Ramsey games in random graphs

Author(s):
Mütze, Torsten

Publication Date:
2011

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-007230480

Diss. ETH No. 20089

Ramsey games in random graphs

A dissertation submitted to

ETH Zurich

for the degree of

Doctor of Sciences

presented by

Torsten Mütze

Dipl.-Ing. für Informationssystemtechnik, TU Dresden

born 05.02.1981

citizen of Germany

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Angelika Steger, examiner

Prof. Dr. József Balogh, co-examiner

2011

Abstract

Playing games has ever since been an important part of humans' social interaction, and over the last centuries the theoretical analysis of games has fascinated and stimulated researchers from different scientific backgrounds. Somewhat surprisingly, for certain combinatorial games the outcome of the game between two optimal players ('clever' vs. 'clever') is the same as if both players played randomly ('random' vs. 'random'), and insights from the probabilistic analysis can be turned into efficient deterministic winning strategies. The main contribution of this thesis is building a similar bridge between two previously disconnected areas of research: the world of probabilistic one-player games ('clever' vs. 'random') in which the goal is to avoid some given local substructure, and the afore-mentioned world of deterministic two-player games ('clever' vs. 'clever'). This link is established by replacing randomness by a deterministic adversary who is subject to certain restrictions inherited from the random setting. Exploiting this connection allows us to transfer insights and techniques between the two worlds and to derive new results in each of them.

We demonstrate the full strength of our approach by considering a class of games where the edges or vertices of a graph have to be colored online (i.e., one after the other without seeing the entire graph in advance), where we have fixed number of colors at our disposal and our goal is to avoid a monochromatic copy of some fixed graph (this is the forbidden local substructure). The edge-coloring version of this notion of graph colorability is one of the central topics of *Ramsey theory*, and the vertex-coloring version generalizes the *chromatic number problem*, one of the 21 algorithmic problems shown to be $\mathcal{NP}$-complete by Karp in his 1972 landmark paper.

In the world of *probabilistic* games, the above coloring problem was first considered by Friedgut, Kohayakawa, Rödl, Ruciński and Tetali, who introduced the following *one-player game* ('clever' vs. 'random'): To an initially empty graph on n vertices randomly chosen edges are added one after the other. The player, henceforth called Painter, has to color them immediately and irrevocably with one of $r \geq 2$ available colors with the goal of avoiding a monochromatic copy of some fixed graph F. The authors determined the typical number of steps Painter can 'survive' this process with an optimal strategy for the special case where F is a triangle and $r = 2$ colors are available — this typical number of steps is formalized in the notion of a *threshold function.* This problem was further investigated by Marciniszyn, Spöhel and Steger, who proved explicit threshold functions for a large class of graphs F, including cliques and cycles, and $r = 2$ colors. Marciniszyn and Spöhel also introduced the vertex-coloring version of this problem, proving threshold results for a similarly large class of graphs, and $r \geq 2$ colors. As it turns out, in all cases where the online threshold is known (in the edge- and the vertex-coloring setting), a simple greedy strategy is optimal for Painter.

In the world of *deterministic* games, Beck and independently Kurek and Ruciński introduced the following *two-player game* ('clever' vs. 'clever'): The two players are called Painter and Builder. Builder in each step adds an edge to an initially empty graph and as before Painter has to color these edges with the goal of avoiding a monochromatic copy of F, while Builder's goal is to

enforce such a copy. The question for the minimum number of steps Builder needs to win this game and the question whether Builder can still win if we impose certain additional restrictions on him received considerable attention in the literature.

In this thesis we continue the study of the online F-avoidance game in random graphs, both in the edge- and the vertex-coloring version. Our main contribution is establishing a link between the probabilistic one-player game Painter vs. the random graph ('clever' vs. 'random') and a suitably defined deterministic two-player game Painter vs. Builder ('clever' vs. 'clever'), where Builder is subject to certain restrictions inherited from the random setting. We emphasize here that apart from these specific applications to graph coloring games our idea to replace randomness by a deterministic adversary can also be fruitfully applied to other scenarios like random hypergraphs or random subsets of integers, and to other random processes involving choices like e.g. the well-studied Achlioptas process.

In the deterministic two-player game we consider, we impose the following *density restriction* on Painter's adversary Builder: We require that throughout the game, the ratio of edges to vertices in every subgraph of the evolving graph is bounded by d, for some fixed real number $d > 0$ known to both players.

Concerning the edge-coloring problem, our first main result is that for any F and r, the existence of a winning strategy for Builder in the deterministic F-avoidance game with r colors and density restriction d implies an upper bound of $n^{2-1/d}$ on the threshold of the probabilistic game. We thus obtain a new general approach to derive upper bounds for the online threshold. Recently, Balogh and Butterfield successfully applied our result and proved the first nontrivial upper bounds for the case where F is a triangle and $r \geq 3$ colors are available.

For the vertex-coloring problem, we obtain the following general threshold result, which is our second main result: For any F and r, the threshold of the probabilistic online problem is given by $n^{2-1/m_1^*(F,r)}$, where the parameter $m_1^*(F,r)$, referred to as the *online vertex-Ramsey density*, is defined as the infimum over all d for which Builder has a winning strategy in (the vertex-coloring version of) the deterministic F-avoidance game with r colors and density restriction d. As our third main result we prove that for any F and r, the parameter $m_1^*(F,r)$ is a computable rational number, and the infimum in its definition is attained as a minimum. Our lower bound proof of the online threshold is algorithmic, i.e., we obtain polynomial-time algorithms for computing colorings of the random graph with no monochromatic copies of F online in the entire regime below the corresponding thresholds (while coloring above the threshold is impossible).

Still concerning the vertex-coloring problem, it is known that for a large class of graphs F, including cliques, cycles, complete bipartite graphs, hypercubes, wheels and stars of arbitrary size, a simple greedy strategy is optimal for Painter, implying simple closed formulas for the parameter $m_1^*(F,r)$ in these cases. As our last main result we show that in the innocent-looking case where $F = P_\ell$ is a (long) path, the greedy strategy fails quite badly and the parameter $m_1^*(P_\ell,r)$ exhibits a surprisingly complex behavior, giving some evidence that a general closed formula for the parameter $m_1^*(F,r)$ does not exist.

Zusammenfassung

Spielen war schon immer ein wichtiger Teil menschlicher sozialer Interaktion, und über die letzten Jahrhunderte hinweg hat die theoretische Analyse von Spielen Forscher mit verschiedensten wissenschaftlichen Hintergründen fasziniert und stimuliert. Überraschenderweise ist für gewisse kombinatorische Spiele der Ausgang des Spiels zwischen zwei optimalen Spielern ('intelligent' gegen 'intelligent') derselbe wie wenn beide Spieler zufällig spielen ('zufällig' gegen 'zufällig'), und Einsichten aus der wahrscheinlichkeitstheoretischen Analyse können in effiziente deterministische Gewinnstrategien übersetzt werden. Der Hauptbeitrag dieser Arbeit ist das Schlagen einer ähnlichen Brücke zwischen zwei vorher nicht verbundenen Forschungsgebieten: dies ist zum einen die Welt der probabilistischen Ein-Personen-Spiele ('intelligent' gegen 'zufällig'), bei denen eine gegebene lokale Teilstruktur vermieden werden soll, und zum anderen die vorher genannte Welt der deterministischen Zwei-Personen-Spiele ('intelligent' gegen 'intelligent'). Diese Verbindung wird hergestellt, indem die Zufälligkeit durch einen deterministischen Gegner ersetzt wird, der gewissen aus dem probabilistischen Spiel herrührenden Einschränkungen unterliegt. Indem wir diese Verbindung ausnutzen, können wir Einsichten und Techniken zwischen beiden Welten transferieren und in jeder von ihnen neue Resultate ableiten.

Wir demonstrieren die ganze Stärke unserer Herangehensweise, indem wir eine Klasse von Spielen betrachten, bei denen die Kanten oder Knoten eines Graphen online gefärbt werden müssen (online heisst hier nach und nach, d.h. ohne vorherige Kenntnis des gesamten Graphen), wobei eine feste Anzahl an Farben zur Verfügung steht und wir einfarbige Kopien eines festen Graphen vermeiden wollen (dies ist die verbotene lokale Teilstruktur). Die Kantenfärbungsversion dieses Begriffs von Graphenfärbbarkeit ist eines der zentralen Inhalte der *Ramsey-Theorie*, und die Knotenfärbungsversion verallgemeinert das *Problem der chromatischen Zahl*, eines der 21 algorithmischen Probleme, die Karp in seiner bahnbrechenden Arbeit aus dem Jahre 1972 als $\mathcal{NP}$-vollständig nachwies.

In der Welt der *probabilistischen* Spiele wurde das obige Färbungsproblem zuerst von Friedgut, Kohayakawa, Rödl, Ruciński und Tetali betrachtet, die das folgende *Ein-Personen-Spiel* ('intelligent' gegen 'zufällig') einführten: Zu einem anfangs leeren Graphen auf n Knoten werden nach und nach zufällig ausgewählte Kanten hinzugefügt. Der Spieler, den wir im Weiteren Painter nennen, muss diese sofort und unwiderruflich mit einer von $r \geq 2$ verfügbaren Farben färben mit dem Ziel, einfarbige Kopien eines festen Graphen F zu vermeiden. Die Autoren bestimmten die typische Anzahl an Schritten, für die Painter diesen Prozess mit einer optimalen Strategie 'überleben' kann für den Spezialfall, bei dem F ein Dreieck ist und $r = 2$ Farben zur Verfügung stehen — diese typische Anzahl an Schritten wird durch den Begriff der *Schwellenwertfunktion* formalisiert. Dieses Problem wurde weiter von Marciniszyn, Spöhel und Steger untersucht, die explizite Schwellenwertfunktionen für eine grosse Klasse von Graphen F, einschliesslich Cliquen und Kreise, und für $r = 2$ Farben bewiesen. Marciniszyn und Spöhel führten auch die Knotenfärbungsversion dieses Problems ein, für die sie Schwellenwertresultate für eine ähnlich grosse Klasse von Graphen und für $r \geq 2$ Farben bewiesen. Es stellt sich heraus, dass in allen Fällen,

wo der Online-Schwellenwert bekannt ist (im Kanten- und im Knotenfärbungs-Szenario), eine einfache Greedy-Strategie für Painter optimal ist.

In der Welt der *deterministischen* Spiele haben Beck und unabhängig auch Kurek und Ruciński das folgende *Zwei-Personen-Spiel* (‘intelligent’ gegen ‘intelligent’) eingeführt: Die beiden Spieler heissen Painter und Builder. Builder fügt in jedem Schritt eine Kante zu einem anfangs leeren Graphen hinzu, und wie vorher muss Painter diese Kanten mit dem Ziel färben, einfarbige Kopien von F zu vermeiden, während Builders Ziel das Erzwingen einer solchen Kopie ist. Die Frage nach der minimalen Anzahl an Schritten, die Builder benötigt, um dieses Spiel zu gewinnen, und die Frage ob Builder das Spiel noch gewinnen kann, wenn wir ihm gewisse zusätzliche Beschränkungen auferlegen, hat seither in der Literatur beachtliche Aufmerksamkeit erlangt.

In dieser Arbeit führen wir die Untersuchung des Online-F-Vermeidungsspiels in Zufallsgraphen fort, sowohl in der Kanten- als auch der Knotenfärbungsversion. Unser Hauptbeitrag ist das Herstellen einer Verbindung zwischen dem probabilistischen Ein-Personen-Spiel Painter gegen den Zufallsgraphen (‘intelligent’ gegen ‘zufällig’) und einem geeignet definierten deterministischen Zwei-Personen-Spiel Painter gegen Builder (‘intelligent’ gegen ‘intelligent’), wobei Builder gewissen aus dem probabilistischen Spiel herrührenden Einschränkungen unterliegt. Wir betonen an dieser Stelle, dass unsere Idee, die Zufälligkeit durch einen deterministischen Gegner zu ersetzen, abgesehen von diesen konkreten Anwendungen auf Graphenfärbungsspiele auch fruchtbringend auf andere Szenarien wie beispielsweise zufällige Hypergraphen oder zufällige Teilmengen der ganzen Zahlen angewendet werden kann, sowie auch auf andere Zufallsprozesse, die Auswahlmöglichkeiten beinhalten, wie zum Beispiel der gut untersuchte Achlioptas-Prozess.

In dem deterministischen Zwei-Personen-Spiel, das wir betrachten, erlegen wir Painters Gegner Builder die folgende *Dichtebeschränkung* auf: Wir verlangen, dass während des gesamten Spiels das Verhältnis von Kanten zu Knoten in jedem Teilgraphen des wachsenden Graphen durch d beschränkt ist, wobei $d > 0$ eine feste reelle Zahl ist, die beiden Spielern bekannt ist.

Bezüglich des Kantenfärbungsproblems ist unser erstes Hauptresultat, dass für jedes F und r die Existenz einer Gewinnstrategie für Builder im deterministischen F-Vermeidungsspiel mit r Farben und Dichtebeschränkung d eine obere Schranke von $n^{2-1/d}$ für den Schwellenwert des probabilistischen Spiels impliziert. Wir erhalten so eine neue allgemeine Methode, um obere Schranken für den Online-Schwellenwert abzuleiten. Kürzlich haben Balogh und Butterfield unser Resultat erfolgreich verwendet und damit die ersten nichttrivialen oberen Schranken bewiesen für den Fall, bei dem F ein Dreieck ist und $r \geq 3$ Farben verfügbar sind.

Für das Knotenfärbungsproblem erhalten wir das folgende allgemeine Schwellenwertresultat, welches unser zweites Hauptresultat ist: Für jedes F und r ist der Schwellenwert des probabilistischen Online-Problems durch $n^{2-1/m_1^*(F,r)}$ gegeben, wobei der Parameter $m_1^*(F,r)$, genannt die *Online-Knoten-Ramsey-Dichte*, definiert ist als Infimum über alle d, für die Builder eine Gewinnstrategie im deterministischen F-Vermeidungsspiel (genauer, der Knotenfärbungsversion davon) mit r Farben und Dichtebeschränkung d besitzt. Als unser drittes Hauptresultat beweisen wir, dass der Parameter $m_1^*(F,r)$ für jedes F und r eine berechenbare rationale Zahl ist, und dass das Infimum in der Definition als Minimum angenommen wird. Unser Beweis für die untere Schranke des Online-Schwellenwerts ist algorithmisch, d.h. wir erhalten polynomielle Algorithmen, die im gesamten Regime unterhalb der entsprechenden Schwellenwerte Färbungen des Zufallsgraphen online berechnen, die keine einfarbigen Kopien von F enthalten (während das Färben oberhalb des Schwellenwerts unmöglich ist).

Für das Knotenfärbungsproblem ist weiterhin bekannt, dass für eine grosse Klasse von Graphen F, einschliesslich Cliquen, Kreise, vollständige bipartite Graphen, Hyperwürfel, Räder und Sterne beliebiger Grösse, eine einfache Greedy-Strategie für Painter optimal ist, woraus einfache geschlossene Formeln für den Parameter $m_1^*(F, r)$ in diesen Fällen folgen. Als unser letztes Hauptresultat zeigen wir, dass im unschuldig erscheinenden Fall, bei dem $F = P_\ell$ ein (langer) Pfad ist, die Greedy-Strategie ziemlich gravierend fehlschlägt, und dass der Parameter $m_1^*(F, r)$ ein überraschend komplexes Verhalten offenbart, ein Indiz dafür, dass eine allgemeine geschlossene Formel für den Parameter $m_1^*(F, r)$ nicht existiert.