



Doctoral Thesis

## **Hierarchical Gaussian filtering Construction and variational inversion of a generic Bayesian model of individual learning under uncertainty**

**Author(s):**

Mathys, Christoph D.

**Publication Date:**

2012

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-007595146> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH No. 20909

# **HIERARCHICAL GAUSSIAN FILTERING**

## **Construction and variational inversion of a generic Bayesian model of individual learning under uncertainty**

Thesis submitted for the degree of

DOCTOR OF SCIENCES

ETH ZÜRICH

by

**Christoph Daniel Mathys**

M.Sc., ETH Zurich (Dipl. Natw. ETH)

M.Sc., University of Zurich (lic. phil.)

of Erlenbach ZH, Zürich ZH, and Rohrbachgraben BE

accepted on the recommendation of

Prof. Klaas Prüssmann, Ph.D., examiner, ETH Zurich, Switzerland

Prof. Klaas Enno Stephan, M.D., Ph.D., co-examiner, ETH Zurich, Switzerland

Timothy E.J. Behrens, Ph.D., co-examiner, University of Oxford, England

2012

## Abstract

Computational learning models are critical for understanding mechanisms of adaptive behavior. However, the two major current frameworks, reinforcement learning (RL) and Bayesian learning, both have certain limitations. For example, many Bayesian models are agnostic of inter-individual variability and involve complicated integrals, making online learning difficult. Here, I introduce the hierarchical Gaussian Filter (HGF), a generic hierarchical Bayesian framework for individual learning under multiple forms of uncertainty (e.g., environmental volatility and sensory uncertainty). The HGF assumes Gaussian random walks of states, with the step size determined by the next higher level. The coupling between levels is controlled by parameters that shape the influence of uncertainty on learning in a subject-specific fashion. Using variational Bayes under a mean field approximation and a novel approximation to the posterior energy function, I derive trial-by-trial update equations which (i) are analytical and extremely efficient, enabling real-time learning, (ii) have a natural interpretation in terms of RL, and (iii) contain parameters representing processes which play a key role in current theories of learning, e.g., precision-weighting of prediction error. These parameters allow for the expression of individual differences in learning and may relate to specific neuromodulatory mechanisms in the brain. The HGF is very general: it can deal with both discrete and continuous states and equally accounts for deterministic and probabilistic relations between environmental events and perceptual states (i.e., situations with and without sensory uncertainty). These properties are illustrated by simulations and analyses of empirical time series from financial markets, behavioral experiments, and fMRI measurements. Overall, this framework provides a novel foundation for understanding normal and pathological learning that contextualizes RL within a generic Bayesian scheme and thus connects it to principles of optimality from probability theory.

---

## KURZFASSUNG

Mathematische Modelle der Informationsverarbeitung sind entscheidend für ein Verständnis der Mechanismen, die situationsbedingtem Verhalten zugrundeliegen. Die zwei gegenwärtig auf diesem Gebiet dominanten Herangehensweisen, Verstärkungslernen (reinforcement learning – RL) und Bayes'sches Lernen, haben jedoch beide gewisse Nachteile. Bayes'sche Modelle kennen zum Beispiel oft keine interindividuellen Unterschiede und erfordern den Umgang mit analytisch nicht lösbaren Integralen, was zeitgerechtes Lernen erschwert, wenn nicht verunmöglicht. In der vorliegenden Dissertation führe ich den hierarchischen Gauss'schen Filter (HGF) ein, ein generisches hierarchisches Bayes'sches Modell für individuell angepasstes Lernen unter verschiedenen Formen von Unsicherheit (zum Beispiel eine schnell wechselnde Umwelt oder sensorische Unsicherheit). Der HGF verfolgt den Ansatz, verborgene Zustände der Umwelt als eine Hierarchie von Gauss'schen Zufallsprozessen aufzufassen, wobei jeweils die nächsthöhere Ebene die Varianz der darunterliegenden bestimmt. Die Kopplung zwischen den Ebenen wird von Parametern gesteuert, die den Einfluss von Unsicherheit auf die Informationsverarbeitung auf eine individuell verschiedene Weise prägen. Unter Rückgriff auf Variationsrechnung und Molekularfeldtheorie sowie mit Hilfe einer neuartigen Näherung für die Energiefunktion im informationstheoretischen Sinne leite ich Aktualisierungsgleichungen her, die (i) von geschlossener Form und daher extrem effizient sind, wodurch sie zeitgerechtes Lernen erlauben, (ii) sich auf natürliche Weise im Rahmen von RL deuten lassen und die (iii) Parameter enthalten, die Prozesse abbilden, welche in aktuellen Lerntheorien eine Schlüsselrolle spielen, zum Beispiel die Präzisionsgewichtung von Voraussagefehlern. Diese Parameter erlauben die Ausprägung individueller Unterschiede im Lernverhalten und könnten mit neuromodulatorischen Mechanismen im Hirn in Beziehung stehen. Der HGF ist sehr allgemein: er kann sowohl diskrete wie auch stetige Zustände beschreiben, und er umfasst sowohl deterministische als auch stochastische Beziehungen zwischen Umweltereignissen und Wahrnehmungszuständen. Diese Eigenschaften erläutere ich anhand von Simulationen und Analysen empirischer

## **Kurzfassung**

---

Zeitreihen, die auf die Finanzmärkte zurückgehen, auf Verhaltensexperimente und auf funktionelle Magnetresonanzmessungen. Insgesamt bietet der Rahmen des HGF eine neuartige mathematische Grundlage für das Verständnis normalen und pathologischen Lernens; er stellt RL in den Zusammenhang eines generischen Bayes'schen Ansatzes und verbindet es so mit Optimalitätsgrundsätzen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie.