

DISS. ETH NO. 20668

**EXACT ALGORITHMS FOR
CONSTRAINT SATISFACTION
PROBLEMS**

A dissertation submitted to
ETH ZÜRICH

for the degree of
DOCTOR OF SCIENCES

presented by
ROBIN ALEXANDER MOSER
MSc ETH
born 14.08.1983
citizen of Inkwil (BE), Switzerland

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Emo Welzl, examiner
Prof. Dr. Uwe Schöning, co-examiner
Prof. Dr. Gábor Tardos, co-examiner

2012

Abstract

The Boolean satisfiability problem (SAT) and its generalization to variables of higher arities – constraint satisfaction problems (CSP) – can arguably be called the most “natural” of all NP-complete problems. The present work is concerned with their algorithmic treatment. It consists of two parts.

The first part investigates CSPs for which satisfiability follows from the famous Lovász Local Lemma. Since its discovery in 1975 by Paul Erdős and László Lovász, it has been known that CSPs without dense spots of interdependent constraints always admit a satisfying assignment. However, an iterative procedure to discover such an assignment was not available. We refine earlier attempts at making the Local Lemma algorithmic and finally present a polynomial time algorithm able to make almost all known applications constructive.

In the second part, we leave behind the class of polynomial time tractable problems and instead investigate the randomized exponential time algorithm devised and analyzed by Uwe Schöning in 1999, which solves arbitrary clause satisfaction problems. Besides some new interesting perspectives on the algorithm, the main contribution of this part consist of a refinement of earlier approaches at derandomizing Schöning’s algorithm. We present a deterministic variant which losslessly reaches the performances of the randomized original.

Zusammenfassung

Die Erfüllbarkeitsprobleme SAT und CSP dürfen mit Fug als die “natürlichen” aller NP-vollständigen Probleme bezeichnet werden. Die vorliegende Arbeit befasst sich mit deren algorithmischen Behandlung. Sie besteht aus zwei Teilen.

Der erste Teil befasst sich mit Erfüllbarkeitsproblemen, deren Lösbarkeit aus dem bekannten Lovász Local Lemma folgt. Während seit dessen Entdeckung im Jahre 1975 durch Paul Erdős und László Lovász feststeht, dass Erfüllbarkeitsprobleme mit einer nirgends zu dichten Konzentration an Klauseln immer eine erfüllende Belegung zulassen, war ein algorithmisches Verfahren zur tatsächlichen Bestimmung dieser Lösung lange nicht bekannt. Wir verfeinern frühere Ansätze, das Local Lemma algorithmisch zu machen und präsentieren schliesslich einen Polynomialzeitalgorithmus, der für beinahe alle bisher bekannten Anwendungen des Local Lemma einen konstruktiven Beweis liefert.

Im zweiten Teil verlassen wir die Klasse der in polynomieller Zeit lösbar Probelme und betrachten stattdessen den von Uwe Schöning im Jahre 1999 vorgeschlagenen und analysierten randomisierten Exponentialzeitalgorithmus für allgemeine Klauselerfüllungsprobleme. Als Hauptbeitrag nebst weiteren Aspekten verfeinern wir frühere Ansätze, diesen Algorithmus zu derandomisieren und präsentieren so dann die erste deterministische Variante, welche gegenüber dem Zufallsalgorithmus nicht an Effizienz einbüsst.