

DISS. ETH No. 20044

Combinatorial Games on Graphs

A dissertation submitted to
ETH ZÜRICH

for the degree of
DOCTOR OF SCIENCES

presented by
HEIDI GEBAUER
M.Sc. ETH in Computer Science
born August 21, 1981
citizen of Zürich, Switzerland

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Emo Welzl, examiner
Prof. Dr. Tomasz Łuczak, co-examiner
Prof. Dr. Tibor Szabó, co-examiner

2011

Abstract

The theory of combinatorial games is a rapidly developing subject of modern combinatorics. It is concerned with the study of certain two-player-games, ranging from popular games as Tic-Tac-Toe and Connect Four to merely abstract games defined in graph-theoretic terms. Besides being of interest on their own right, combinatorial games are strongly connected to other areas of combinatorics, such as the probabilistic method, Ramsey theory, random graphs and extremal graph theory. The study of this subject inspired the derivation of several important results in theoretical computer science. One such highlight is the first algorithmization of the famous Lovász Local Lemma by Beck.

Though some scattered results about combinatorial games appeared much earlier, the systematic research on this subject originated from a seminal paper of Erdős and Selfridge. Later the study of combinatorial games was developed greatly by Beck in a series of influential works. Since then this field has grown more and more, and quite a few new and important results have been published.

An intriguing phenomenon in the theory of combinatorial games is the mysterious relationship to probability theory: Informally, the outcome of a game involving two clever opponents can often be predicted quite accurately by studying the setting where the same game is played by two players who act completely randomly. This phenomenon, which is often referred to as the *random graph intuition*, was first pointed out by Chvátal and Erdős, only a few years after the seminal paper of Erdős and Selfridge was published. So far, the random graph intuition has proven to be valid in various games, and we only know surprisingly few games where it fails.

In this thesis we address several issues arising in the study of combinatorial games. First, we verify the random graph intuition for certain games, thereby solving some open problems by Beck. Second, we consider some games for which the question “who wins?” is already solved. For these games we are concerned with finding *fast* winning

Abstract

strategies, i.e., strategies which guarantee that a player can win in very few moves. Third, we study a game-theoretic variant of the famous Ramsey-numbers. Finally, we construct a special class of binary trees with certain structural properties. These trees allow us to disprove a conjecture of Beck on combinatorial games, and, moreover, they also lead to a new result in the field of satisfiability of Boolean formulas. This is yet another example for the fact that combinatorial games connect to various problems in (sometimes seemingly unrelated) other areas.

Zusammenfassung

Die kombinatorische Spieltheorie ist ein junges, sich rasant entwickelndes Gebiet der Kombinatorik, auf dem in den letzten Jahren grosse Fortschritte erzielt wurden. Es beschäftigt sich mit der Analyse einer bestimmten Klasse von Spielen für zwei Mitspieler – sie beinhaltet sowohl bekannte, verbreitete Gesellschaftsspiele wie Tic Tac Toe oder Vier gewinnt, als auch eher abstrakte Spiele, deren Beschreibung auf graphentheoretischen Begriffen basiert. Die kombinatorische Spieltheorie ist eng verbunden mit anderen Gebieten der Kombinatorik, wie beispielsweise der Ramsey-Theorie, der extremalen Graphentheorie, der probabilistischen Methode und der Theorie der randomisierten Graphen. Einige Resultate in diesem Themenbereich dienen überdies als Inspiration für die Herleitung bedeutender Ergebnisse in der Theoretischen Informatik. Ein solcher Glanzpunkt ist beispielsweise die erste Algorithmisierung des berühmten Lovász Local Lemma von Beck.

Obschon einzelne Resultate über kombinatorische Spiele bereits viel früher publiziert worden waren, wird die wegweisende Arbeit von Erdős und Selfridge weithin als Beginn der systematischen Forschung auf diesem Gebiet angesehen. Das Studium der kombinatorischen Spiele wurde später von Beck in einer Reihe von einflussreichen Arbeiten bedeutend weiterentwickelt. In der Zwischenzeit ist dieses Gebiet mehr und mehr gewachsen, und es wurden verschiedene wichtige Resultate publiziert.

Ein sehr verblüffendes Phänomen in der Theorie der kombinatorischen Spiele sind die überraschenden Parallelen zur Wahrscheinlichkeitstheorie: Der Ausgang eines Spiels lässt sich, vereinfacht gesagt, relativ oft erstaunlich genau voraussagen, indem man das Szenario analysiert, bei welchem zwei komplett zufällige Spieler gegeneinander agieren. Dieses Phänomen, welches oft als *random graph intuition* bezeichnet wird, wurde als erstes von Chvátal und Erdős aufgezeigt, lediglich wenige Jahre nach der Publikation der bahnbrechenden Arbeit von Erdős und Selfridge. Bis jetzt konnte diese Intuition für diverse Spiele bestätigt werden, und es ist erst für überraschend wenige Spiele bekannt, dass die Intuition in

Zusammenfassung

diesem Fall nicht zutrifft.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit verschiedenen Aspekten, die beim Studium der kombinatorischen Spiele auftreten.

Zunächst verifizieren wir die *random graph intuition* für einige ausgewählte Spiele, was uns unter anderem ermöglicht, mehrere von Beck gestellte offene Probleme zu lösen. Ausserdem betrachten wir einige Spiele, für welche die Frage "welcher Spieler gewinnt?" bereits beantwortet ist. Für diese Spiele entwickeln wir sogenannte *schnelle Strategien*, das bedeutet Strategien, welche garantieren, dass ein Spieler schon in relativ wenigen Zügen gewinnen kann. Desweiteren studieren wir eine spieltheoretische Variante der berühmten Ramsey-Zahlen. Schlussendlich konstruieren wir eine spezielle Klasse von binären Bäumen mit bestimmten strukturellen Eigenschaften. Mithilfe dieser Bäume können wir zum einen eine Vermutung von Beck über kombinatorische Spiele widerlegen, und zum andern ein neues Ergebnis über die Erfüllbarkeit von logischen Formeln herleiten. Dies illustriert einmal mehr die Tatsache, dass kombinatorische Spiele eng mit einer Vielzahl von Problemen in anderen (manchmal scheinbar unverwandten) Gebieten zusammenhängen.