

Diss. ETH No. 21706

Scenario-Based Optimization for Multi-Stage Stochastic Decision Problems

A dissertation submitted to
ETH ZURICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by

GEORG SCHILDBACH

Dipl.-Ing., Darmstadt University of Technology
Dipl.-Wirtsch.-Ing., Darmstadt University of Technology

born July 21st, 1981
citizen of Germany

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Manfred Morari, examiner
Prof. Dr. Marco Campi, co-examiner
Prof. Dr. Francesco Borrelli, co-examiner

2014

Abstract

Technological advancements over the past decades have increased the availability of ever more powerful and inexpensive hardware. This development has caused a substantial shift of research focus from classic control theory to advanced, optimization-based control methods. The latter are characterized by the fact that the decisions about the control actions are obtained by solving a numerical optimization program. In particular, *model predictive control* (MPC) offers an effective approach for handling multivariable control problems with a defined stage cost criterion and constraints on the inputs, states, and outputs.

The main contribution of this dissertation is the development of a novel method of *scenario-based MPC* (SCMPC) for handling *multi-stage stochastic decision problems* in a receding-horizon fashion. Indeed, MPC originally assumes that an exact model of the control system is available and there are no unknown disturbances, so it can accurately predict the system's state trajectory. However, uncertainty in these predictions can lead to substantial constraint violations and a significant performance degradation (in terms of stage costs) for the system in closed-loop operation.

Various approaches to cope with uncertainty in MPC have previously been proposed. *Robust MPC* (RMPC) considers uncertainties contained inside a pre-fitted uncertainty set. For systems with stochastic disturbances, however, RMPC may result in a sub-optimal performance. The reason is that this uncertainty model contains no probabilistic information and the decisions of RMPC are often based on extreme and unlikely disturbance realizations. *Stochastic MPC* (SMPC) approaches account for a probability distribution of the uncertainty. The constraints are typically relaxed in a probabilistic sense (e.g., as *chance constraints*), in exchange for an improved performance. This turns out to be a reasonable choice for many practical applications, where performance is critical. General distribution functions, however, are not amenable to numerical computations. Therefore many SMPC approaches are either computationally very demanding, or they are specialized to uncertainties of a particular distribution type (e.g., a normal distribution).

The novel SCMPC method provides an alternative to SMPC, using sampled uncertainty scenarios of an arbitrary stochastic model (as opposed to explicit probability distributions). The number of scenarios is determined a priori, such that controller satisfies a given set of chance constraints on the system state. Compared to similar approaches that

Abstract

have previously been proposed, the novel SCMPC method requires a significantly lower number of scenarios. This reduces the computational complexity and improves the performance of the controller. Moreover, examples show that the desired level of constraint violations can accurately be achieved.

The development of SCMPC in this dissertation is the result of multiple contributions. First, existing results in *scenario-based optimization* have established a direct link between the number of scenarios and bounds on the probability of constraint violations. These results are extended to problems with multiple chance constraints. Moreover, the existing bounds on the probability of constraint violations are improved in cases where a chance constraint has a limited *support rank*. The support rank is a novel concept defined in this thesis. The presented theory is applicable to very general stochastic optimization problems, in particular arising from multi-stage stochastic decision problems. Moreover, it potentially leads to a significant reduction in the number of scenarios, as compared to the previous theory.

Second, the theory for a novel SCMPC method is introduced, with a focus on its mathematical properties. The theory builds on the results of the first contribution, and it additionally provides a new framework for analyzing the behavior of the closed loop under SCMPC. In contrast to previous SCMPC approaches, this framework allows for the chance constraints to be interpreted as the time-average of state constraint violations, rather than a joint probability over an open-loop prediction horizon. This leads to a potentially massive reduction in the number of required scenarios. Furthermore, the novel SCMPC approach features the possibility of sample removal (as known from scenario-based optimization), and it is compatible with previously considered methods of disturbance feedback for closed-loop predictions.

Third, a possible implementation of SCMPC is examined in an extensive case study. The case study considers a networked supply chain distribution system with multiple products and uncertainty in the demands. It is shown that SCMPC is able to keep the prescribed service level constraints and significantly reduces the inventory holding costs. At the same time, SCMPC is computationally efficient for large-scale, complex problems with high-dimensional, correlated uncertainties. This type of problem can often not adequately be handled by means robust or stochastic optimization.

Fourth, a new implementation of the scenario approach is presented for risk averse solutions to two-stage stochastic decision problems. Instead of a conventional mean-risk optimization, the new approach optimizes the stochastic objective function value with respect to a maximal shortfall probability. The advantage of this approach is its ability to handle high-dimensional uncertainties of a very general nature in a computationally efficient manner. Its application is demonstrated for a particular version of the farmer's problem.

Zusammenfassung

Der technologische Fortschritt der letzten Jahrzehnte hat zu einer erhöhten Verfügbarkeit leistungsfähiger und kostengünstiger Hardware geführt. Diese Entwicklung hat zu einer erheblichen Verschiebung des Forschungsschwerpunktes in der Regelungstechnik beigetragen, weg von der klassischen Theorie und hin zu modernen, optimierungsbasierten Regelungsmethoden. Letztere sind dadurch gekennzeichnet, daß die Entscheidungen über die Steuergrößen auf der Lösung eines numerischen Optimierungsproblems basieren. Insbesondere die *modellprädiktive Regelung* (engl. *model predictive control*, MPC) bietet einen effektiven Ansatz zur Regelung von Mehrgrößensystemen mit einem definierten Gütekriterium und unter Beschränkungen der Steuergröße, des Zustands sowie der Regelgröße.

Der Hauptbeitrag dieser Dissertation ist die Entwicklung einer neuen Methode der *Szenario-basierten modellprädiktiven Regelung* (engl. *scenario-based MPC*, SCMP) zur Anwendung auf *mehrstufige stochastische Entscheidungsprobleme* mit rollierendem Horizont. MPC basiert nämlich auf der Annahme, daß ein exaktes Modell der Regelstrecke zur Verfügung steht und keine zufälligen Störungen von außen auftreten, sodaß die Zustandstrajektorie des betrachteten Systems sicher und genau vorhergesagt werden kann. Jedoch können Unsicherheiten in der Vorhersage zu substantiellen Verletzungen der Beschränkungen und einer signifikanten Verschlechterung des Gütekriteriums im geschlossenen Regelkreis führen.

Es existieren bereits verschiedene Ansätze zum Umgang mit diesen Unsicherheiten in MPC. *Robuste modellprädiktive Regelung* (engl. *robust MPC*, RMPC) betrachtet Unsicherheiten aus einer zuvor festgelegten Unsicherheitsmenge. Für Systeme mit stochastischen Störungen kann RMPC jedoch zu einer schlechten Regelgüte führen. Der Grund hierfür ist, daß dieses Unsicherheitsmodell keine probabilistischen Informationen enthält und sich die Entscheidungen von RMPC häufig an extremen und unwahrscheinlichen Ausprägungen der Störungen orientieren. Diese treten allerdings in der Realität nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit auf. *Stochastische modellprädiktive Regelung* (engl. *stochastic MPC*, SMPC) bezieht die Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit in die Entscheidungen ein. Die Beschränkungen werden typischerweise in einem stochastischen Sinne relaxiert (z.B. in Form von *chance constraints*), um dadurch eine bessere Regelgüte zu erzielen. Dies stellt sich als ein sinnvoller Ansatz für eine ganze Reihe von praktischen Anwendungen heraus, in denen die Regelgüte von entscheidender Bedeutung ist. Allgemeine

Zusammenfassung

Verteilungsfunktionen sind jedoch für numerische Berechnungen schlecht geeignet. Daher sind die meisten Methoden des SMPC entweder sehr rechenaufwändig, oder aber sie sind spezialisiert auf Unsicherheiten mit spezieller Wahrscheinlichkeitsverteilung (z.B. einer Normalverteilung).

Die neu entwickelte SCMPC Methode bietet eine Alternative zu SMPC, indem sie eine Stichprobe möglicher Szenarien betrachtet. Diese Stichprobe kann durch ein beliebiges stochastisches Modell der Unsicherheit erzeugt werden (und benötigt also keine explizite Wahrscheinlichkeitsverteilung). Die genaue Größe der Stichprobe wird so bestimmt, daß der Regler eine gegebene Menge von stochastischen Beschränkungen („chance constraints“) einhält. Im Vergleich zu anderen Ansätzen dieser Art benötigt die neu entwickelte SCMPC Methode dazu eine erheblich geringere Anzahl an Szenarien. Dies führt zum einen zu einer beträchtlichen Reduktion des Rechenaufwands und zum anderen einer verbesserten Regelgüte. Anhand von Beispielen kann zudem gezeigt werden, daß die stochastischen Beschränkungen voll ausgeschöpft werden können.

Die Entwicklung der neuen SCMPC Methode in dieser Dissertation basiert auf verschiedenen Forschungsergebnissen. Erstens, vorherige Ergebnisse auf dem Gebiet der *Szenario-basierten Optimierung* haben eine mathematische Verbindung zwischen der Stichprobengröße (für die Szenarien) und der Verletzungswahrscheinlichkeit einer Beschränkung hergeleitet. Diese Ergebnisse werden nun erweitert auf den Fall mit mehreren stochastischen Beschränkungen. Weiterhin können die vorherigen Formeln verbessert werden für den Fall, daß die stochastischen Beschränkungen einen begrenzten *Stützrang* (engl. *support rank*) besitzen. Der Stützrang ist ein neues Konzept, das in dieser Arbeit definiert wird. Die dadurch entwickelte Theorie ist sehr weitreichend in der stochastischen Optimierung anwendbar, insbesondere aber für *mehrstufige stochastische Entscheidungsprozesse* (engl. *multi-stage stochastic decision problems*). Sie kann zu einer signifikanten Reduktion der Stichprobengröße, verglichen mit der vorherigen Theorie, führen.

Zweitens wird die grundlegende Theorie der neuen SCMPC Methode beschrieben, mit Fokus auf ihre mathematischen Eigenschaften. Die Vorgehensweise stützt sich dabei auf die obigen Ergebnisse und schafft zudem einen neuen Rahmen für die Analyse des geschlossenen Regelkreises unter SCMP. Im Gegensatz zu früheren Methoden können die stochastischen Beschränkungen im Sinne der durchschnittlichen Häufigkeit von Verletzungen der Zustandsbeschränkungen interpretiert werden, anstatt als kumulierte Wahrscheinlichkeit über einen Planungshorizont. Dies führt zu einer potentiell massiven Reduktion der benötigten Anzahl an Szenarien. Des weiteren beinhaltet die neue SCMPC Methode die Möglichkeit des Ausschlusses von Szenarien (engl. *sample removal*) und sie ist vollständig kompatibel mit existierenden Verfahren zur Vorhersage unter Störgrößenrückführung (engl. *disturbance feedback*).

Drittens wird eine mögliche Anwendungsform der neuen SCMPC Methode in einer ausgiebigen Fallstudie untersucht. Die Fallstudie betrachtet die Steuerung des Verteilungsnetzwerks einer Logistikkette (engl. *supply chain*), mit mehreren Produkten und Nachfrageunsicherheit. Es zeigt sich, daß SCMP den vorgeschriebenen Liefergrad einhalten kann und die Lagerhaltungskosten signifikant reduziert. Gleichzeitig bietet SCMP

recheneffiziente Lösungen für große und komplexe Systeme mit hochdimensionalen, korrelierten Unsicherheiten. Diese Probleme können oftmals nicht adäquat mittels robuster oder stochastischer Optimierung gelöst werden.

Viertens wird ein neues Verfahren der Szenario-basierten Optimierung vorgestellt, welches zur Lösung von zweistufigen stochastischen Entscheidungsproblemen unter Risikoaversion eingesetzt werden kann. Statt der herkömmlichen Methode der Einbeziehung eines Riskomaßes in die Zielfunktion, optimiert der neue Ansatz die stochastische Zielfunktion mit einer bestimmten Unterschreitungswahrscheinlichkeit. Der Vorteil dieses Ansatzes liegt in der Behandlung von Problemen mit sehr allgemeinen, hochdimensionalen Unsicherheiten mittels einer recheneffizienten Prozedur. Die Anwendung der Methode wird anhand einer speziellen Version des *Farmer's Problem* demonstriert.