



Doctoral Thesis

On the Foundations of Continuum Mechanics and its Application to Beam Theories

Author(s):

Eugster, Simon R.

Publication Date:

2014

Permanent Link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-010255287> →

Rights / License:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

On the Foundations of Continuum Mechanics and its Application to Beam Theories

A thesis submitted to attain the degree of
DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH
(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

Simon Raphael Eugster

MSc ETH Masch.-Ing., ETH Zurich
born on 30.03.1985
citizen of Obereggen AI

accepted on the recommendation of

Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Ch. Glocker, examiner
Prof. Dr. P. Ballard, co-examiner

Abstract

The foundations of mechanics deal with the identification of the fundamental objects and the postulation of its principles. The mechanical principles together with constitutive laws enable the description and prediction of the motion of mechanical systems and processes. This work is concerned with fundamental questions on the foundations of continuum mechanics and with the application of these concepts to beam theories.

Due to the high level of abstraction, the mathematical discipline of intrinsic differential geometry seems to be best suited for the description of continuum mechanics. Step by step, additional mathematical structure can be introduced and motivated by the underlying physics. A geometric description of continuum mechanics is on the one hand coordinate independent and on the other hand a priori metric independent. In this thesis, body and space as the central objects of continuum mechanics are introduced as smooth manifolds. Whereas balance of linear and angular momentum in integral form are not applicable on manifolds, it is possible to formulate the principle of virtual work within this generalized setting. The virtual displacement field is defined as an element of the tangent space of the infinite dimensional configuration manifold constituted by the set of all embeddings of the body into the space. Moreover, the set of forces of a continuous body in the sense of duality and its representation are discussed. With further assumptions on internal and external force contributions, the principle of virtual work of classical continuum mechanics can be postulated from an intrinsic differential geometric point of view. Especially the concept of stress is set in a new light. Insofar, the variational stress is considered as the linear map of the covariant derivative of the virtual displacement field to a volume form of the body manifold.

The theory of beams is another branch of mechanics which shows the strength of a variational formulation of a continuous body given by its virtual work principle. It is possible to consider a beam as a continuous body with a constrained position field guaranteed by a perfect constraint stress field. Defining a constrained position field and applying the restricted kinematics to the principle of virtual work of a continuous body, the constraint stresses are eliminated due to the principle of d'Alembert–Lagrange and the weak variational form of an appropriate beam theory is induced. Such an approach to beam theory relates the point of view of beams as generalized one-dimensional continua to the theory of continuous bodies. In this work all classical beam theories, where the cross sections remain rigid and plain, are presented. Additionally, augmented beam theories, where cross section deformation is allowed, are derived using the very same procedure. All theories are suitable for large displacements and large rotations.

Zusammenfassung

Die Axiomatisierung der Mechanik handelt von der Identifikation der fundamentalen Objekte und der Formulierung der Grundprinzipien. Zusammen mit konstitutiven Gesetzen ermöglichen mechanische Prinzipien die Beschreibung und die Voraussage der Bewegungen von mechanischen Systemen und Prozessen. Diese Arbeit beschäftigt sich mit grundlegenden Fragen zur Axiomatisierung der Kontinuumsmechanik und mit der Anwendung der Grundprinzipien auf die Balkentheorie.

Aufgrund der hohen Abstraktionsstufe erscheint die intrinsische Differentialgeometrie die geeignete mathematische Disziplin für die Beschreibung der Kontinuumsmechanik zu sein. Zusätzliche mathematische Strukturen können Schritt für Schritt physikalisch motiviert eingeführt werden. Eine geometrische Beschreibung der Kontinuumsmechanik ist einerseits koordinatenunabhängig und andererseits a priori metrikunabhängig. Als zentrale Objekte werden Körper und Raum in dieser Arbeit als glatte Mannigfaltigkeiten eingeführt. Während die Impuls- und Drehimpulsbilanzgleichungen auf Mannigfaltigkeiten nicht angewendet werden können, ist es unter diesen verallgemeinerten Annahmen möglich das Prinzip der virtuellen Arbeit zu formulieren. Die Menge aller Einbettungen vom Körper in den Raum bildet die unendlich-dimensionale Konfigurationsmannigfaltigkeit. Ein Element des Tangentialraumes an diese entspricht einem gesamten virtuellen Verschiebungsfeld des Körpers. Im Sinne der Dualität werden Kontinuumskräfte eingeführt und deren Repräsentationsmöglichkeit besprochen. Mit zusätzlichen Annahmen an innere und äussere Kräfte wird des Weiteren das Prinzip der virtuellen Arbeit für das klassische Kontinuum in einer intrinsisch differentialgeometrischen Form postuliert. Insbesondere das Konzept der Spannung wird in ein neues Licht gerückt. So wird die variationelle Spannung als lineare Abbildung von der kovarianten Ableitung des virtuellen Verschiebungsfeldes auf eine Volumenform des Körpers aufgefasst.

Die Balkentheorie entspricht einem weiteren Teil der Mechanik, welcher die Stärke einer variationellen Formulierung der Kontinuumsmechanik durch das Prinzip der virtuellen Arbeit aufzeigt. Es ist möglich einen Balken als gebundenes Kontinuum zu betrachten, dessen eingeschränkte Kinematik durch ein Zwangsspannungsfeld garantiert wird. Durch die Definition eines gebundenen Verschiebungsfeldes und durch das Anwenden der eingeschränkten Kinematik auf das Prinzip der virtuellen Arbeit des Kontinuums, wird unter Verwendung des Prinzips von d'Alembert–Lagrange die schwache variationelle Form einer zugehörigen Balkentheorie induziert. Ein solcher Zugang zur Balkentheorie verbindet die Ansicht von Balken als eindimensionale generalisierte Kontinua mit der Kontinuumsmechanik. In dieser Arbeit werden alle klassischen Theorien mit starren und ebenen

Schnittebenen vorgestellt. Zusätzlich werden erweiterte Balkentheorien, welche Schnittebenendeformationen zulassen, mit derselben Methodik hergeleitet. Alle Theorien lassen grosse Verschiebungen und grosse Rotationen zu.