Approximation schemes for geometric problems

Author(s):
Remy, Jan Magnus

Publication Date:
2007

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-005397999

Rights / License:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted
Approximation Schemes for Geometric Problems

A dissertation submitted to the
ETH Zürich

for the degree of
Doktor der Wissenschaften

presented by
Jan Magnus Remy
Diplom-Informatiker, Technische Universität München
born 01.12.1977
citizen of Germany

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Angelika Steger, ETH Zürich (examiner)
Prof. Satish Rao, UC Berkeley (co-examiner)
Prof. Subhash Suri, UC Santa Barbara (co-examiner)

2007
Abstract

This thesis is devoted to geometric optimization problems of the following kind: given a set of points $P \subset \mathbb{R}^d$, we wish to compute a certain straight-line graph on $P$ with minimum length, such as a shortest Steiner tree, a salesman tour or a triangulation. As most of these problems are $\mathcal{NP}$-hard and many of them even in the strong sense, approximation algorithms have attracted considerable attention. One important breakthrough was made in 1996 when Arora [10, 11] and Mitchell [93, 94] independently introduced a polynomial time approximation scheme (PTAS) for several $\mathcal{NP}$-hard geometric problems, including the traveling salesman problem and the Steiner tree problem.

Arora's technique applies to a wide class of problems for which the so-called Patching Lemma holds. This lemma essentially states that one can reduce the number of crossings of some solution with a given line segment without increasing the cost of the solution much. However, there is a number of popular geometric problems, where it seems unclear whether a result similar to the Patching Lemma is true. For example, this is the case for $k$-MEDIAN, MINIMUM WEIGHT TRIANGULATION, MINIMUM WEIGHT STEINER TRIANGULATION or BOUNDED-DEGREE MINIMUM SPANNING TREE. Nevertheless, for some of these problems approximation schemes were recently obtained using different methods. For instance, it is known that a PTAS for $k$-MEDIAN [14, 82] and a quasi-polynomial time approximation scheme (QPTAS) for BOUNDED-DEGREE MINIMUM SPANNING TREE [13] exists. In this thesis we study the problems listed below. They also seem to resist Arora's technique.

*Minimum Weight Triangulation.* The MINIMUM WEIGHT TRIANGULATION problem is to find a triangulation of minimum length for a given set of points in the Euclidean plane. It was one of the few longstanding open challenges from the famous list of twelve problems with unknown complexity status, published by Garey and Johnson [56] in 1979. Very recently the problem was shown to be $\mathcal{NP}$-hard by Mulzer and Rote [99]. In this thesis we present a QPTAS for MINIMUM WEIGHT TRIANGULATION.
Node-weighted Steiner Trees. Let $P$ denote a set of points in $\mathbb{R}^d$, and consider the following variant of the geometric Steiner tree problem: we pay a penalty of $c_S$ units for every Steiner point we use and we are charged $\pi(u)$ units if the point $u \in P$ is not included in the tree. The goal is to minimize the total length of the tree including the penalties. In dimension 2 we introduce a PTAS for the problem. Moreover, for arbitrary fixed dimension our techniques still yield a QPTAS.

Vehicle Routing with Allocation. The Vehicle-Routing with Allocation problem is a generalization of TSP. We do not require that all points lie on the salesman tour. However, points that lie not on the tour are allocated, i.e., they are directly connected to the nearest tour point paying a higher (per-unit) cost. More formally, the input is a set of points $P$ in $\mathbb{R}^d$ along with functions $\alpha: P \to [0, \infty)$ and $\beta: P \to [1, \infty)$. A solution is a subset $T \subseteq P$ and a salesman tour $\pi$ through $T$, and we wish to minimize the total length of the tour including all allocation costs. The allocation cost for a single point $p \in P \setminus T$ is $\alpha(p) + \beta(p) \cdot d(p, q)$, where $q \in T$ is the nearest point on the tour. We give a PTAS with complexity $O\left(n \log^{d+3} n\right)$ for this problem. For the Steiner variant of Vehicle-Routing with Allocation we introduce a PTAS with complexity $O(n \log^{\xi(d, \varepsilon)} n)$, where $\xi(d, \varepsilon) = O(\sqrt{d/\varepsilon})^{d-1}$. 

Resume
cettethese de doctorat etudie des problemes d'optimisation geometrique
de la facon suivante: etant donne un ensemble des points \( P \subset \mathbb{R}^d \), nous
voulons construire un arbre de Steiner, un cycle pour un voyageur de
commerce, une triangulation ou une autre structure avec une longueur
(ou un poids) minimal. La plupart de ces problemes sont \( NP \)-difficiles,
et donc nous nous interessons aux algorithmes d'approximation. En fait,
il y a beaucoup de resultats sur des algorithmes d'approximation pour
tels problemes geometriques. Un progres important a ete fait en 1996
quand Arora [10, 11] et Mitchell [93, 94] ont presente independamment
un polynomial time approximation scheme (PTAS) pour les variantes
geometriques du probleme du voyageur de commerce, du probleme de
l'arbre de Steiner et d'autres problemes qui sont \( NP \)-difficiles.

La technique d'Arora est applicable a bien de problemes, a condition que
nous puissions prouver un lemme correspondant au Patching Lemma. Ce
lemme affirme essentiellement qu'on peut reduire le nombre des points
d'intersection d'une solution avec un segment d'une droite sans beaucoup hausser le cozt de la solution. Mais il y a beaucoup de problemes
géometriques pour lesquels on ne peut pas certainement dire si un re-
sultat correspondant au Patching Lemma soit vrai.

C'est le cas pour les problemes \( k \)-Median, Minimum Weight Tri-
gulation, Minimum Weight Steiner Triangulation, Bounded-
Degree Minimum Spanning Tree et d'autres problemes. Néanmoins,
pour un petit nombre de ces problemes il y a des approximation schemes,
utilisant des methodes differentes. Ainsi, nous avons un PTAS pour \( k-
Median [14, 82] et un quasi-polynomial time approximation scheme
(QPTAS) pour Bounded-Degree Minimum Spanning Tree [13].
Cette these etudie les problemes suivants qui semblent de s'opposer a
la technique d'Arora.

Minimum Weight Triangulation. Le probleme Minimum Weight Tri-
gulation, c'est de construire une triangulation avec un poids mini-
mal d'un ensemble des points dans le plan. Ce probleme est apparu sur
la liste des douze problemes avec une complexite incertaine publiee en
1979 par Garey et Johnson [56], et il restait irrésolu pour longtemps. Dernièrement Mulzer et Rote [99] ont prouvé que Minimum Weight Triangulation est \( \mathcal{NP} \)-difficile. Ici, nous introduisons un QPTAS pour Minimum Weight Triangulation.

**Node-weighted Steiner Trees.** Soit \( P \subset \mathbb{R}^d \) un ensemble des points. Nous étudions la variante suivante du problème de l’arbre de Steiner: on doit payer une pénalisation de \( \pi(u) \) unités si le point \( u \) n’est pas inclus dans l’arbre et chaque point Steiner de l’arbre coûte \( c_S \) unités. On souhaite de construire un arbre avec un poids et une pénalisation minimal. Cette thèse constitue un PTAS pour ce problème dans le plan. Dans la dimension fixée notre technique génère encore un QPTAS.

**Vehicle Routing with Allocation.** Le problème `Vehicle-Routing with Allocation` est une généralisation du problème du voyageur de commerce. Néanmoins nous n’exigeons pas que tous les points soient inclus dans le cycle. Au lieu de cela, nous devons joindre les points non-inclus au prochain point du cycle. Plus précisément, l’input est un ensemble des points \( P \subset \mathbb{R}^d \) et des fonctions \( \alpha : P \rightarrow [0, \infty) \) et \( \beta : P \rightarrow [1, \infty) \). Une solution est un sous-ensemble \( T \subseteq P \) avec un cycle \( \pi \) sur \( T \), et on minimise le poids du cycle et le coût d’allocation totale. Le coût d’allocation pour un point \( p \in P \setminus T \) est \( \alpha(p) + \beta(p) \cdot d(p, q) \), étant \( q \in T \) le point le plus proche du cycle. A la suite, nous allons décrire un PTAS avec la complexité \( O\left(n \log^{3+d} n\right) \) pour ce problème. De plus, cette thèse constitue un PTAS avec la complexité \( O(n \log^{\xi(d, \varepsilon)} n) \), étant \( \xi(d, \varepsilon) = O(\sqrt{d}/\varepsilon)^{d-1} \), pour la variante du `Vehicle-Routing with Allocation` où la solution peut contenir des points Steiner.