Ramsey properties of random graphs and hypergraphs

Author(s):
Gugelmann, Luca

Publication Date:
2013

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-010020029

DISS. ETH NO. 21394

Ramsey properties of random graphs and hypergraphs

A dissertation submitted to
ETH ZURICH

for the degree of
DOCTOR OF SCIENCES

presented by
LUCA GUGELMANN
MSc ETH Math.
born 10.04.1984
citizen of Brittnau AG

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Angelika Steger, examiner
Prof. Dr. Mathias Schacht, co-examiner

2013

Abstract

The topic of this thesis are Ramsey-type problems in random graphs and hypergraphs. Ramsey theory has its origins in a famous 1930 paper by Frank P. Ramsey. Loosely speaking its object of study are large structures and conditions under which coloring these structures ensures that certain monochromatic substructures must always appear. A simple example is the question for the smallest complete graph such that regardless of how we color its edges with 2 colors, a monochromatic triangle always appears. The answer to this question is the complete graph K_6 on 6 vertices. In fact, even removing just a single edge from a K_6 makes it 2 colorable without a monochromatic triangle.

Random graphs were first introduced by Erdős and Rényi, and independently Gilbert, in 1959. Erdős and Rényi first considered the so-called $G(n, m)$ model, in which we select uniformly at random among all graphs with n vertices and m edges. Gilbert considered the $G(n, p)$ random graph on n vertices in which every possible edge is present with probability p independently.

Bollobás and Thomason proved in 1987 that all "nice" graph properties have a so-called *threshold*. A threshold is a function $p_0 = p_0(n)$ such that for $p \gg p_0$ it holds that $G(n, p)$ does have the property in question with probability tending to 1 for $n \to \infty$, while for $p \ll p_0$ the same probability tends to 0. These two statements are usually referred to as the 1-statement and the 0-statement respectively. Much of the research in random graph theory has been devoted to finding exact values for the thresholds of various graph properties.

The study of Ramsey properties in random graphs was initiated by Łuczak, Ruciński and Voigt in 1992. For some fixed graph F and $r \geq 2$ they address the question of the threshold for the property that every r-edge-coloring of the random graph $G(n, p)$ contains a monochromatic copy of F. The problem was fully solved by Rödl and Ruciński which proved a 0-statement in 1993 and a matching 1-statement in 1995.

In a sense the results above can be seen as answering the question of how many random edges we need to remove from the complete graph on n vertices such that there exists an r-coloring without a monochromatic copy of a fixed graph F. In this setting we do not care which specific copy of F is monochromatic. A different kind of randomization was recently suggested by Allen, Böttcher, Hladký and Piguet. Instead of removing edges, they suggest to reduce the set of dangerous copies of F. The question is then for the number of copies of F which have to be randomly marked as not dangerous such that an r-coloring of the edges of K_n without a monochromatic copy of F which is still marked as dangerous becomes possible. In this thesis we address the question for the threshold of this problem, and also combine both kinds of randomization.

A k-uniform hypergraph is a generalization of the concept of graph in which every (hyper-)edge contains not 2 but k many vertices for some integer $k \geq 2$. A random k-uniform hypergraph on n vertices is such that every one of the $\binom{n}{k}$ possible hyperedges is present independently with probability p. For $k = 2$ this corresponds to the $G(n, p)$ model.

With intuitive arguments Rödl and Ruciński conjectured in 1998 that a natural extension of their results for the 1-statement in the graph case should also hold for random k-uniform hypergraphs. They proved this conjecture for 2 colors and the complete 3-uniform hypergraph on 4 vertices. Together with Schacht in 2007 they expanded this to all k-partite, k-uniform hypergraphs. In 2010 Friedgut, Rödl and Schacht, settled the general conjecture. Conlon and Gowers also independently obtained similar results.

It is widely believed that this 1-statement is tight for most hypergraphs F. In this thesis we prove a matching 0-statement showing that this is indeed true for many hypergraphs. However we also show that there are many more exceptions to this than in the graph case. In particular we show an example for which the 1-statement is not tight and threshold is given by the so-called *asymmetric* Ramsey game, in which a different hypergraph has to be avoided in each color.

We also turn our attention to so-called *online* problems. In every setting discussed so far we are allowed to see the entire random graph or hypergraph before committing to a coloring. In online games this is no longer the case and edges or vertices are revealed little by little in successive rounds, and we have to immediately commit to a coloring after each such round.

We study the online *balanced Ramsey game* in which a player has r colors and where in each step r random edges of an initially empty graph on n vertices are presented. The player has to immediately assign a different color to each edge and her goal is to avoid creating a monochromatic copy of some fixed graph F for as long as possible. We contrast this game to the similar *Achlioptas game* in which the player is again presented with r edges but is allowed to discard $r-1$ of them. Her goal is again to avoid creating a copy of F. This corresponds to a balanced Ramsey game in which only one color is forbidden. Similarly to the non-online (i.e. *offline*) cases, the typical duration of such a game exhibits a threshold-type behavior.

Krivelevich, Spöhel and Steger asked the question of whether these two games have the same threshold or not, as all results known so far show that this is the case for all non-trees. The intuition behind this question being that the balanced game may in fact not be more "difficult" than the Achlioptas game, as the player is always fighting some worst-case color and is not bothered by the remaining ones. Here we answer this question negatively for the edge-coloring version of these two games. We also consider the vertex-coloring variant and we show that in contrast to the edge case these two games indeed do have the same threshold.

Zusammenfassung

Das Thema dieser Arbeit sind Ramsey-Probleme in Zufallsgraphen und Zufallshypergraphen. Ramsey-Theorie hat ihren Ursprung in einer 1930 verfassten Arbeit von Frank P. Ramsey. Sie befasst sich im weitesten Sinne mit der Erforschung von Bedingungen die beim Färben einer grossen Struktur das Erscheinen von einfarbigen Substrukturen garantieren. Ein einfaches Beispiel ist die Frage nach dem kleinsten vollständigen Graphen, dessen Kanten man nicht mit zwei Farben so färben kann, dass kein einfarbiges Dreieck entsteht. Die Antwort zu dieser Frage ist der vollständige Graph K_6 mit 6 Knoten. Es gilt sogar, dass das Entfernen einer einzigen Kante genügt um eine 2-Färbung zu ermöglichen, welche kein einfarbiges Dreieck enthält.

Zufallsgraphen sind erstmals 1959 in den Arbeiten von Erdős und Rényi, und unabhängig davon die von Gilbert, erwähnt worden. Erdős und Rényi haben das sogenannte $G(n, m)$ Modell eingeführt. In diesem Modell wählt man uniform ein zufälliges Element der Menge aller Graphen mit n Kanten und m Knoten. Gilbert hingegen hat sich mit dem $G(n, p)$ Modell auseinandergesetzt, in dem man in einem Graphen mit n Knoten jede mögliche Kante unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p auswählt.

Bollobás und Thomason haben 1987 bewiesen, dass "schöne" Eigenschaften von Graphen einen *Schwellenwert* haben. Ein Schwellenwert ist eine

Funktion $p_0 = p_0(n)$, so dass für $p \gg p_0$ gilt, dass $G(n,p)$ eine gewisse Eigenschaft mit Wahrscheinlichkeit $1 - o(1)$ besitzt, wogegen für $p \ll p_0$ diese Wahrscheinlichkeit gegen 0 strebt. Um einen solchen Schwellenwert genau zu bestimmen, beweist man üblicherweise eine untere und eine obere Schranke dafür. Ein grosser Teil der Forschung in diesem Gebiet beschäftigt sich dem genauen Bestimmen der Schwellenwerte für interessante Grapheneigenschaften.

Łuczak, Ruciński und Voigt haben 1992 als erste Ramsey-Probleme in Zufallsgraphen betrachtet. Für einen fixen Graphen F und $r \geq 2$ fragen sie nach dem Schwellenwert für die Eigenschaft, dass jede Färbung der Kanten von $G(n,p)$ mit r Farben eine einfarbige Kopie von F enthält. Diese Frage wurde von Rödl und Ruciński vollständig beantwortet, 1993 haben sie eine untere Schranke bewiesen und 1995 eine dazu passende obere Schranke.

In einem gewissen Sinne beantworten diese Resultate die Frage nach der Anzahl zufälliger Kanten, welche man aus einem vollständigen Graphen mit n Knoten entfernen muss, so dass eine r-Färbung möglich wird, welche keine einfarbige Kopie von F enthält. In diesem Zusammenhang ist es egal welche Kopie von F genau einfarbig ist, alle sind gleich gefährlich. Eine andere Art der Randomisierung wurde vor kurzem von Allen, Böttcher, Hladký und Piguet vorgeschlagen. Anstatt Kanten zu entfernen, könnte man auch die Menge der "gefährlichen" Kopien von F kleiner machen. Die Frage ist also nach der Anzahl Kopien von F welche man (zufällig) als ungefährlich markieren muss, um eine r-Färbung von K_n zu ermöglichen, welche keine immer noch gefährliche und einfarbige Kopie von F enthält. In dieser Arbeit bestimmen wir den genauen Schwellenwert für die Anzahl gefährlicher Kopien von F. Wir kombinieren auch die beiden obigen Arten der Randomisierung zu einer einzigen Aussage.

Ein k-uniformer Hypergraph ist eine Verallgemeinerung des Konzeptes eines Graphen. Jede Kante besteht nicht mehr aus 2, sondern aus k vielen Knoten, wobei $k \geq 2$ eine ganze Zahl ist. Ein k-uniformer Zufallshypergraph auf n Knoten enthält jede der $\binom{n}{k}$ möglichen Kanten unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p. Für $k = 2$ entspricht dies dem $G(n,p)$ Modell.

Mit intuitiven Argumenten haben Rödl und Ruciński 1998 die Vermutung aufgestellt, dass ihre Aussagen über die obere Schranke für den Schwellenwert im Graphenfall auch in ähnlicher Form für Hypergraphen gelten müssten. Sie haben dies für den Fall von 2 Farben und dem vollständigen 3-uniformen Hypergraphen auf 4 Knoten bewiesen. Zusammen mit Schacht haben sie ihre Vermutung später auch für k-partite, k-uniforme Hypergraphen bewiesen. Ein Beweis dieser Aussage für beliebige Hypergraphen wurde 2010 von Friedgut, Rödl und Schacht gefunden. Conlon und Gowers haben unabhängig ähnliche Resultate erzielt.

Es wird allgemein angenommen, dass das obige Resultat für eine grosse Klasse von Hypergraphen bestmöglich ist. In dieser Arbeit beweisen wir dies mit einer passenden unteren Schranke. Wir beweisen aber auch, dass im Gegensatz zum Graphenfall für viel mehr Hypergraphen die obere Schranke von Rödl und Ruciński nicht bestmöglich ist. Insbesondere zeigen wir ein Beispiel von einem Schwellenwert der strikte unter deren oberen Schranke liegt, und vom sogenannten *asymmetrischen* Ramsey-Problem herrührt. Im Gegensatz zum obigen (symmetrischen) Problem versucht man im asymmetrischen Fall in jeder Farbe ein anderer Hypergraph zu vermeiden.

Wir betrachten auch sogenannte *online* Probleme. In den bisherigen Problemstellungen war der gesamte zu färbende Graph oder Hypergraph vor dem Färben bekannt. In online Spielen ist dies nicht mehr der Fall, und Knoten oder Kanten werden schrittweise in mehreren Runden enthüllt. Wir müssen die Färbung für die neu enthüllten Knoten oder Kanten sofort bestimmen, bevor die nächste Runde beginnt.

Wir betrachten das *balancierte Ramsey-Spiel* in dem der Spieler r Farben zur Verfügung hat, und in jeder Runde r Kanten eines anfänglich leeren Graphen auf n Knoten enthüllt werden. Der Spieler muss nach jeder Runde jeder Kante eine unterschiedliche Farbe zuweisen. Sein Ziel ist es eine einfarbige Kopie eines fixen Graphens F zu vermeiden. Wir vergleichen dieses Spiel mit dem ähnlichen *Achlioptas-Spiel*, in dem in jeder Runde auch r Kanten enthüllt werden, wo der Spieler aber $r-1$ davon wieder verwerfen darf. Das Ziel ist auch hier wieder eine Kopie von F zu verhindern. Das entspricht einem balancierten Ramsey-Spiel, in dem nur Kopien von F in einer fixen Farbe verboten sind. Gleich wie in den nicht-online (d.h. *offline*) Fällen hat die erwartete Dauer eines solchen Spiels einen Schwellenwert.

Krivelevich, Spöhel und Steger haben die Frage gestellt ob diese beiden online Spiele den gleichen Schwellenwert haben oder nicht. Die bisher bekannten Resultate zeigen nämlich, dass dies für alle Graphen (ausser Bäume) der Fall ist. Die Intuition hinter dieser Frage ist, dass das balancierte Ramsey-Spiel eigentlich nicht schwerer als das Achlioptas-Spiel sein könnte, weil der Spieler sowieso immer nur gegen eine schlechtestmögliche Farbe “ankämpft”, und die restlichen $r-1$ Farben somit eigentlich irrelevant sind. Im letzten Teil dieser Arbeit beantworten wir diese Frage und zeigen, dass diese zwei Spiele auch für nicht-Bäume unterschiedliche Schwellenwerte haben können. Wir betrachten auch die Varianten dieser Spiele, in denen Knoten statt Kanten enthüllt und gefärbt werden. In diesem Fall gilt im Gegensatz zum Kantenfall, dass die beiden Spiele tatsächlich den gleichen Schwellenwert haben.