A fresh look at the complexity of pivoting in linear complementarity

Author(s):
Klaus, Lorenz

Publication Date:
2012

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-007604201

Diss. ETH No. 20764

A Fresh Look at the Complexity of Pivoting in Linear Complementarity

A dissertation submitted to
ETH ZURICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by

LORENZ KLAUS

MSc ETH in Computer Science
May 30, 1982
citizen of Uzwil SG

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Komei Fukuda
Prof. Dr. Emo Welzl
Dr. Bernd Gärtner

2012

Abstract

The linear complementarity problem (LCP) has a broad range of applications in various real-life optimization problems. It has its origin as a framework unifying linear, convex quadratic programs, and bimatrix game problems. Nowadays, many other problems arising in economic theory, geometry, and game theory are known to have formulations as LCPs. All the mentioned problems are of particular importance in mathematical optimization, and many researchers are seeking efficient solving methods.

Deciding whether a general LCP has a solution is NP-complete. Hence, research focuses on LCPs with special characteristics. Our main interest is in LCPs with P-matrices, for which many theoretical results suggest the existence of a polynomial-time algorithm. For instance, Megiddo proved that if the P-matrix LCP is NP-hard, then NP equals coNP. However, despite many promising results, no efficient algorithm is known. We consider simple principal pivoting methods. These are methods that are identified by a pivot rule and make decisions based on the combinatorial structure of the underlying problem instance. It makes perfect sense to employ abstract combinatorial models to study the LCP and principal pivoting methods. We make use of combinatorial settings such as oriented matroids and unique-sink orientations (USOs). This thesis is accordingly split into two parts.

In part I, we combinatorially generalize the LCP by formulating the oriented matroid complementarity problem (OMCP), whose definition is due to Todd. We then investigate P-matrices and their subclasses, such as (hidden) K-matrices, and define the combinatorial counterparts of oriented matroids, e.g., P-matroids.

We present alternative characterizations of K-matroids. This extends a theorem formulated by Fiedler and Pták on algebraic characterizations of K-matrices to the setting of oriented matroids. Our proof is elementary and simplifies the original proof substantially by exploiting oriented matroid duality. As an application, we show that any simple principal pivoting method applied to K-matroid OMCPs terminates very quickly, by a purely combinatorial argument.

Furthermore, we define the class of cyclic-P-matroids. The correspond-

ing algebraic counterparts, called cyclic-P-matrices, have many interesting properties. For instance, they are closed under principal pivot transforms and principal submatrices. The definition is such that it provides a construction scheme for P-matrices of arbitrary order. No other scheme to construct nontrivial P-matrices is currently known.

Part II discusses results related to USOs, which model the behavior of principal pivoting methods. We study several subclasses of P-matroid OMCPs, and investigate peculiarities that distinguish the corresponding USOs.

We reduce the oriented matroid programming (OMP) over combinatorial cubes to the hidden K-matroid OMCP. Through this result, the hidden K-matroid OMCP is at least as hard with respect to principal pivoting as the OMP over combinatorial cubes. This translates to a stronger variant in the algebraic setting. Namely, LP USOs and hidden K-matrix USOs are the same.

In a joint project with Foniok, Gärtner, and Sprecher, we determined the number of USOs arising from different classes of P-matrix LCPs. By the obtained bounds on the sizes of USO classes, we get a rough idea of the algorithmic complexity of principal pivoting methods. The intuition is that small classes are more likely to allow a polynomial-time pivoting strategy. We also compare the obtained class sizes with the sizes of USO classes that have purely combinatorial definitions.

In a joint project with our external collaborator Miyata, we enumerated the P-matroid USOs of the 4-cube by using oriented matroid generation techniques proposed by Finschi and Fukuda. Through the insight gained, we conclude that for an oriented matroid, being a P-matroid is more a matter of correctly labeled and oriented elements than a property of the underlying combinatorial structure.

Zusammenfassung

Das lineare Komplementaritätsproblem (LKP) hat eine grosse Brandbreite an Anwendungen in verschiedenen alltäglichen Optimierungsproblemen. Ursprünglich war es ein Werkzeug um lineare bzw. konvexe quadratische Programme und Bimatrix-Spiele in einer einheitlichen Form zu formulieren. Heutzutage sind viele andere Probleme aus den Wirtschaftswissenschaften und der Spieltheorie bekannt, die als LKPs formuliert werden können. Diese Probleme sind von bedeutender Wichtigkeit in der mathematischen Optimierung, und viele Wissenschaftler sind auf der Suche nach effizienten Lösungsmethoden.

Das Entscheidungsproblem ob ein beliebiges LKP eine Lösung besitzt ist NP-schwer. Deshalb befasst sich die Wissenschaft vornehmlich mit LKPs mit speziellen Eigenschaften. Wir widmen unser Interesse den LKPs mit P-Matrizen. Theoretische Resultate weisen darauf hin, dass diese in polynomieller Zeit gelöst werden können. Megiddo zum Beispiel hat bewiesen, dass wenn LKPs mit P-Matrizen NP-schwer sind, dann NP gleich coNP ist. Obwohl einige vielversprechende Resultate gewonnen wurden, ist kein effizienter Algorithmus bekannt. Wir befassen uns mit einfachen Pivot Methoden. Diese treffen Entscheidungen, welche auf den kombinatorischen Eigenschaften des zugrundeliegenden Problems basieren. Deshalb werden zur Analyse abstrakte, kombinatorische Modelle verwendet. Wir benutzen orientierte Matroide und unique-sink Orientierungen (USOs). Die vorliegende Arbeit ist entsprechend gegliedert.

In Teil I verallgemeinern wir das LKP indem wir das LKP für orientierte Matroide formulieren, welches auf Todd zurückgeht. Danach werden P-Matrizen und deren Unterklassen, wie zum Beispiel (versteckte) K-Matrizen, untersucht. Wir definieren kombinatorische Gegenstücke in Form von orientierten Matroiden, beispielsweise P-Matroide.

Wir stellen alternative Charakterisierungen für K-Matroide vor, welche auf ein algebraisches Theorem von Fiedler and Pták zurückzuführen sind. Unser kombinatorischer Beweis vereinfacht den ursprünglichen algebraischen Beweis indem das Konzept der Dualität verwendet wird. Ausserdem zeigen wir, dass einfache Pivot Methoden LKPs mit K-Matroiden in einer linearen Anzahl an Pivot Schritten lösen. Dazu verwenden wir ausschliess-

lich kombinatorische Argumente.

Schliesslich definieren wir eine neue Unterklasse von P-Matroiden. Wir bezeichnen die entsprechenden Matroide als zyklische-P-Matroide, bzw. die algebraischen Gegenstücke als zyklische-P-Matrizen. Diese haben einige interessante Eigenschaften. Die Klasse ist unter Pivot Transformationen und Hauptuntermatrizen abgeschlossen. Auch sind sie auf eine Art und Weise definiert, so dass es möglich ist P-Matrizen einer beliebigen Ordnung zu konstruieren. Bisher gibt es dazu nur wenige Möglichkeiten.

In Teil II werden Resultate in Bezug auf USOs besprochen. USOs modellieren das Verhalten von Pivot Methoden auf LKPs mit P-Matroiden. Wir studieren die verschiedenen Klassen an LKPs, und untersuchen die dazugehörenden USOs auf ihre Struktur.

Wir reduzieren eine kombinatorische Verallgemeinerung von linearen Programmen über Würfel auf LKPs mit hidden K-Matroiden. Daraus folgt, dass LKPs mit hidden K-Matroiden in Bezug auf Pivot Methoden mindestens so schwer zu lösen sind wie lineare Programme über Würfel. Dieses Resultat lässt sich in ein algebraisches Resultat überführen. Nämlich, lineare Programme über Würfel und LKPs mit hidden K-Matrizen sind dasselbe.

In einem gemeinsamen Projekt mit Foniok, Gärtner und Sprecher haben wir die Anzahl an USOs bestimmt die durch die verschiedenen Unterklassen von LKPs mit P-Matrizen in Erscheinung treten. Dadurch ist es uns möglich abzuschätzen welche Klassen in polynomieller Zeit lösbar sind. Intuitiv sind kleinere Klassen stärker strukturiert. Desweiteren werden die erhaltenen Klassengrössen mit Grössen von USO Klassen verglichen, welche eine rein kombinatorische Definition besitzen.

In einem Projekt mit unserem externen Kollegen Miyata haben wir alle 4-dimensionalen USOs aufgelistet, die durch LKPs mit P-matrizen in Erscheinung treten. Dazu werden Techniken zur Konstruktion von orientierten Matroiden verwendet, welche von Finschi und Fukuda ausgearbeitet wurden. Wir machen eine interessante Beobachtung. Jeder uniforme Rang 4 orientierte Matroid mit 8 Elementen kann durch Umordnen und Umorientierung der Elemente in ein P-Matroid überführt werden.