



Doctoral Thesis

## Exponential Time Complexity of SAT and Related Problems

**Author(s):**

Traxler, Patrick

**Publication Date:**

2010

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-006113172> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH No. 18902

# Exponential Time Complexity of SAT and Related Problems

A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of  
DOCTOR OF SCIENCES

presented by  
PATRICK TRAXLER  
Diplom-Ingenieur, Technische Universität Wien  
born 26.01.1981  
citizen of Austria

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. Emo Welzl, examiner  
Prof. Dr. Martin Grohe, co-examiner

2010

## Abstract

Our results are contributions to the exponential time complexity of NP-hard problems. We consider in particular the exponential time complexity of the Boolean Satisfiability problem (SAT) and variants of it.

To study the exponential time complexity of a problem, we fix a parameter of the problem: The number of variables  $n$  for SAT. We are interested in the constant  $c$  in the exponential factor  $2^{cn}$  of a time bound of an algorithm for SAT. The smallest such constant captures the exponential time complexity of SAT. Our results:

- (1) There is a problem that has higher exponential time complexity than SAT and comparable problems, assuming the *Exponential Time Hypothesis* (ETH). This problem is the *Constraint Satisfaction Problem* (CSP). The reason is a dependency of the complexity of CSP on the number of values a variable can take.
- (2) Approximate counting of satisfying assignments has exactly the same exponential time complexity as finding a satisfying assignment. In the proof of this theorem we analyze a concrete algorithm for approximate counting. A similar algorithm, for which no mathematical analysis of the approximation guarantee was known, has been already successful in practice.

These results are meant to improve our understanding of the exponential time complexity of NP-hard problems. Besides the mentioned results, the main contributions of this work, we discuss a couple of other results.

## Zusammenfassung

Unsere Resultate sind Beiträge zur exponentiellen Zeitkomplexität NP-harter Probleme. Wir beschäftigen uns insbesondere mit der exponentiellen Zeitkomplexität des Booleschen Erfüllbarkeitsproblems (SAT) und Varianten davon.

Um die exponentielle Zeitkomplexität eines Problems zu studieren, fixieren wir einen Parameter des Problems: Für SAT die Anzahl der Variablen  $n$ . Wir interessieren uns für die Konstante  $c$  im exponentiellen Faktor  $2^{cn}$  einer Zeitschranke eines Algorithmus für SAT. Die kleinste solche Konstante beschreibt die exponentiellen Zeitkomplexität von SAT. Unsere Resultate:

- (1) Es gibt ein Problem, das höhere exponentielle Zeitkomplexität als SAT und vergleichbare Probleme hat, unter der Annahme der *Exponentialzeit-Hypothese* (ETH). Bei dem Problem handelt es sich um das *Constraint Satisfaction Problem* (CSP). Der Grund hierfür ist eine Abhängigkeit der Komplexität von CSP von der Anzahl der Werte, die eine Variable annehmen kann.
- (2) Das approximative Zählen erfüllender Belegungen hat exakt die gleiche exponentielle Zeitkomplexität wie das Finden einer erfüllenden Belegung. Im Beweis dieses Satzes analysieren wir einen konkreten Algorithmus zum approximativen Zählen. Ein ähnlicher Algorithmus, für den es bisher keine mathematische Analyse der Approximationsgüte gab, hat sich bereits in praktischen Anwendungen behauptet.

Diese Resultate sollen dazu beitragen, ein besseres Verständnis der exponentiellen Zeitkomplexität NP-harter Probleme zu erlangen. Neben den erwähnten Resultaten, den Hauptresultaten dieser Arbeiten, werden eine Reihe weiterer Resultate diskutiert.