



Doctoral Thesis

## **Optimal trading algorithms Portfolio transactions, multiperiod portfolio selection, and competitive online search**

**Author(s):**

Lorenz, Julian M.

**Publication Date:**

2008

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-005687539> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH No. 17746

# Optimal Trading Algorithms: Portfolio Transactions, Multiperiod Portfolio Selection, and Competitive Online Search

A dissertation submitted to the  
ETH ZÜRICH

for the degree of  
DOCTOR OF SCIENCES

presented by  
JULIAN MICHAEL LORENZ  
Diplom-Mathematiker, Technische Universität München  
born 19.12.1978  
citizen of Germany

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. Angelika Steger, examiner  
Prof. Dr. Hans-Jakob Lüthi, co-examiner  
Dr. Robert Almgren, co-examiner

2008

## Abstract

This thesis deals with optimal algorithms for trading of financial securities. It is divided into four parts: risk-averse execution with market impact, Bayesian adaptive trading with price appreciation, multiperiod portfolio selection, and the generic online search problem  $k$ -search.

**Risk-averse execution with market impact.** We consider the *execution of portfolio transactions* in a trading model with *market impact*. For an institutional investor, especially in equity markets, the size of his buy or sell order is often larger than the market can immediately supply or absorb, and his trading will move the price (*market impact*). His order must be worked across some period of time, exposing him to price volatility. The investor needs to find a trade-off between the market impact costs of rapid execution and the market risk of slow execution.

In a mean-variance framework, an optimal execution strategy minimizes variance for a specified maximum level of expected cost, or conversely. In this setup, Almgren and Chriss (2000) give path-independent (also called *static*) execution algorithms: their trade-schedules are deterministic and do not modify the execution speed in response to price motions during trading.

We show that the static execution strategies of Almgren and Chriss (2000) can be significantly improved by *adaptive trading*. We first illustrate this by constructing strategies that update exactly once during trading: at some intermediary time they may readjust in response to the stock price movement up to that moment. We show that such single-update strategies yield lower expected cost for the same level of variance than the static trajectories of Almgren and Chriss (2000), or lower variance for the same expected cost.

Extending this first result, we then show how *optimal dynamic strategies* can be computed to any desired degree of precision with a suitable application of the dynamic programming principle. In this technique the control variables are not only the shares traded at each time step, but also the maximum expected cost for the remainder of the program; the value function is the variance of the remaining program. This technique reduces the determination of optimal dynamic strategies to a series of single-period convex constrained optimization problems.

The resulting adaptive trading strategies are “aggressive-in-the-money”: they accelerate the execution when the price moves in the trader’s favor, spending parts of the trading gains to reduce risk. The relative improvement over static trade schedules is larger for large initial positions, expressed in terms of a new nondimensional parameter, the *market power*  $\mu$ . For small portfolios,  $\mu \rightarrow 0$ , optimal adaptive trade schedules coincide with the static trade schedules of Almgren and Chriss (2000).

**Bayesian adaptive trading with price appreciation.** This part deals with another major driving factor of transaction costs for institutional investors, namely *price appreciation* (price trend) during the time of a buy (or sell) program. An investor wants to buy (sell) a stock before other market participants trade the same direction and push up (respectively, down) the price.

Thus, price appreciation compels him to complete his trade rapidly. However, an aggressive trade schedule incurs high market impact costs. Hence, it is vital to balance these two effects. The magnitude of the price appreciation is uncertain and comes from increased trading by other large institutional traders. Institutional trading features a strong *daily cycle*. Market participants make large investment decisions overnight or in the early morning, and then trade across the entire day. Thus, price appreciation in early trading hours gives indication of large net positions being executed and ensuing price momentum. We construct a model in which the trader uses the observation of the price evolution during the day to estimate price momentum and to determine an optimal trade schedule to minimize total expected cost of trading. Using techniques from dynamic programming as well as the calculus of variations we give explicit optimal trading strategies.

**Multiperiod portfolio selection.** We discuss the well-known mean-variance portfolio selection problem (Markowitz, 1952, 1959) in a multiperiod setting. Markowitz's original model only considers an investment in one period. In recent years, multiperiod and continuous-time versions have been considered and solved. In fact, in a multiperiod setting the portfolio selection problem is related to the optimal execution of portfolio transactions. Using the same dynamic programming technique as in the first part of this thesis, we explicitly derive the optimal dynamic investment strategy for discrete-time multiperiod portfolio selection. Our solution coincides with previous results obtained with other techniques (Li and Ng, 2000).

**Generic online search problem  $k$ -search.** We discuss the generic *online search problem  $k$ -search*. In this problem, a player wants to sell (respectively, buy)  $k \geq 1$  units of an asset with the goal of maximizing his profit (minimizing his cost). He is presented a series of prices, and after each quotation he must *immediately* decide whether or not to sell (buy) one unit of the asset. We impose only the rather minimal modeling assumption that all prices are drawn from some finite interval. We use the *competitive ratio* as a performance measure, which measures the worst case performance of an online (sequential) algorithm vs. an optimal offline (batch) algorithm. We present (asymptotically) optimal deterministic and randomized algorithms for both the maximization and the minimization problem. We show that the maximization and minimization problem behave substantially different, with the minimization problem allowing for rather poor competitive algorithms only, both deterministic and randomized. Our results generalize previous work of El-Yaniv, Fiat, Karp, and Turpin (2001).

Finally, we shall show that there is a natural connection between  $k$ -search and *lookback options*. A lookback call allows the holder to buy the underlying stock at time  $T$  from the option writer at the historical minimum price observed over  $[0, T]$ . The writer of a lookback call option can use algorithms for  $k$ -search to buy shares as cheaply as possible before expiry, and analogously for a lookback put. Hence, under a no-arbitrage condition the competitive ratio of these algorithms give a bound for the price of a lookback option, which in fact shows similar qualitative and quantitative behavior as pricing in the standard Black-Scholes model.

## Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit optimalen Algorithmen für den Handel von Wertpapieren, und gliedert sich in vier Teile: risikoaverse Ausführung von Portfolio-Transaktionen, Bayes-adaptiver Aktienhandel unter Preistrend, Mehrperioden-Portfoliooptimierung und das generische Online-Suchproblem  $k$ -search.

**Risikoaverse Ausführung von Portfoliotransaktionen.** Der ersten Teil behandelt das Problem der *optimalen Ausführung von Portfoliotransaktionen* in einem Marktmodell mit *Preiseinfluss*. Die Größe der Transaktionen eines institutionellen Anlegers am Aktienmarkt ist oftmals so groß, dass sie den Aktienpreis beeinflussen. Eine solche große Order kann nicht unmittelbar ausgeführt werden, sondern muss über einen längeren Zeitraum verteilt werden, zum Beispiel über den gesamten Tag. Dies führt dazu, dass der Anleger währenddessen der Preisvolatilität ausgesetzt ist. Das Ziel einer Minimierung der *Preiseinfluss-Kosten* durch langsame Ausführung über einen ausgedehnten Zeitraum und das Ziel einer Minimierung des Marktrisikos durch möglichst rasche Ausführung sind damit gegenläufig, und der Händler muss einen Kompromiss finden.

In dem bekannten Mittelwert-Varianz-Ansatz werden diejenigen Ausführungsstrategien als optimal bezeichnet, die die Varianz für einen bestimmten maximalen Erwartungswert der Kosten minimieren, oder aber für eine bestimmte maximale Varianz der Kosten deren Erwartungswert. Almgren und Chriss (2000) bestimmen in einem solchen Modell pfadunabhängige (auch statisch genannte) Ausführungsalgorithmen, d.h. ihre Strategien sind deterministisch und passen den Ausführungsplan nicht an als Antwort auf einen steigenden oder fallenden Aktienkurs.

Diese Arbeit zeigt, dass die Ausführungsstrategien von Almgren und Chriss (2000) entscheidend verbessert werden können, und zwar mit Hilfe von adaptiven, dynamischen Strategien. Wir demonstrieren dies zunächst am Beispiel von sehr einfachen dynamischen Strategien, die *genau einmal* während der Ausführung darauf reagieren dürfen, ob der Aktienpreis gestiegen oder gefallen ist. Wir bezeichnen diese Strategien als *single-update Strategien*. Trotz ihrer Einfachheit liefern sie bereits eine gewaltige Verbesserung gegenüber den Ausführungsstrategien von Almgren und Chriss (2000).

Als nächstes zeigen wir, wie man voll-dynamische optimale Ausführungsstrategien berechnen kann, und zwar mittels dynamischer Programmierung für Mittelwert-Varianz-Probleme. Der entscheidende Schritt für diese Technik ist es, die maximal erwarteten Kosten neben der Anzahl der Aktien als Zustandsvariable zu verwenden, und die Varianz der Strategie als Wertfunktion des dynamischen Programms. Auf diese Weise wird die Bestimmung von voll-dynamischen optimalen Strategien auf eine Serie von konvexen Optimierungsproblemen zurückgeführt.

Die optimalen dynamischen Strategien sind „aggressiv im Geld“, d.h. sie beschleunigen die Ausführung, sobald sich der Preis vorteilhaft für den Händler entwickelt. Die beschleunigte Ausführung führt zu höheren Preiseinflusskosten, was den Händler einen Teil der Gewinne aus der

positiven Kursentwicklung kostet. Dafür kann der Händler aber sein Kaufs- bzw. Verkaufsprogramm schneller beenden, und geht weniger Marktrisiko ein – was zu einer Verbesserung im Mittelwert-Varianz Kompromiss führt. Wir zeigen, dass die relative Verbesserung der dynamischen Strategien gegenüber den Strategien von Almgren und Chriss (2000) umso größer ausfällt, je größer die Portfoliotransaktion ist. Für sehr kleine Transaktionen ergibt sich keine Verbesserung, und die optimalen dynamischen Strategien stimmen mit den statischen Strategien von Almgren und Chriss überein.

**Bayes-adaptiver Aktienhandel unter Preistrend.** Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit einem weiteren entscheidenden Bestandteil der Transaktionskosten eines grossen institutionellen Anlegers, nämlich mit *Preistrend* während der Ausführung eines Kaufs- bzw. Verkaufsprogramms. Ein solcher Preistrend rührt daher, dass andere Marktteilnehmer ähnliche Kaufs- bzw. Verkaufsprogramme laufen haben, was den Preis verschlechtert. Dies veranlasst den Händler dazu, sein Kaufs- bzw. Verkaufsprogramm möglichst schnell durchzuführen; wiederum muss er jedoch einen Kompromiss finden mit höheren Preiseinfluss-Kosten, die durch eine aggressive Ausführung anfallen.

Institutioneller Aktienhandel unterliegt einem starken *Tageszyklus*. Marktteilnehmer fällen grosse Anlageentscheidungen morgens vor Handelsbeginn und führen diese Programme dann über den Tag aus. Ein Preistrend am Anfang des Tages kann damit auf ein Übergewicht an Kauf- bzw. Verkaufsinteresse hindeuten und lässt vermuten, dass dieses Preismoment auch im weiteren Tagesverlauf anhält. Wir betrachten ein Modell für diese Situation, in dem der Händler die Entwicklung des Preises zur Schätzung des Preistrends verwendet und damit eine optimale Strategie ermittelt, die den Erwartungswert seiner Kosten minimiert. Die mathematischen Techniken hierzu sind dynamische Programmierung und Variationsrechnung.

**Mehrperioden-Portfoliooptimierung.** Der dritte Teil dieser Arbeit diskutiert das wohlbekannte Problem der Portfolio-Optimierung im Mittelwert-Varianz-Ansatz von Markowitz (1952, 1959) in einem Mehrperiodenmodell. Das ursprüngliche Modell von Markowitz beschränkte sich auf ein Investment in nur einer Periode. In den letzten Jahren wurde das Mittelwert-Varianz Portfolioproblem in solchen Mehrperiodenmodellen oder in Modellen mit stetiger Zeit betrachtet und gelöst. Das Problem der optimalen Ausführung von Portfolio-Transaktionen ist in der Tat mit diesem Problem verwandt. Mit der Technik der dynamischen Programmierung für Mittelwert-Varianz-Probleme, das wir für das Portfoliotransaktionsproblem entwickelt haben, können explizite optimale dynamische Anlagestrategien in diskreter Zeit bestimmt werden. Unsere Formeln stimmen mit denen von Li und Ng (2000) überein, die diese mit Hilfe einer anderen Technik ermittelt hatten.

**Generisches Online-Suchproblem  $k$ -search.** Der vierte Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit dem generischen Online-Suchproblem  $k$ -search: Ein Online-Spieler möchte  $k \geq 1$  Einheiten eines Gutes verkaufen (bzw. kaufen) mit dem Ziel, seinen Gewinn zu maximieren (bzw. seine Kosten zu minimieren). Er bekommt der Reihe nach Preise gestellt, und muss nach jedem Preis unmittelbar entscheiden ob er für diesen Preis eine Einheit verkaufen (bzw. kaufen) möchte. Die einzige Modellannahme für die Preissequenz ist, dass alle Preise aus einem vorgegebenen Intervall

stammen. Wir verwenden die *competitive ratio* als Qualitätsmaß. Dieses beurteilt einen Online-Algorithmus relativ zu einem optimalen „Offline-Algorithmus“, der die gesamte Preissequenz im Voraus kennt.

Diese Arbeit ermittelt (asymptotisch) optimale deterministische und randomisierte Algorithmen sowohl für das Maximierungs- als auch das Minimierungsproblem. Erstaunlicherweise verhalten sich das Maximierungs- und das Minimierungsproblem deutlich unterschiedlich: optimale Algorithmen für das Minimierungsproblem erzielen eine deutlich schlechtere *competitive ratio* als im Maximierungsproblem. Diese Ergebnisse verallgemeinern Resultate von El-Yaniv, Fiat, Karp und Turpin (2001).

Wir zeigen abschliessend, dass es eine natürliche Beziehung gibt zwischen  $k$ -search und sogenannten *Lookback-Optionen*. Ein Lookback-Call gibt das Recht, die zugrundeliegende Aktie zur Zeit  $T$  zum historischen Minimums-Preis während des Zeitraums  $[0, T]$  zu erwerben. Der Stillhalter eines Lookback Calls kann Algorithmen für  $k$ -search verwenden, um bis Ablauf der Option möglichst billig die Aktien zu erwerben, die er zur Erfüllung seiner Pflicht benötigt; analog kann sich der Stillhalter eines Lookback-Puts Algorithmen für  $k$ -search in der Maximierungsversion zu Nutze machen. Unter der Annahme der Arbitragefreiheit gibt die *competitive ratio* eines  $k$ -search Algorithmus damit eine Schranke für den Preis einer Lookback-Option. Diese Schranke zeigt ähnliches qualitatives und quantitatives Verhalten wie die Bewertung der Option im Black-Scholes Standardmodell.