Aspects of games on random graphs

Doctoral Thesis

Author(s):
Thomas, Henning

Publication date:
2013

Permanent link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-009921594

Diss. ETH No. 21089

Aspects of Games on Random Graphs

A dissertation submitted to
ETH Zurich

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by
Henning Thomas
Master of Science ETH in Computer Science
born 02.06.1985
citizen of Germany

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Angelika Steger, examiner
Prof. Dr. Benjamin Doerr, co-examiner

2013

Abstract

In this thesis we deal with games in the intersection of extremal combinatorics and random graph theory which gained a lot of attention over the past decades. Consider the following one-player game. Starting with an empty graph on n vertices the player, called *Painter*, is consecutively presented random edges which are inserted into the graph and which she needs to color immediately with one of r avilable colors. Her goal is to avoid a certain graph property, e.g. containing a monochromatic triangle, for as long as possible. How long can she typically survive in this game? And how does an optimal strategy for her look like? These so-called *online Ramsey games* were first studied by Friedgut, Kohayakawa, Rödl, Ruciński and Tetali in 2003 and a large body of research considering plenty of goals for Painter and plenty of variations of the game has been developed.

A particularly popular variant is given by the so-called *Achlioptas processes* named after Dimitris Achlioptas. Here, the player, called *Chooser*, is presented random pairs of possible edges, from each of which she needs to choose one to be inserted into the graph while the other is put back into the pool of non-edges. These processes were originally studied regarding the question if one can accelerate or delay the appearance of a linear-sized component, a so-called *giant component*, in comparison to the classical random graph process by Erdős and Rényi, which simply inserts a random edge in every step without any choices to be made. The appearance of the giant component is also called *phase transition*.

Note that all these *online* games, where the player has to decide without any knowledge about future steps, have an *offline* counterpart, where she is presented all decisions (that is e.g. all random edges) at once. Here, the question is not how long she can typically survive, but how many decisions we can typically reveal to her such that she can still achieve her goal. Observe that any online strategy can only be as good as an optimal offline strategy. In this sense, offline settings provide natural benchmarks for the player in online games. It is thus essential to understand the underlying offline scenarios in order to evaluate the quality of online strategies.

Our first main result deals with offline Ramsey games where Painter's goal is to avoid a monochromatic giant component. This goal was considered for the offline variant of Achlioptas processes by Bohman and Kim in 2006. Moreover, Bohman, Frieze and Wormald in 2004 solved the setting where the edges do not come in pairs and Chooser can instead select any half of them without further restrictions. We consider the two corresponding Ramsey-type settings: an *unbalanced* one where Painter is presented a random graph and needs to color its edges with $r \geq 2$ colors without creating a monochromatic giant component, and a *balanced* one where all edges are additionally partitioned into random sets of size r and Painter is restricted to use each of the r colors exactly once in every set. We show that, in contrast to the edge-selection scenarios where the thresholds of the two settings differ, they coincide in the Ramsey scenario. Moreover, they are identical to the threshold for r-orientability.

Our second main result is concerned with the phase transition of random graph process. In a Science paper from 2009 Achlioptas, D'Souza and Spencer conjectured that certain edge-selection strategies for Chooser create Achlioptas processes with discontinuous phase transitions. However, this was disproved by Riordan and Warnke in a 2011 Science paper where they show that every Achlioptas process has a continuous phase transition. We complement their results by providing three examples for random graph processes which are closely related to the classical one by Erdős and Rényi, but exhibit a discontinuous phase transition.

Our third main result concerns a generalization of an offline Ramsey graph avoidance game to hypergraphs. In the 1990'ies Rödl and Ruciński solved this problem completely for the simple graph case. For an arbitrary graph F they prove a threshold result for the property that the edges of a random graph can be colored with $r \geq 2$ colors without a monochromatic copy of F. For the case of hypergraphs Friedgut, Rödl and Schacht (2010) and, independently, Conlon and Gowers (2011) showed an upper bound for the threshold of the avoidance of an arbitrary hypergraph F. In this thesis we prove a matching lower bound for a large class of hypergraphs, including all complete hypergraphs. Moreover, we give examples of hypergraphs for which the upper bound from Friedgut et al. and Conlon and Gowers is not tight.

Our fourth main result deals with the well-knwon two-player game of *Mastermind*. Roughly speaking, one player, called *Codemaker*, generates a secret code of length n over an alphabet of size k and the other player, called *Codebreaker*, has to identify this code with as few questions as possible according to a fixed question & answer scheme. The number of questions needed to identify the code has been studied intensively in discrete mathematics, e.g. by Erdős and Rényi for $k = 2$ in 1963 and by Chvátal for $k \leq n^2$ in 1983. Despite many efforts the currently-best known bounds for the prominent case $k = n$ are a lower bound of $\Omega(n)$ questions and an upper bound of $\mathcal{O}(n \log n)$. Among other results we improve the upper bound for this case to $\mathcal{O}(n \log \log n)$.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Spielen in der Überschneidung von extremaler Graphentheorie und der Theorie der Zufallsgraphen, die in den letzten Jahrzehnten großes Interesse geweckt haben. Betrachten wir folgendes Spiel für einen Spieler: Wir beginnen mit einem leeren Graphen auf n Knoten. Der Spieler, den wir hier *Färber* nennen, bekommt nun fortlaufend zufällige Kanten präsentiert, die zu dem Graphen hinzugefügt werden, und die er sofort mit einer von r verfügbaren Farben färben muss. Sein Ziel ist es eine vorgegebene Grapheigenschaft, z.B. das Enthalteneines einfarbigen Dreiecks, so lange wie möglich zu verhindern. Wie lange kann er in diesem Spiel typischerweise überleben? Und wie sieht eine optimale Strategie für ihn aus? Diese so genannten *Online-Ramsey-Spiele* wurden erstmals von Friedgut, Kohayakawa, Rödl, Ruciński und Tetali in 2003 betrachtet. Seither hat es eine Vielzahl von Arbeiten zu verschiedenen Zielen von Färber und verschiedenen Modifikationen des Spiels gegeben.

Eine besonders populäre Variante sind die so genannten *Achlioptas-Prozesse*, die nach Dimitris Achlioptas benannt sind. Dabei werden dem Spieler, den wir hier *Auswähler* nennen, fortlaufend zufällige Paare von möglichen Kanten präsentiert, von denen er jeweils eine auswählen muss, die dem Graphen hinzugefügt wird, während die andere in den Pool

der Nicht-Kanten zurückgelegt wird. Diese Prozesse wurden ursprünglich analysiert in Bezug auf die Frage, ob man die Entstehung einer linear großen Zusammenhangskomponente, einer so genannten *Riesen-Komponente*, beschleunigen oder verlangsamen kann im Vergleich zum klassischen Zufallsgraphen-Prozess von Erdős und Rényi, bei dem in jedem Schritt einfach eine zufällige Kante eingefügt wird, ohne dass irgendeine Auswahl stattfindet. Das Auftauchen der Riesen-Komponente wird auch *Phasenübergang* genannt.

All diese *Online*-Spiele, in denen der Spieler sofort entscheiden muss ohne Vorwissen über in der Zukunft liegende Schritte, besitzen ein *Offline*-Pendant, bei dem ihm alle Entscheidungen (also z.B. alle zufälligen Kanten) auf einmal präsentiert werden. Hierbei ist die Frage nicht, wie lange der Spieler typischerweise überleben kann, sondern wie viele Entscheidungen wir ihm im Normalfall zeigen können, so dass er sein Ziel immernoch erreichen kann. Dabei kann jede Online-Strategie höchstens so gut sein wie eine optimale Offline-Strategie. Die Offline-Szenarien dienen also als eine Art natürliche Messlatte für Online-Spiele. Daher ist es von entscheidender Bedeutung die zugrunde liegenden Offline-Varianten zu verstehen, um eine Aussage über die Güte von Online-Strategien treffen zu können.

Unser erstes Hauptresultat befasst sich mit Offline-Ramsey-Spielen, bei denen es Färbers Ziel ist eine einfarbige Riesen-Komponente zu vermeiden. Für das Offline-Achlioptas-Szenario wurde dieses Ziel in 2006 von Bohman und Kim abgehandelt. Des Weiteren haben Bohman, Frieze und Wormald in 2004 die Variante gelöst, bei der Auswähler die Kanten nicht in Paaren gezeigt werden, sondern er auf beliebige Art und Weise die Hälfte aller präsentierten Kanten auswählen kann. Wir betrachten die zwei entsprechenden Ramsey-Szenarien: ein *unbalanciertes*, bei dem Färber ein Zufallsgraph gezeigt wird, dessen Kanten er mit $r \geq 2$ Farben färben muss ohne eine einfarbige Riesen-Komponente zu erzeugen, und ein *balanciertes*, bei dem alle Kanten zusätzlich in zufällige Mengen der Größe r partitioniert sind und Färber jede Farbe in jeder Menge genau einmal benutzen muss. Wir zeigen, dass, im Unterschied zu den Achlioptas-Szenarien, die typische Anzahl Entscheidungen, die wir Färber präsentieren können, in beiden Ramsey-Szenarien identisch ist. Sie fällt außerdem mit dem Grenzwert für die r-Orientierbarkeit des Zufallsgraphen überein.

In unserem zweiten Hauptresultat betrachten wir den Phasenübergang von Zufallsgraphenprozessen. In 2009 haben Achlioptas, D'Souza und

Spencer in einem Science-Paper die Vermutung geäussert, dass bestimmte Kanten-Auswahl-Strategien für Auswähler zu einem Achlioptas-Prozess mit unstetigem Phasenübergang führen. Diese Vermutung wurde jedoch von Riordan und Warnke in einem weiteren Science-Paper von 2011 widerlegt. Darin zeigen sie, dass jeder Achlioptas-Prozess einen stetigen Phasenübergang besitzt. Wir ergänzen ihre Arbeit, indem wir drei Beispiele für Zufallsgraphenprozesse angeben, die stark mit dem klassischen Prozess von Erdős und Rényi verwandt sind und einen unstetigen Phasenübergang besitzen.

Unser drittes Hauptresultat behandelt eine Verallgemeinerung des Offline-Ramsey-Spiels, bei dem es Färbers Ziel ist einen einfarbigen Subgraphen zu vermeiden, auf Hypergraphen. Für einfache Graphen wurde dieses Problem in den 1990ern von Rödl und Ruciński vollständig gelöst. Für jeden Graphen F haben sie den Schwellenwert bestimmt für die Eigenschaft, dass die Kanten eines Zufallsgraphen mit r Farben gefärbt werden können, ohne dass eine einfarbige Kopie von F auftritt. Für das entsprechende Problem im Hypergraphenfall haben Friedgut, Rödl und Schacht (2010) und unabhängig davon Conlon und Gowers (2011) eine obere Schranke für den Schwellenwert bewiesen. In dieser Arbeit zeigen wir eine dazu passende untere Schranke für eine große Klasse von Hypergraphen, die unter anderem alle vollständigen Hypergraphen enthält. Des Weiteren geben wir einige Beispiele für Hypergraphen an, für die die oberen Schranken von Friedgut et al. und Conlon und Gowers nicht bestmöglich sind.

In unserem vierten Hauptresultat geht es um das bekannte Gesellschaftsspiel *Mastermind*. Grob gesagt gibt es dort einen Spieler, den *Codemacher*, der ein geheimes Wort der Länge n über einem Alphabet der Größe k wählt, und den anderen Spieler, *Codeknacker*, der dieses Wort in einem vorgegebenen Frage-Antwort-Schema mit möglichst wenig Fragen herausfinden muss. Die Anzahl Fragen, die in diesem Spiel benötigt wird, um das Wort zu erraten, wurde in der diskreten Mathematik schon vielfach analysiert, z.B. 1963 von Erdős und Rényi für den Fall $k = 2$ und 1983 von Chvátal für $k \leq n^2$. Trotz vieler Bemühungen sind die besten derzeit bekannten Schranken für den Fall $k = n$ eine untere Schranke von $\Omega(n)$ und eine obere Schranke von $\mathcal{O}(n \log n)$. Neben anderen Resultaten verbessern wir hier die obere Schranke auf $\mathcal{O}(n \log \log n)$.