dass die Lehrkräfte beginnen, die Transferfähigkeiten der Studierenden zusammen mit dem Verständnis der linearen Algebra zu testen, um ihre Unterrichtsgestaltung zu prüfen und gegebenenfalls zu revidieren. Künftige Forschung sollte den Nutzen von linearen Algebra Vorlesungen speziell im Hinblick auf die Fähigkeit der Studierenden zum Transfer in die Ingenieurwissenschaften untersuchen.

## Summary

Problem-solving before instruction (PS-I) has been shown to be a more effective learning design than traditional tell-and-practice for several mathematical concepts at the secondary school level. In particular, the more a PS-I design follows the principles of productive failure (PF), the higher the effect. University mathematics education poses several inherent constraints that complicate the implementation of these PF principles, such as more formal content, significantly bigger classes, and a more rigid course structure. In my thesis, I implemented a PS-I design in a university linear algebra course for mechanical engineering students while adhering to the PF principles as closely as possible given the constraints. I investigated the effect of the PS-I design on students' learning in a design-based research approach over four one-year iterations. Compared to the baseline, which consisted of an aggregate of cohorts prior to the PS-I intervention, I observed a significant increase in final exam performance for all four PS-I cohorts with effect sizes between Cohen's  $d = 0.27$  and  $d = 0.58$ . These results are substantial, given that the implementation involved only minor changes to the original course structure and required little extra time for students. In my thesis, I propose one way of adapting PS-I for the higher education context and abstract mathematical content while implementing PF principles under university constraints.

Furthermore, I investigated the underlying learning mechanisms facilitating this effect. I tested whether the learning mechanisms proposed by existing literature explain the positive effect and I aimed to identify other mechanisms that might facilitate learning from problem-solving before instruction. I found that recognition of relevant features significantly predicted test performance. Contradictory to previous research, I found that knowledge gap awareness hindered learning. Moreover, some information in students' solutions to the preparatory exercises impacted learning and was not captured by the

proposed learning mechanisms. My findings extend existing research about the importance of the recognition of relevant features for problem-solving before instruction to university mathematics education. Moreover, my results concerning knowledge gap awareness call for more research into the proposed mechanism.

The transfer of linear algebra to engineering is central for engineering students and arguably the inherent purpose of a linear algebra course in an engineering program. Previous research has found transfer from mathematics to engineering to be suboptimal and studies investigating the transfer of linear algebra to engineering are rare. I developed a representative transfer test and assessed students' transfer performance after they had completed a one-year course in linear algebra within the PS-I design. Thereby, I aimed to investigate students' transfer to engineering and to examine to what extent participation in the preparatory exercises in linear algebra facilitated transfer. I found the general transfer performance of students to be relatively low and observed a floor effect in students' noticing and executing critical transfer points. However, students' exam performance in linear algebra significantly predicted their transfer abilities and specifically, the recognition of relevant features in preparatory problem-solving facilitated transfer. I propose that instructors begin to evaluate students' transfer abilities along with linear algebra learning to inform their instructional design. Future research should investigate the merit of linear algebra course designs specifically in light of students' ability to transfer to engineering.