

Diss. ETH No. 20341

Tensor Norms And Non-Locality

A dissertation submitted to

ETH ZURICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by

DEJAN D. DUKARIC
MSc in Computer Science, ETHZ

born May 28, 1980
citizen of Emmen, LU, Switzerland

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Stefan Wolf, examiner
Prof. Dr. Ueli Maurer, co-examiner
Prof. Dr. Renato Renner, co-examiner
Prof. Dr. Stephanie Wehner, co-examiner

2012

Abstract

Non-locality is arguably one of the most striking aspects of the difference between quantum and classical physics. In this thesis, we investigate non-locality in an abstract framework where classical and quantum theories are special cases. In this framework, we investigate devices with classical inputs and outputs that are shared between two separate parties and where the internal workings of the devices are unknown to us. We refer to such devices as bipartite systems, and we assume that they can be modelled by conditional probability distributions. If the behaviour of a bipartite system cannot be explained by local processing on shared randomness, the bipartite system is called non-local. Such non-local behaviour can be observed in nature when two separate parties share entangled quantum states on which they can perform local but non-commuting measurements. Bipartite non-local systems are powerful resources for various communication and information theoretic tasks. For example, they can be used to establish a secret key between two parties, to reduce the communication complexity of distributed computing, or to increase the winning probability of two-prover games.

The contribution of this thesis is two-fold. First, we develop a framework, based on the theory of tensor norms, that allows us to study properties of bipartite systems, two-prover games, and Bell inequalities. Second, in order to demonstrate the power and usefulness of the framework we present four applications in quantum information theory.

The framework contains three main parts. The first part treats the embedding of bipartite systems and two-prover games into tensor product spaces. This embedding allows us to evaluate different tensor norms on bipartite systems (yielding convex sets of bipartite systems) and two-prover games (yielding winning probabilities of two-prover games). The second part introduces the composition of bipartite systems and two-prover games. This allows us to combine bipartite systems in order to ob-

tain larger systems and to study parallel repetition of two-prover games. Finally, the third part exposes how wirings can be represented as linear maps on tensor product spaces. We prove that the values of tensor norms for bipartite systems do not increase under wirings. This result enables us to study sets of bipartite systems that are closed under wirings.

We prove four main results with the help of the framework. First, we derive an upper bound on the maximal winning probability of two-prover games, where the provers have entanglement as resources. In order to prove this, we first derive a generalized version of Grothendieck's inequality that includes settings of arbitrary output alphabet sizes. We furthermore establish close connections between quantum systems and the Hilbertian tensor norm and between local systems and the projective tensor norm.

Second, we provide an alternative proof of the perfect parallel repetition theorem for entangled XOR games. We prove this by showing that the dual Hilbertian tensor norm obeys a direct-product theorem and that the winning probability of entangled XOR games can be computed by the dual Hilbertian tensor norm.

Third, we show that there exist quantum systems that cannot be obtained by wirings of isotropic quantum systems. In order to prove this result, we show that the dual Hilbertian tensor norm induces a convex set of bipartite systems that is closed under wirings and that this convex set is closely related to the set of binary quantum systems.

Fourth, we prove sufficient conditions for tensor norms that imply the impossibility of non-locality distillation for isotropic systems. We also construct a continuous hierarchy of cross norms and prove, based on two conjectures and the sufficient conditions, that non-locality distillation is impossible for isotropic quantum systems.

Zusammenfassung

Nicht-Lokalität ist wohl einer der auffälligsten Unterschiede zwischen Quantenphysik und klassischer Physik. In dieser Arbeit untersuchen wir Nicht-Lokalität in einem abstrakten Framework, in dem die klassische- und die Quantentheorie Spezialfälle sind. Wir betrachten Geräte mit klassischen Ein- und Ausgängen, die von zwei getrennten Parteien geteilt werden und deren interne Funktionsweise unbekannt für uns ist. Wir nennen solche Geräte bipartite Systeme, und wir nehmen an, dass sie durch bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilungen modelliert werden können. Wenn das Verhalten eines bipartiten Systems nicht durch lokale Verarbeitung auf gemeinsamer zufälliger Information erklärt werden kann, dann wird das bipartite System nicht-lokal genannt. Solches nicht-lokales Verhalten kann in der Natur beobachtet werden, wenn zwei getrennte Parteien verschränkte Quantenzustände teilen, auf denen sie lokale Messungen durchführen können. Nicht-lokale Systeme sind leistungsstarke Ressourcen für verschiedene kommunikations- und informationstheoretische Aufgaben. Zum Beispiel können sie verwendet werden, um einen geheimen Schlüssel zwischen zwei Parteien zu erzeugen, um die Kommunikations-Komplexität von verteilten Berechnungen zu verringern oder um die Gewinnwahrscheinlichkeit von Two-Prover Spielen zu erhöhen.

Der Beitrag dieser Arbeit ist zweigeteilt. Zunächst entwickeln wir ein Framework basierend auf der Theorie der Tensor Normen, welches uns erlaubt Eigenschaften von bipartiten Systemen, Two-Prover Spielen, und Bell Ungleichungen zu untersuchen. Um den Nutzen des Frameworks zu demonstrieren, präsentieren wir zweitens vier Anwendungen in der Quanten-Informationstheorie.

Das Framework besteht aus drei Hauptteilen. Der erste Teil behandelt die Einbettung von bipartiten Systemen und Two-Prover Spielen in Tensorprodukt-Räume. Diese Einbettung ermöglicht es uns, unterschiedliche Tensor Normen auf bipartiten Systemen und Two-Prover Spielen

auszuwerten. Der zweite Teil führt die Komposition bipartiter Systemen und Two-Prover Spielen ein. Dies erlaubt uns bipartite Systeme zu kombinieren, um grössere Systeme zu erhalten und die parallele Wiederholung von Two-Prover Spielen zu studieren. Schliesslich zeigt der dritte Teil wie lokale Verdrahtungen von Systemen als lineare Abbildungen auf Tensorprodukt-Räume dargestellt werden können. Wir beweisen, dass die Werte der Tensor Normen für bipartite Systeme nicht erhöht werden können unter der Anwendung von lokalen Verdrahtungen. Dieses Ergebnis ermöglicht es uns Mengen von bipartiten Systemen zu studieren, welche unter der Anwendung von lokalen Verdrahtungen abgeschlossen sind.

Wir beweisen vier Anwendungen in der Quanten-Informationstheorie. Zunächst leiten wir Obergrenzen für die maximale Gewinnwahrscheinlichkeit von Two-Prover Spielen her, in denen die Prüfer Verschränkung als Ressource haben. Um dies zu beweisen, leiten wir eine verallgemeinerte Version der Grothendieck Ungleichung her, die es erlaubt beliebigen Alphabet Grössen zu studieren. Darüber hinaus stellen wir eine enge Verbindung zwischen Quanten-Systemen und der Hilbertschen Tensor Norm und zwischen lokalen Systemen und der projektiven Tensor Norm her.

Zweitens zeigen wir wie sich die Gewinnwahrscheinlichkeit von parallel wiederholten und verschränkten XOR-Spielen verhält. Wir beweisen dies, indem wir zeigen, dass die duale Hilbertsche Tensor Norm einer Produktregel gehorcht und dass die Gewinnwahrscheinlichkeit von verschränkten XOR-Spielen durch die duale Hilbertsche Tensor Norm berechnet werden kann.

Drittens zeigen wir, dass es Quanten-Systeme gibt, die nicht durch lokalen Verdrahtungen von isotropen Quanten-Systemen erhalten werden können. Um dieses Ergebnis zu beweisen zeigen wir, dass die duale Hilbertsche Tensor Norm eine konvexe Menge von bipartiten Systemen induziert, die abgeschlossen ist unter der Anwendung von lokalen Verdrahtungen und dass diese konvexe Menge eng mit der Menge aller binären Quanten-Systeme verbunden ist.

Viertens beweisen wir hinreichende Bedingungen für Tensor Normen, welche die Unmöglichkeit der Nicht-Lokalitäts Destillation für isotrope Systeme impliziert. Ausserdem konstruieren wir eine kontinuierliche Hierarchie von Kreuz-Normen und beweisen, basierend auf zwei Vermutungen und den hinreichenden Bedingungen, dass Nicht-Lokalitäts Destillation unmöglich ist für isotrope Quanten-Systeme.