



Doctoral Thesis

## Structural parameters in combinatorial objects

**Author(s):**

Okamoto, Yoshio

**Publication Date:**

2005

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-004931505> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

DISS. ETH No. 15901, 2005

# Structural Parameters in Combinatorial Objects

A dissertation submitted to the  
Swiss Federal Institute of Technology Zürich  
for the degree of Doctor of Technical Sciences

presented by  
Yoshio Okamoto  
Master of Systems Science, the University of Tokyo, Japan  
born July 22, 1976 in Hekinan, Japan  
citizen of Japan

submitted to  
Prof. Emo Welzl, ETH Zürich, examiner  
Prof. Komei Fukuda, ETH Zürich, co-examiner

---

## Abstract

When we deal with combinatorial objects mathematically or algorithmically, we may observe that the intrinsic difficulty is governed by some structural parameters. The use of structural parameters is diverse: it often happens that finding a good structural parameter opens a door to proofs of mathematical statements. On the computational side, there are lots of algorithmic results stating that an algorithm is more efficient if a certain structural parameter is smaller. Also, successful structural parameters are further generalized or specialized for particular purposes so that the use can fit into broader context. Treewidths of graphs and VC-dimension used in discrete and computational geometry are such examples.

This thesis tries to identify some nice structural parameters for three combinatorial or geometric objects. It consists of three rather independent parts.

In Part I, we consider the clique complex of a graph, which is the family of all cliques in the graph and is a special independence system (i.e., closed under taking subsets). It is known that every independence system is the intersection of finitely many matroids, and a natural greedy algorithm gives a solution of value at most  $k$  times away from the optimal value for the maximum weight independent set problem when the independence system is the intersection of  $k$  matroids. Therefore, we regard this  $k$  as a nice structural parameter. Our main result is the characterization of the clique complexes which are the intersections of  $k$  matroids for each natural number  $k$ . The same question was asked by Fekete, Firla & Spille for matching complexes, but since a matching complex is a special clique complex, our result is more general than theirs. Several related results are provided.

In Part II, we study abstract convex geometries introduced by Edelman & Jamison in 1985. An abstract convex geometry is a combinatorial abstraction of convexity concepts appearing in a lot of objects such as point configurations, partially ordered sets, trees and rooted graphs, and it is defined in a purely combinatorial way. Our result states that actually each abstract convex geometry can be obtained from some point configuration. This result can be seen as an analogue of the topological representation theorem for oriented matroids by Folkman

& Lawrence. However, our theorem gives an affine-geometric representation of an abstract convex geometry. This suggests the intrinsic simplicity of abstract convex geometries, and that the minimum dimension of a representation can be considered as a good structural parameter for an abstract convex geometry. As an application of our representation theorem, we study open problems raised by Edelman & Reiner about local topology of the free complex of an abstract convex geometry. We settle their problem affirmatively when the realization is 2-dimensional and separable. This can be seen as a first step to the solution of their problems.

In Part III, we design fixed-parameter algorithms for some geometric optimization problems. Fixed-parameter tractability is a concept capturing hardness of the problem when some parameter associated to the problem is small. We consider the number of inner points as a parameter for geometric optimization problems on a 2-dimensional point set. Since many of such problems can be solved in polynomial time when the number of inner points is zero (i.e., the points are in convex position), this parameter should be a nice choice. To support this intuition, we consider two specific problems, namely the traveling salesman problem and the minimum weight triangulation problem. For both of them, we devise fixed-parameter algorithms, and show that they can be solved in polynomial time when the number of inner points is at most logarithmic in the number of input points.

---

## Zusammenfassung

Bei der mathematischen oder algorithmischen Betrachtung kombinatorischer Objekte stellt man fest, dass die intrinsische Schwierigkeit von einigen strukturellen Parametern der Objekte beherrscht wird. Die Verwendung struktureller Parameter dient zu verschiedenen Zwecken: einerseits tritt häufig der Fall ein, dass eine gute Auswahl eines strukturellen Parameters eine Tür zu Beweisen mathematischer Aussagen öffnet. Andererseits existiert eine Vielzahl von algorithmischen Ergebnissen, die zeigen, dass ein Algorithmus effizienter ist, wenn ein bestimmter struktureller Parameter klein ist. Zudem werden erfolgreiche strukturelle Parameter oftmals weiter verallgemeinert oder für bestimmte Zwecke weiter spezialisiert, um so in einem breiteren Zusammenhang Verwendung zu finden. Beispiele für solche Parameter sind Baumweiten von Graphen und VC-Dimension in diskreter Geometrie.

In dieser Arbeit wird versucht, einige gute strukturelle Parameter für drei kombinatorische oder geometrische Objekte zu identifizieren. Die Arbeit besteht aus drei unabhängigen Teilen.

In Teil I betrachten wir den Clique-Komplex eines Graphen, unter dem die Familie aller Cliques des Graphen verstanden wird und der ein spezielles Unabhängigkeitssystem darstellt. Es ist bekannt, dass jedes Unabhängigkeitssystem Durchschnitt von endlich vielen Matroiden ist, und dass ein natürlicher Greedy-Algorithmus für das Problem einer unabhängigen Menge maximalen Gewichts einen Wert liefert, der um höchstens einen Faktor  $k$  von der optimalen Lösung abweicht, wenn das Unabhängigkeitssystem Durchschnitt von  $k$  Matroiden ist. Daher betrachten wir dieses  $k$  als guten strukturellen Parameter. Das Hauptresultat dieses Abschnitts ist die Charakterisierung von Clique-Komplexen, die Durchschnitt von  $k$  Matroiden sind (für jede natürliche Zahl  $k$ ). Die gleiche Frage wurde von Fekete, Firla und Spille für Matching-Komplexe gestellt. Da ein Matching-Komplex ein Spezialfall eines Clique-Komplexes ist, ist unser Resultat wesentlich allgemeiner. In diesem Teil werden darüber hinaus weitere Resultate in Zusammenhang mit diesem Problem präsentiert.

Teil II behandelt das Studium abstrakter konvexer Geometrien, die von Edelman und Jamison 1985 eingeführt wurden. Eine ab-

strakte konvexe Geometrie ist eine kombinatorische Abstraktion von Konzepten der Konvexität, die in vielen Objekten wie Konfigurationen von Punkten, partiell geordneten Mengen, Bäumen oder Wurzelgraphen eine wichtige Rolle spielen; eine abstrakte konvexe Geometrie wird allerdings auf rein kombinatorische Weise definiert. Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass man jede abstrakte konvexe Geometrie von bestimmten Konfigurationen von Punkten erhalten kann. Dieses Ergebnis kann als Analogon zum Satz der topologischen Darstellung von orientierten Matroiden von Folkman und Lawrence betrachtet werden. Im Gegensatz zu Folkman und Lawrence geben wir jedoch eine affin-geometrische Darstellung von abstrakten konvexen Geometrien an. Dies suggeriert zum einen die intrinsische Einfachheit von abstrakten konvexen Geometrien, zum anderen suggeriert es auch die Wahl der minimalen Dimension einer Darstellung als guten strukturellen Parameter. Als eine Anwendung unseres Theorems betrachten wir offene Probleme von Edelman und Reiner über die lokale Topologie des freien Komplexes einer abstrakten konvexen Geometrie. Wir lösen dieses Problem im positiven Sinn für den Fall, dass die Realisierung zweidimensional und separabel ist. Dies kann als erster Schritt zur vollständigen Lösung der Probleme von Edelman und Reiner betrachtet werden.

In Teil III entwerfen wir parametrisierte Algorithmen für einige geometrische Optimierungsprobleme. Parametrisierte Komplexität ist ein Konzept, um die Schwierigkeit des Problems zu erfassen, wenn ein bestimmter Parameter des Problems klein ist. Wir betrachten die Anzahl innerer Punkte als einen Parameter für geometrische Optimierungsprobleme auf einer zweidimensionalen Punktmenge. Da viele Probleme dieser Art in polynomieller Zeit gelöst werden können, wenn die Anzahl der inneren Punkte null ist (i.e., die Punkte sind in konvexer Lage), sollte dieser Parameter eine gute Auswahl sein. Um die Intuition zu bekräftigen, betrachten wir zwei spezielle Probleme: das Rundreiseproblem sowie das Problem der Triangulierung minimalen Gewichts. Für beide Probleme entwerfen wir parametrisierte Algorithmen und zeigen, dass die Probleme in polynomieller Zeit gelöst werden können, wenn die Anzahl der inneren Punkte logarithmisch in der Anzahl der Eingabepunkte ist.