Zum Problem der Damen auf dem Torus

Author(s):
Schlude, Konrad; Specker, Ernst P.

Publication Date:
2003

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-006666110

Zum Problem der Damen auf dem Torus

Konrad Schlude und Ernst Specker

ETH Zürich

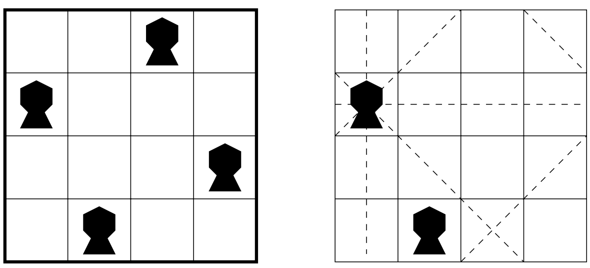
Zusammenfassung

G. Pólya zeigte 1918, dass genau dann n Damen auf dem Schachtorus der Grösse $n \times n$ aufgestellt werden können, wenn n zu 6 teilerfremd ist. Die Beweismethode geht auf L. Euler und A. Hurwitz zurück. In dieser Arbeit modifizieren wir diese Methode und untersuchen damit die Frage, wann $n-1$ Damen aufgestellt werden können.

1 Einleitung

Das 8–Damen–Problem hat eine lange Geschichte [2] und ist ein beliebtes Objekt, um Backtracking-Algorithmen zu illustrieren. Dabei geht es um die Frage, wie 8 Damen auf ein Schachbrett gestellt werden können, so dass sich keine zwei Damen gegenseitig bedrohen. Diese Frage kann verallgemeinert werden: Für welche Zahl n können auf einem Brett der Grösse $n \times n$, n sich nicht gegenseitig bedrohende Damen aufgestellt werden? Man prüft leicht nach, dass es für $n \in \{2, 3\}$ nicht geht; man kann zeigen, dass es für alle andere Zahlen jedoch geht [1].

Dies ändert sich, wenn das Schachbrett durch Identifikation von gegenüberliegenden Rändern zu einem Schachtorus verklebt wird. Durch den Wegfall der Ränder werden die Wirkungsfelder der Damen vergrössert, da jede Dame zwei Diagonalen bedroht. Daher gibt es mehr Fälle, in denen weniger als n Damen plaziert werden können. Abbildung 1 zeigt die Auswirkungen am Beispiel $n = 4$. Während auf dem Schachbrett 4 Damen aufgestellt werden können,



(a) (b)

Abbildung 1: Das Damenproblem auf einem Schachbrett (a) und einem Schachtorus (b) der Grösse 4×4.

bedroht schon die erste Damen auf dem Schachtorus beinahe alle restlichen Felder (gestrichelte Linien), so dass nur noch eine weitere Dame aufgestellt werden kann, die die bisher noch nicht bedrohten Felder abdeckt. Ein wesentlicher Unterschied ist nun, dass auf dem Torus jedes Feld gleich gewichtet ist. Zur Abkürzung schreiben wir n–Torus für einen (Schach–)Torus der Grösse $n \times n$.

Mittels Computersimulation kann man die Tabelle 1 bestimmen. Für manche n können auf dem n–Torus n Damen plaziert werden, für andere jedoch nur $(n-1)$ oder $(n-2)$. Schon 1918 zeigte G. Pólya [4], dass genau dann n Damen

Grösse	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Anzahl Damen	1	1	1	2	5	4	7	6	7	9	11	10	13	13

Tabelle 1: Maximale Anzahl von Damen auf dem n–Torus.

aufgestellt werden können, wenn n weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist, d.h., n ist zu 6 teilerfremd. Pólya führt seine Beweismethode auf L. Euler [3] und auf A. Hurwitz zurück. In dieser Arbeit wollen wir die Methode weiterentwickeln, um die Frage zu beantworten, wann $n-1$ Damen aufgestellt werden können.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Im nachfolgenden Kapitel 2 präsentieren wir das Ergebnis von Pólya. Kapitel 3 modifiziert die Beweismethode und untersucht die Frage, wann $n-1$ Damen plaziert werden können. In Kapitel 4 wird hingegen gezeigt, dass die Methode nicht alle Fälle erkennen kann, sie in einem gewissen Sinn unvollständig ist.

Nachfolgend benutzen wir die folgende Notation. Mit $a \equiv_n b$ bezeichnen wir $a \equiv b \mod n$. Wir sagen, dass man eine Anzahl Damen *plazieren* kann, wenn die Damen so aufgestellt werden können, dass sie sich nicht bedrohen.

2 Die Methode von Euler, Hurwitz und Pólya

Auf einem $n * n$–Schachbrett sind n Damen so aufzustellen, dass in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder verallgemeinerter Diagonale genau eine Dame steht. (Oder auch: Dass auf keiner dieser Reihen 2 Damen stehen)

Die Felder des Schachrettes seien kodiert durch i, j (mit $0 \leq i, j \leq n-1$). Eine zulässige Stellung bestimmt dann eine Permutation p von $(0, ..., n-1)$ – womit Zeilen- und Spaltenbedingungen erfüllt sind. Steht eine Dame auf Feld $(i, p(i))$, so bedroht sie auch die Felder $(i+k, p(i)+k)$ und $(i+k, p(i)-k)$ (jeweils $\mod n$ gerechnet). Für $j \neq i$ folgt daraus, dass

$$j - i \not\equiv_n p(j) - p(i) \quad \text{und} \quad j - i \not\equiv_n p(i) - p(j)$$

Umformuliert ergibt das für $j \neq i$

$$p(i) - i \not\equiv_n p(j) - j \quad \text{und} \quad p(j) + j \not\equiv_n p(i) + i$$

Dies bedeutet, dass $p - id \mod n$ und $p + id \mod n$ Permutationen sind (mit id bezeichnen wir die Identität).

Die Frage, ob n Damen auf einem n–Torus plaziert werden können, ist somit äquivalent dem folgenden Problem: Für welche n gibt es eine Permutation

$p : (0, ..., n-1) \to (0, ..., n-1)$, so dass $p + id$ und $p - id$ Permutationen sind? Die Frage nach der Existenz wird entschieden, indem die Doppeldeutigkeiten der Abbildungen $p + id$ und $p - id$ als Permutationen und als Summe von zwei Permutationen ausgenutzt werden.

Theorem 1 (Pólya) *Es gibt solche Abbildungen genau dann, wenn n und 6 teilerfremd sind.*

Beweis: (1) Zunächst zeigen wir, dass n Damen aufgestellt werden können. Sind n und 6 teilerfremd, so sind auch 1, 2, 3 und n je teilerfremd. p sei die Abbildung, welche i ($i = 0, ...n-1$) abbildet in $2 * i \bmod n$. Es sind dann die Abbildungen p, $p + id$, $p - id$ Abbildungen, welche i abbilden in $k * i$ ($k = 2, 3, 1$); solche Abbildungen sind Permutationen. Abbildung 2 zeigt ein Beispiel für $n = 5$.

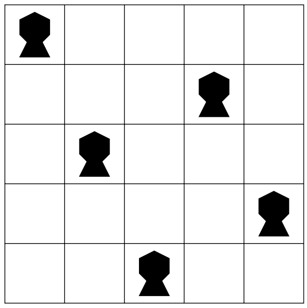


Abbildung 2: Plazierung der Damen für $n = 5$.

(2) Gibt es eine Permutation p von $(0, \ldots, n-1)$ in sich, so dass $p + id$ eine Permutation ist, so ist n ungerade.
Beweis (Euler): Wir betrachten $p + id$ als Permutation. Dann erhalten wir

$$\sum_{i=0}^{n-1} (p(i) + i) \equiv_n \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Betrachten wir $p + id$ hingegen als Summe von zwei Permutationen, so folgt

$$\sum_{i=0}^{n-1} (p(i) + i) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} i = n(n-1)$$

Daraus folgt die Bedingung, dass $\frac{n(n-1)}{2} \equiv_n 0$ gelten muss. Ist n gerade, so gilt jedoch $\frac{n(n-1)}{2} \equiv_n \frac{n}{2}$

(3) Gibt es eine Permutation p von $(0, ..., n-1)$ in sich, so dass $p + id$ und $p - id$ Permutationen sind, so ist n nicht durch 3 teilbar.
Beweis (Hurwitz): Analog zu Teil (2) betrachten wir $p + id$ und $p - id$ als Permutation und als Summe von zwei Permutationen.

$$\sum_{i=0}^{n-1} (p(i) + i)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} (p(i) - i)^2 \quad \equiv_n \quad 2 \sum_{i=0}^{n-1} i^2$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(p(i)+i)^2+\sum_{i=0}^{n-1}(p(i)-i)^2 \quad = \quad \sum_{i=0}^{n-1}2p(i)^2+2i^2=4\sum_{i=0}^{n-1}i^2$$

Dies führt zur Bedingung

$$0 \equiv_n 2\sum_{i=0}^{n-1}i^2$$

Weil für die Summe der Quadrate

$$\sum_{i=0}^{n-1}i^2=\frac{n(2n^2-3n+1)}{6}$$

gilt, muss daraus folgen:

$$0 \equiv_n \frac{n}{3}(2n^2-3n+1)$$

Ist n durch 3 teilbar, so ist der Ausdruck $(2n^2-3n+1)$ nicht durch 3 teilbar; damit ist die Bedingung nicht erfüllbar. □

3 Plazierung von $n-1$ Damen

In diesem Kapitel untersuchen wir die Frage, wann $n-1$ Damen plaziert werden können. Zunächst zeigen wir, dass es in bestimmten Fällen möglich ist.

Theorem 2 *Sei n gerade, aber weder durch 3 noch durch 4 teilbar. Dann können $n-1$ Damen plaziert werden.*

Beweis: Wir beweisen die Behauptung, indem wir eine Plazierungsfunktion p angeben, mit der $n-1$ Damen plaziert werden. Als Plazierungsfunktion wählen wir die folgende Funktion:

$$p(i) := \begin{cases} 3i \bmod n & \text{wenn } 0 \leq i < \frac{n}{2} \\ 3i+3 \bmod n & \text{wenn } \frac{n}{2} \leq i < n-1 \end{cases}$$

Die Dame i hat die Koordinaten $(i, p(i))$. Wir haben zu zeigen, dass für $i \neq j$ die folgenden Ungleichungen gelten:

- $p(j)-p(i) \not\equiv_n 0$
- $p(j)+j-p(i)-i \not\equiv_n 0$
- $p(j)-j-p(i)+i \not\equiv_n 0$

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $i < j$ gilt. Wir betrachten die folgenden Fälle.

Fall 1: Sei $0 \leq i < j < \frac{n}{2}$. Für die Differenz ergibt sich $j-i \in \{1, \ldots, \frac{n}{2}-1\}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 3j-3i &= 3(j-i) \not\equiv_n 0 \text{ da } 3 \not| n \\ 4j-4i &= 4(j-i) \not\equiv_n 0 \text{ da } 4 \not| n \\ 2j-2i &= 2(j-i) \not\equiv_n 0 \text{ da } (j-i) < \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Fall 2: Sei $0 \le i < \frac{n}{2} \le j < n-1$. Somit gilt $j - i \in \{1, \ldots, n-2\}$.

$$\begin{aligned}
3j + 3 - 3i &= 3\underbrace{(j-i+1)}_{\in\{2,\ldots,n-1\}} \not\equiv_n 0 \text{ da } 3 \not| n \\
4j + 3 - 4i &= \underbrace{4(j-i+1)-1}_{\text{ungerade}} \not\equiv_n 0 \text{ da } n \text{ gerade} \\
2j + 3 - 2i &= \underbrace{2(j-i+1)-1}_{\text{ungerade}} \not\equiv_n 0 \text{ da } n \text{ gerade}
\end{aligned}$$

Die dritte Fallmöglichkeit $\frac{n}{2} \le i < j < n-1$ ist analog zu Fall 1. □

Nun untersuchen wir die Frage, ob die Plazierung von $n-1$ Damen auch in anderen Fällen gelingt. Das folgende Theorem gibt eine erste Antwort.

Theorem 3 *Ist n durch 3 teilbar, so können keine $n-1$ Damen plaziert werden.*

Beweis: Gegeben sei ein n–Torus, auf dem $n-1$ sich gegenseitig nicht bedrohende Damen plaziert sind. O.E. kann angenommen werden, dass in Zeile 0 und Spalte 0 keine Dame steht. Für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ habe die Dame i die Position $(i, p(i))$, wobei $p : \{1, \ldots, n-1\} \to \{1, \ldots, n-1\}$ eine Permutation ist.

Die Funktionen $p + id, p - id : \{1, \ldots, n-1\} \to \{0, \ldots, n-1\}$ sind injektive Abbildungen und nehmen jeweils einen Wert nicht an. Sei p^+ der Wert, den $p + id$ nicht annimmt; sei p^- der Wert, den $p - id$ nicht annimmt. Nachfolgend unterscheiden wir 2 Fälle.
Fall 1: n ist ungerade. Wegen der Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &\equiv_n n(n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} p(i) + i \equiv_n n\frac{n-1}{2} - p^+ \equiv_n -p^+ \\
0 &= \sum_{i=1}^{n-1} p(i) - i \equiv_n n\frac{n-1}{2} - p^- \equiv_n -p^-
\end{aligned}$$

folgt $p^+ = p^- = 0$. Analog zu Theorem 1 führt das zur Bedingung $0 \equiv_n 2\frac{n}{3}(2n^2 - 3n + 1)$. Ist n durch 3 teilbar, so kann diese Bedingung nicht erfüllt werden. Somit ist es unmöglich, $n-1$ Damen zu plazieren, wenn $3|n$ und n ungerade ist.
Fall 2: n ist gerade. Die Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &\equiv_n n(n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} p(i) + i \equiv_n \frac{n}{2}(n-1) - p^+ \\
0 &= \sum_{i=1}^{n-1} p(i) - i \equiv_n \frac{n}{2}(n-1) - p^-
\end{aligned}$$

führen zu $p^+ = p^- = \frac{n}{2}$. Die Betrachtung der Summe der Quadrate liefert nun

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} (p(i) + i)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (p(i) - i)^2 &\equiv_n 2\sum_{i=1}^{n-1} i^2 - 2\frac{n^2}{2^2} \\
\sum_{i=1}^{n-1} (p(i) + i)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (p(i) - i)^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} 2p(i)^2 + 2i^2 = 4\sum_{i=1}^{n-1} i^2
\end{aligned}$$

Dies führt weiter zur Bedingung $0 \equiv_n 2\frac{n}{6}(2n^2-3n+1)+\frac{n^2}{2} = \frac{n}{6}(4n^2-3n+2)$. Nach Voraussetzung ist n gerade; falls $3|n$, dann auch $6|n$. Für $6|n$ gilt jedoch $4n^2-3n+2 \equiv_n 2 \bmod 6$, und die Bedingung ist nicht erfüllbar. Wenn n gerade ist und $3|n$, dann können nicht $n-1$ Damen plaziert werden. $\square$

Nachfolgend wird die Zahl n als gerade angenommen. Zur Erinnerung, die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n}{2}\left(\frac{2n^2-3n+1}{3}\right)$$

Für n gerade, ist der Term $2n^2-3n+1$ ungerade; ist n ferner nicht durch 3 teilbar, so ist $2n^2-3n+1$ durch 3 teilbar (Beweis über vollständige Induktion, Verankerung mit $n=2,4$, Induktionsschritt $n \mapsto n+6$). Somit gilt

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 \equiv_n \frac{n}{2} \qquad \text{für } 2|n, 3 \not| n$$

Für die Summe der 3er–Potenzen gilt

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^3 = \frac{n^2}{4}\left(n^2-2n+1\right)$$

Wieder gilt, dass der Term n^2-2n+1 ungerade ist, folglich

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^3 \equiv_n \frac{n^2}{4} \equiv_n \begin{cases} 0 \text{ wenn } 4|n \\ \frac{n}{2} \text{ wenn } 4 \not| n \end{cases}$$

Theorem 4 *Ist n durch 4 aber nicht durch 8 teilbar, so können keine $n-1$ Damen plaziert werden.*

Beweis: Sei n durch 4 teilbar. Nach Theorem 3 gilt die Aussage, wenn n durch 3 teilbar ist. Daher muss die Aussage nur für nicht durch 3 teilbare n gezeigt werden. Sei n eine Zahl, so dass auf dem n–Torus $n-1$ Damen plaziert werden können. Wieder gehen wir davon aus, dass in der ersten Spalte und in der ersten Zeile keine Dame steht. Folglich gibt es eine Permutation $p : \{1,\ldots,n-1\} \to \{1,\ldots,n-1\}$ mit der Eigenschaft dass $p+id, p-id : \{1,\ldots,n-1\} \to \{0,\ldots,n-1\} \setminus \{n/2\}$ bijektive Abbildungen sind. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}(p(i)-i)^3 &\equiv_n \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} i^3}_{\equiv_n 0} - \underbrace{\left(\frac{n}{2}\right)^3}_{\equiv_n 0} \equiv_n 0 \\
\sum_{i=1}^{n-1}(p(i)-i)^3 &= \sum_{i=1}^{n-1} p(i)^3 - 3p(i)^2 i + 3p(i)i^2 - i^3 \equiv_n 3\sum_{i=1}^{n-1} p(i)i^2 - p(i)^2 i
\end{aligned}$$

Da n nicht durch 3 teilbar ist, folgt daraus

$$0 \equiv_n \sum_{i=1}^{n-1} p(i)i^2 - p(i)^2 i$$

Analog erhält man für $p + id$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}(p(i)+i)^3 &\equiv_n \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} i^3}_{\equiv_n 0} - \underbrace{\left(\frac{n}{2}\right)^3}_{\equiv_n 0} \equiv_n 0 \\
\sum_{i=1}^{n-1}(p(i)+i)^3 &= \sum_{i=1}^{n-1} p(i)^3 + 3p(i)^2 i + 3p(i) i^2 + i^3 \equiv_n 3\sum_{i=1}^{n-1} p(i)i^2 + p(i)^2 i
\end{aligned}$$

Da n nicht durch 3 teilbar ist, erhalten wir aus diesem und dem vorigen Resultat das folgende:

$$\sum_{i=1}^{n-1} p(i)^2 i \equiv_n \begin{cases} 0 & \text{oder} \\ \frac{n}{2} \end{cases}$$

In beiden Fällen ist die Summe gerade. Für jeden einzelnen Summanden $p(i)^2 i$ gilt, dass $p(i)^2 i$ genau dann gerade ist, wenn $p(i)i$ gerade ist. Daher muss auch die Summe

$$\sum_{i=1}^{n-1} p(i)i$$

gerade sein. Betrachten wir nun nochmals die Summe der Quadrate.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}(p(i)+i)^2 &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} i^2}_{\equiv_n \frac{n}{2}} - \underbrace{\left(\frac{n}{2}\right)^2}_{\equiv_n 0} \equiv_n \frac{n}{2} \\
\sum_{i=1}^{n-1}(p(i)+i)^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} 2i^2 + 2p(i)i \equiv_n 2\sum_{i=1}^{n-1} p(i)i
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n-1} p(i)i \equiv_n \begin{cases} \frac{n}{4} & \text{oder} \\ \frac{3}{4}n \end{cases}$$

Ist n durch 4 aber nicht durch 8 teilbar, so ist $\frac{n}{4}$ ungerade. Folglich können in diesem Fall keine $n-1$ Damen plaziert werden.

□

4 Grenzen der Methode

Für die vorigen Resultate wurden Summen von Potenzen betrachtet. Um die Resultate im Fall $3|n$ zu zeigen, verwendeten wir Summen von Quadratzahlen, für den Beweis von Theorem 4 waren es Summen von Kubikzahlen. Gerade der letzte Fall geschah nicht zufällig. Betrachten wir zur Erläuterung die Permutation p in Tabelle 2. Die Funktion $p + id$ erfüllt die Bedingung, $p - id$ jedoch nicht. Erst bei der dritten Potenz zeigt sich der Unterschied in der Summe, weshalb im Beweis von Theorem 4 die dritte Potenz verwendet werden musste. Auf der anderen Seite konnte damit nicht gezeigt werden, dass im Fall $n = 8$

i	1	2	3	
p	3	1	2	Σ
$p + id$	0	3	1	0
$p - id$	2	3	3	0
$(p + id)^2$	0	1	1	2
$(p - id)^2$	0	1	1	2
$(p + id)^3$	0	3	1	0
$(p - id)^3$	0	3	3	2

Tabelle 2: Permutation für $n = 4$.

i	1	2	3	4	5	6	7
p	6	7	2	4	1	5	3
$p + id$	7	1	5	0	6	3	2
$p - id$	5	5	7	0	4	7	4

Tabelle 3: Permutation für $n = 8$.

maximal 6 Damen plaziert werden können. Auch das ist kein Zufall, wie das Beispiel in Tabelle 3 zeigt: Wieder gilt, dass $p + id$ die gewünschte Bedingung erfüllt, $p - id$ jedoch nicht. Auf der anderen Seite gilt jedoch

$$\sum_{i=1}^{n-1} (p(i) - i)^k \equiv_n \sum_{i=1}^{n-1} (p(i) + i)^k \quad \text{für alle } k \geq 1$$

Dies zeigt, dass die Methode in diesem Fall nicht angewendet werden kann; die Grenzen dieser Methode sind anscheinend erreicht.

5 Zusammenfassung

Mittels der Methode von Euler, Hurwitz und Pólya erhält man einen eleganten Beweis dafür, dass genau dann n Damen auf dem n–Torus plaziert werden können, wenn n zu 6 teilerfremd ist. Wir haben in dieser Arbeit gezeigt, dass eine erweiterte Methode auch auf die Frage angewandt werden kann, ob $n - 1$ Damen auf dem n–Torus plaziert werden können. In diesem Fall, sind die Funktionen $p + id$ und $p - id$ zwar nicht unbedingt Permutationen, aber sie besitzen eine ähnliche Struktur, die im Beweis ausgenutzt wurde.

Es wurde ferner gezeigt, dass die Methode in einem gewissen Sinn unvollständig ist: Im Fall $n = 8$ kann die Methode nicht erkennen, dass keine 7 Damen plaziert werden können.

Eine offene Frage ist, ob immer $n - 2$ Damen plaziert werden können.

Literatur

[1] W. Ahrens: *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Teubner, Leipzig, 1918

[2] P.J. Campbell: *Gauss and the Eight Queens Problem, A Study in Miniature of the Propagation*, Historia Mathematica, 4:397–404, 1977

[3] L. Euler: *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques*, Commentationes algebraicae ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes, Opera Omnia I.7, 291–392, 1923

[4] G. Pólya: *Über die 'Doppelt–Periodischen' Lösungen des n–Damen–Problems*, in [1], 364–374, nachgedruckt in Pólya: *Collected works*, vol V, 237–247