Weak bundle structures and a variational approach to Yang-Mills Lagrangians in supercritical dimensions

Author(s):
Petrache, Mircea

Publication Date:
2013

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-009921921 →

Diss. ETH No. 21175

Weak bundle structures and a variational approach to Yang-Mills Lagrangians in supercritical dimensions

A dissertation submitted to the
ETH ZURICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by
MIRCEA PETRACHE
M.Sc. Università di Pisa
and Scuola Normale Superiore di Pisa
born February 2, 1985
citizen of Italy

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. T. Rivière, examiner
Prof. Dr. R. Hardt, co-examiner
Prof. Dr. C. De Lellis, co-examiner

2013

Abstract

In this thesis we study the Yang-Mills energy of connections over singular G-bundles in dimensions higher than the celebrated dimension four. This functional has a very large invariance group, analogously to the classical parametric Plateau problem. The main goal of the thesis is to give a functional analytic framework in which the Yang-Mills functional becomes coercive and in which the Yang-Mills Plateau problem can be solved.

In the supercritical dimension 5 the tools introduced by K. Uhlenbeck to ensure coercivity do not work anymore and the control of minimizers must be done in suitable spaces of "singular bundles".

We consider a space of weak connections on singular bundles $\mathcal{A}_G$, defined by requiring that on codimension-1 slices along spheres the connection forms can be identified with $W^{1,2}$ connections. By a new approximation result we characterize this space as the closure of the space $\mathcal{R}^\infty$ consisting of locally smooth connections on bundles with finitely many topological defects. We then prove the sequential weak closure result which ensures the existence of local minimizers of the Yang-Mills energy in dimension 5. This implies that the space $\mathcal{A}_G$ is the correct setting for the variational study of the Yang-Mills Plateau problem in dimension 5. Our methods are related to the proofs of the closure of rectifiable currents by slicing methods and of the closure theorem for rectifiable scans.

For the case of abelian connections, i.e. when the structure group is $U(1)$, we prove the sequential weak closure of the class of weak curvatures $\mathcal{F}^p_{\mathbb{Z}}$ defined by requiring a non-local integrality condition on slices in 3 dimensions. In an equivalent formulation, we are required to prove the sequential weak-L^p closure for L^p-vector fields in $\mathbb{R}^3$ such that their fluxes through "almost all" spheres are integers.

In the case of weak $U(1)$-curvatures we provide a definiton of boundary trace which is preserved under sequential weak convergence. We then prove the optimal interior regularity of minimizers of the Yang-Mills Plateau problem, i.e. we obtain that they are Hölder outside a set of isolated points. Our proof is essentially new, since for the main step we utilize a combinatorial method based of Smirnov's decomposition of 1-currents, instead of the classical energy estimates.

Finally, we provide an optimal new result concerning the existence of energy-controlled global gauges for $SU(2)$-bundles in dimension 4. Uhlenbeck's coercivity estimate cited above states that under a smallness condition on the L^2-energy of the curvature, a gauge is found in which the connection's $W^{1,2}$ norm is controlled by such energy. Therefore this result can be applied locally and determines the locations of "bubbling sets" for G-bundles. We provide here an optimal analogue in the case where no bound on the curvature is assumed. In this case we find a global gauge in which we can bound the $L^{4,\infty}$-norm of the connection form in terms of the energy of the curvature. Such global controlled gauges exists even in the case of "bubbling", while Uhlenbeck's gauges exist just locally outside the bubbling points.

The existence of controlled global gauges is based on a new controlled extension result for maps $u \in W^{1,3}(\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^3)$. For such a map we construct an extension to $\tilde{u} : B^4 \to \mathbb{S}^3$ with a norm control on $\tilde{u}$ in the (optimal) Lorentz-Sobolev space $W^{1,(4,\infty)}(B^4, \mathbb{S}^3)$ in terms of the $W^{1,3}$ norm of u. We also prove analogous optimal controlled extension results for the cases of $\mathbb{S}^1$ and $\mathbb{S}^2$.

We include several appendices in which we review some related topics, giving links between the main topics of this thesis and other fields of research.

Riassunto

Questa tesi verte sullo studio del funzionale di Yang-Mills su fibrati singolari in dimensione maggiore di 4. Tale funzionale ha un gruppo di invarianza molto vasto, e ciò crea un interessante parallelo con il problema di Plateau parametrico. Lo scopo principale di questa tesi è quello di stabilire un quadro generale in cui la minimizzazione analoga al problema di Plateau per il funzionale di Yang-Mills possa essere affrontato utilizzando il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni.

Ci concentreremo sulla dimensione 5, nella quale gli strumenti introdotti da K. Uhlenbeck per assicurare la coercività del funzionale di Yang-Mills cessano di essere applicabili, costringendoci in particolare a lavorare in classi di "fibrati singolari" nuovi rispetto alla teoria in dimensione inferiore.

Utilizzeremo lo spazio $\mathcal{A}_G$, definito richiedendo che lungo le slice di codimensione 1 le nostre forme di connessione siano gauge-equivalenti a connessioni $W^{1,2}$ nel senso di Uhlenbeck. Dimostreremo quindi un nuovo teorema di approssimazione che ci consente di identificare lo spazio sopra definito con la chiusura, rispetto un'opportuna distanza legata alla topologia forte L^2, dello spazio $\mathcal{R}^\infty$ costituito da connessioni localmente lisce su fibrati aventi un numero finito di difetti topologici. Inoltre dimostrando la chiusura per convergenza debole dello spazio $\mathcal{A}_G$. Conseguentemente il funzionale di Yang-Mills raggiunge il suo minimo nello spazio $\mathcal{A}_G$, dimostrando la buona positura del problema di Plateau per il funzionale di Yang-Mills in dimensione 5. I metodi della nostra dimostrazione sono collegati a quelli per la dimostrazione per slicing della chiusura flat delle correnti rettificabili e a quelli per la dimostrazione della chiusura dello spazio degli scan rettificabili.

Nel caso di curvature abeliane, ossia quello in cui il gruppo di gauge è $U(1)$, dimostreremo in dimensione 3 la chiusura debole sequenziale di uno spazio $\mathcal{F}^p_{\mathbb{Z}}$ di curvature definite richiedendo che sia verificata una condizione non locale di interezza sulle slices. In una formulazione equivalente, il nostro risultato dimostra la chiusura per convergenza debole in L^p della classe composta dai campi vettoriali L^p su $\mathbb{R}^3$ il cui flusso attraverso "quasi ogni" sfera è un intero.

Nel caso abeliano su descritto, definiremo una nozione di traccia sul bordo, tale da essere preservata per convergenza debole. Inoltre dimostreremo il risultato di regolarità ottimale, valido i minimi del problema di Plateau relativo al funzionale di Yang-Mills: i minimi sono localmente Hölderiani al di fuori di un insieme di punti singolari isolati. La dimostrazione di questo risultato è essenzialmente nuova, in quanto nel passo principale utilizziamo un metodo combinatorio basato sulla decomposizione di Smirnov per 1-correnti normali, invece dei metodi classici.

Infine, dimostreremo un nuovo risultato concernente l'esitenza di gauge controllate e globali per fibrati con gruppo di gauge $SU(2)$ in dimensione 4. Ricordiamo che il risultato di coercività di Uhlenbeck garantisce l'esistenza di gauge in cui si può maggiorare la norma $W^{1,2}$ della connessione in funzione della norma L^2 della curvatura, sotto l'ipotesi però che quest'ultima norma non superi un certo valore. Dunque questo risultato definisce degli insiemi di "bubbling" topologico per fibrati. Qui dimostreremo invece l'esistenza di una gauge globale, in cui la connessione è maggiorata in norma $L^{4,\infty}$ in funzione della norma L^2 della curvatura senza ipotesi di piccolezza. Tali gauge sono chiamate "globali" in quanto, anche quando avviene il fenomeno di "bubbling", esse continuano a esistere globalmente e non soltanto localmente fuori dai punti di bubbling come le gauge di Uhlenbeck.

Il teorema di esistenza di gauge globali controllate è basato su un nuovo risultato ottimale di estensione per mappe di Sobolev $u \in W^{1,3}(\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^3)$. Per tali funzioni costruiremo estensioni $\tilde{u} : B^4 \to \mathbb{S}^3$ maggiorate in norma $W^{1,(4,\infty)}$ in funzione della norma $W^{1,3}$ di u. Questo risultato è ottimale. Dimostreremo risultati analoghi anche per spazi di mappe di Sobolev fra sfere di dimensioni inferiori.

In alcune appendici descriveremo argomenti collegati, cercando di stabilire legami con altri ambiti.