DISS. ETH N$^{\text{O}}$ 21600

ON EXPANSION AND SPECTRAL PROPERTIES OF SIMPLICIAL COMPLEXES

A dissertation submitted to

ETH ZÜRICH

for the degree of

DOCTOR OF SCIENCES

presented by

ANNA GUNDERT

Dipl. Math., Freie Universität Berlin
born November 19, 1981
citizen of Germany

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. E. Welzl, examiner
Prof. Dr. M. Farber, co-examiner
Prof. Dr. U. Wagner, co-examiner

2013

Abstract

This thesis deals with simplicial complexes as higher-dimensional generalizations of graphs. This perspective, the combinatorial study of simplicial complexes, has attracted increasing attention in recent years. Its aim is to find higher-dimensional analogues of basic properties and results from graph theory. This thesis mostly focusses on the notion of graph expansion and higher-dimensional notions corresponding to it.

In the first part of the thesis we consider a model of *random complexes*, introduced by Linial and Meshulam, that is a higher-dimensional analogue of the Erdős-Rényi random graph $G(n, p)$. We present two results generalizing well-established results for random graphs. First, we consider the threshold for the property of containing a subdivision of any fixed complete complex. The second result on random complexes concerns the eigenvalues of higher-dimensional analogues of adjacency matrices and graph Laplacians. We show that for higher-dimensional random complexes the spectra of these matrices have a certain concentration behaviour that has also been observed for random graphs.

For graphs, one of the reasons why the eigenvalues of adjacency matrices and Laplacians are of interest is their close connection to expansion. The spectral gap of a graph can be seen as a measure of its edge expansion that is computable in polynomial time. In the second part of this thesis we consider approaches to finding higher-dimensional analogues of this phenomenon.

There are several higher-dimensional notions that generalize edge expansion. One, *combinatorial expansion*, is based on cohomological notions and was suggested independently by Gromov, Linial and Meshulam and Newman and Rabinovich. We show that for combinatorial expansion the direct analogue of the graph situation fails: Spectral expansion does not imply combinatorial expansion in higher dimensions. It does however imply a weaker expansion property, as was shown by

Parzanchevski, Rosenthal and Tessler. We present a strengthening of their proof that yields an intermediate expansion property.

We will then consider two other approaches to finding a lower bound for combinatorial expansion in higher dimensions that is polynomially computable. The first approach is to consider semidefinite relaxations of a polynomial program describing combinatorial expansion. The second considers higher-dimensional notions of quasirandomness that were introduced by Gowers.

The eigenvalues of a graph also express properties other than expansion. Recently, Trevisan established a close connection of the largest Laplacian eigenvalue to the bipartiteness ratio, measuring how close a graph is to having a bipartite component. We present a generalization of a part of his result to 2-dimensional simplicial complexes.

The last part of this thesis deals with maps of simplicial complexes into Euclidean spaces and with questions concerning the intersections of images of simplices under such maps. We establish a connection between the non-trivial eigenvalues of the Laplacian of a simplicial complex and the minimal number of crossings of image simplices under any affine map. In the last chapter, we consider the overlap number, the maximal number of image simplices sharing a common point. We study a structure, *pagodas*, introduced by Matoušek and Wagner in order to improve the known bounds for the overlap numbers of complete 3-complexes.

Zusammenfassung

Diese Arbeit befasst sich mit Simplizialkomplexen als Verallgemeinerung von Graphen. Diese Sichtweise, die auch als „kombinatorische Theorie der Simplizialkomplexe" bezeichnet wird, gewinnt zunehmend an Aufmerksamkeit. Das Ziel hierbei ist es, grundlegende Begriffe und Resultate der Graphentheorie in höhere Dimensionen zu überführen, oder zumindest zu sehen, in wie weit solche Verallgemeinerungen möglich sind. Diese Arbeit konzentriert sich vor allem auf höher-dimensionale Entsprechungen des Begriffes der Graphenexpansion.

Der erste Teil der Arbeit befasst sich mit einem Modell für zufällige Simplizialkomplexe, genauer mit einer Verallgemeinerung des Erdős-Rényi-Zufallsgraphenmodells $G(n, p)$, die von Linial und Meshulam eingeführt wurde. Es werden zwei Ergebnisse präsentiert, beides höherdimensionale Analoga bekannter Graphenresultate. Zunächst betrachten wir den Schwellenwert für die Eigenschaft eines Zufallskomplexes, eine Unterteilung eines festen vollständigen Komplexes zu enthalten. Das zweite Ergebnis behandelt die Eigenwerte von höher-dimensionalen Verallgemeinerungen der Adjazenz- und Laplace-Matrizen von Graphen. Wir zeigen, dass die Eigenwerte dieser Matrizen für Zufallskomplexe höherer Dimension bezüglich ihrer Konzentration dasselbe Verhalten aufweisen wie auch die Eigenwerte von Zufallsgraphen.

Das Interesse an den Eigenwerten solcher Matrizen für Graphen ist unter anderem in der engen Beziehung, die diese zu Expansionseigenschaften aufweisen, begründet. Der zweite Eigenwert der Laplace-Matrix eines Graphen kann als in polynomieller Zeit berechenbares Maß für seine Kantenexpansion angesehen werden. Der zweite Teil dieser Arbeit behandelt Ansätze, höher-dimensionale Entsprechungen dieses Phänomens zu finden.

Es bestehen verschiedene Ansätze für die Verallgemeinerung von Kantenexpansion in höheren Dimensionen. Ein auf kohomologischen Be-

griffen basierender Ansatz, als ,,kombinatorische Expansion" bezeichnet, wurde von Gromov vorgschlagen, tauchte aber unabhängig davon auch in Arbeiten von Linial und Meshulam und von Newman und Rabinovich auf. Wir zeigen, dass die direkte Verallgemeinerung des oben erwähnten Graphen-Phänomens für diesen Expansionsbegriff nicht gilt: Kombinatorische Expansion folgt in höheren Dimensionen nicht aus spektraler Expansion. Eine andere, schwächere Expansionseigenschaft folgt jedoch aus spektraler Expansion. Dies wurde von Parzanchevski, Rosenthal und Tessler untersucht. Wir zeigen, wie dieser Beweis gestärkt werden kann, um eine zwischen kombinatorischer Expansion und der schwächeren Expansionseigenschaft liegende Eigenschaft zu erhalten.

Desweiteren betrachten wir zwei andere Ansätze für eine in polynomieller Zeit berechenbare untere Schranke für kombinatorische Expansion in höheren Dimensionen. Der erste Ansatz besteht darin, semidefinite Relaxierungen eines polynomiellen Programms, das kombinatorische Expansion beschreibt, zu betrachten. Der zweite verwendet einen höherdimensionalen Quasizufälligkeitsbegriff, welcher von Gowers eingeführt wurde.

Neben Expansion werden auch andere kombinatorische Eigenschaften von den Eigenwerten eines Graphen beschrieben. Trevisan konnte eine Verbindung des größten Laplace-Eigenwertes mit einem Wert herstellen, der ausdrückt, wie weit entfernt der Graph davon ist, eine bipartite Zusammenhangskomponente zu haben. Wir zeigen eine partielle Verallgemeinerung seines Resultats für 2-dimensionale Komplexe.

Der letzte Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit Abbildungen simplizialer Komplexe in Euklidische Räume und mit Fragen zu Schnittpunkten verschiedener Simplizes unter solchen Abbildungen. Für affine Abbildungen zeigen wir eine Verbindung zwischen den nicht-trivialen Laplace-Eigenwerten eines Simplizialkomplexes und der minimalen Anzahl von sich schneidenden Paaren von Bildern von Simplizes. Im letzten Kapitel der Arbeit betrachten wir die maximale Anzahl von Bildern von Simplizes, die alle einen gemeinsamen Punkt enthalten. Wir untersuchen eine Struktur, die einer Pagode, die von Matoušek und Wagner eingeführt wurde, um bisher bekannte Schranken für diese Anzahl für vollständige Komplexe zu verbessern.