Ganzzahlige Polymatroid-Intersektions-Algorithmen

Doctoral Thesis

Author(s):
Schönsleben, Paul

Publication date:
1980

Permanent link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000219963

Diss. ETH 6620

GANZZAHLIGE POLYMATROID-INTERSEKTIONS-ALGORITHMEN

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines

Doktors der Mathematik

der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

Paul Schönsleben

dipl. Math. ETH

geboren am 12. Mai 1952

von Bronschhofen/SG

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. E. Specker, Referent

PD Dr. Th.M. Liebling, Korreferent

1980

Ganzzahlige Polymatroid-Intersektions-Algorithmen

Zusammenfassung

Auf dem Gebiet der kombinatorischen Optimierung gibt es einige Probleme mit bekannten Algorithmen, in welchen die Technik der Suche nach vergrössernden Wegen angewandt wird.

Beispiele sind etwa das Zuordnungsproblem, das SDR-Problem (System von distinkten Repräsentanten), das unabhängige SDR-Problem, das Branching-Problem. Alle diese Probleme können als sogenannte Matroid-Intersektions-Probleme formuliert werden und mit einem Algorithmus von J.Edmonds oder E.L.Lawler gelöst werden. Andere Beispiele sind Netzwerk-Fluss-Probleme, etwa das Maximalflussproblem, das Finden eines Flusses mit minimalen Kosten oder das Hitchcock-Problem. Zur Lösung dieser Probleme gibt es ebenso bekannte Algorithmen.

Die ganzzahligen Polymatroid-Intersektions-Algorithmen sind Verallgemeinerungen der Matroid-Intersektions-Algorithmen. Sie können aber neben Matroid-Intersektions-Problemen auch die oben erwähnten Netzwerk-Fluss-Probleme im ganzzahligen Fall lösen.

Sei E eine endliche Menge und sei $\mathbb{R}^E$ der Raum der reellwertigen Vektoren $x = [x_e : e \in E]$. Sei $\mathbb{R}^E_+ := \{x \in \mathbb{R}^E : 0 \leq x\}$ und $[0,k]^E := \{x \in \mathbb{R}^E_+ : x \leq k \in \mathbb{R}\}$.

Ein Polymatroid im Raum $\mathbb{R}^E$ ist eine kompakte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^E$, so dass

(i) falls $0 \leq x^0 \leq x^1 \in P$, so $x^0 \in P$.

(ii) für jedes $a \in \mathbb{R}^E_+$ hat jeder maximale Vektor x aus der Menge aller Vektoren $z \in P$, $z \leq a$, d.h. jede P-Basis x von a, die gleiche Summe $\sum\{x_e : e \in E\}$, genannt Rang von a, r(a) (bezüglich P). "Maximal" heisst, dass es kein $z > x$ mit den Eigenschaften von x gibt.

Ein Polymatroid heisst ganzzahlig, falls (ii) auch erfüllt ist, falls a und x auf ganzzahlige Werte beschränkt sind.

J.Edmonds und R.Giles bewiesen, dass alle Polymatroide Polyeder sind, und dass, falls P_1 und P_2 ganzzahlige Polymatroide in $\mathbb{R}^E$ sind, die Eckpunkte von $P_1 \cap P_2$ ganzzahlig sind.

Durch Anwendung dieser Sätze entwickeln wir Rahmenalgorithmen, relativ zu einer Subroutine, welche die Elemente der Polymatroide erkennt, zur Lösung der folgenden gazzahligen Polymatroid-Intersektions-Probleme:

a) Finde einen Vektor x unter allen Vektoren $z \in P_1 \cap P_2$, welcher eine maximale Komponentensumme hat (d.h. für welchen $\sum\{x_e: e \in E\}$ maximal ist).

b) Zu einem gegebenen Vektor $c \in \mathbb{R}^E$ finde einen Vektor x unter allen Vektoren $z \in P_1 \cap P_2$, welcher c.x, die gewichtete Komponentensumme, maximiert.

c) Zu einem gegebenen Vektor $c \in \mathbb{R}^E$ und einer Zahl $m \in \mathbb{N}$ finde entweder einen Vektor x unter allen Vektoren $z \in P_1 \cap P_2$, $\sum\{z_e: e \in E\} = m$, für welchen c.x maximal ist, oder beweise, dass es keinen solchen Vektor gibt.

Sei $n := |E|$, $K := \min\{k: k \in \mathbb{N}, P_1 \cap P_2 \subseteq [0,k]^E\}$, Z_k der Rechenaufwand der oben erwähnten Subroutine von P_k, $Z := \max\{Z_1, Z_2\}$.

Vorerst geht es darum, überhaupt direkte Algorithmen zur Lösung von a) bis c) zu finden. Für a) wird ein primaler Algorithmus entwickelt, für b) und c) ein primal-dualer, der den ersteren als Teilalgorithmus enthält. Als Grundlage werden die Matroid-Intersektions-Algorithmen von Edmonds benützt. Es werden ähnliche oder sogar gleiche Strukturen aufgebaut und ähnliche Lemmas bewiesen.

Ein eigentlicher Schlüssel zum Problem war das Auffinden einer sogenannten Transitivitätseigenschaft von Polymatroiden. Dies ist eine Beziehung zwischen den Elementen des Spanns eines Vektors $x \in P$, d.h. derjenigen Elemente $e \in E$, deren in x entsprechende Komponenten x_e ohne gleichzeitige Verkleinerung einer anderen Komponente x_h, $h \in E$, nicht vergrössert werden kann, ansonsten der veränderte Vektor $\hat{x}$ nicht in $P_1 \cap P_2$ ist. Die Transitivitätseigenschaft sagt nun, dass, falls ein drittes Element $g \in E$ existiert und durch Verkleinerung von x_g die Komponente x_h vergrössert werden kann, so kann anstelle von x_h auch x_e vergrössert werden.

Die Transitivitätseigenschaft hilft nun einerseits, einen vergrössernden Weg zu bestimmen. Sie ist ebenso wesentlich beteiligt bei der Abschätzung der Komplexität der Algorithmen. Es stellt sich als eigentliche Hauptschwierigkeit heraus, die Anzahl Augmentationen des primalen Vektors der Algorithmen für a) bis c) und die Anzahl Revisionen des dualen Vektors für b) und c) zu berechnen. Für den Algorithmus für Problem a) ergibt sich schliesslich eine Komplexität von $O(\min\{n^3,K\}.n^2.Z.(\log K+n))$, für die Algorithmen für die Probleme b) und c) eine solche von $O(n^3.K.(Z+n^2))$.

Integral Polymatroid Intersection Algorithms

Abstract

In the field of combinatorial optimization there are some problems with well known algorithms unsing the technique of constructing so called 'augmenting paths'.

Examples are a series of problems, such as the assignement problem, the SDR (system of distinct representatives) problem, the independent SDR problem, the branching problem. All these problems can be formulated as so called matroid intersection problems and can be solved by an algorithm of J.Edmonds or E.L.Lawler. Other examples are network flow problems, such as the maximal flow problem, the minimal cost flow problem or the hitchcock problem. There are well known algorithms to solve the latter problems.

The integral polymatroid intersection algorithms are generalizations of the matroid intersection algorithms. In particuliar, they can solve the above mentioned matroid intersection problems and also the above mentioned network flow problems in the integral case.

Let E be a finite set and let $\mathbb{R}^E$ denote the space of real valued vectors $x = [x_e: e\in E]$. Let $\mathbb{R}^E_+ := \{x\in \mathbb{R}^E: 0\leq x\}$ and $[0,k]^E := \{x\in \mathbb{R}^E_+: x\leq k\in\mathbb{R}\}$. A polymatroid P in the space $\mathbb{R}^E$ is a compact nonempty subset of $\mathbb{R}^E_+$ such that

(i) if $0 \leq x^0 \leq x^1 \in P$, then $x^0 \in P$.

(ii) for every $a\in \mathbb{R}^E_+$, every maximal x among all vectors $z\in P$, $z\leq a$, i.e. every P-basis x of a, has the same sum $\sum\{x_e: e\in E\}$, called the rank r(a) of a (with respect to P). "Maximal x" means that there is no $z>x$ having the properties of x.

A polymatroid is called integral, if (ii) holds also when a and x are restricted to be integer valued.

J.Edmonds and R.Giles proved that all polymatroids are polyhedra and, if P_1 and P_2 were integral polymatroids in $\mathbb{R}^E$, the vertices of $P_1\cap P_2$ are integral.

Making use of these theorems we present algorithms relative to a subroutine for recognizing the members of the polymatroids to solve the following Integral Polymatroid Intersection problems:

a) Find an x among all $z \in P_1 \cap P_2$ which has a maximal sum of components (i.e. for which $\sum\{x_e : e \in E\}$ is maximal).
b) To a given vector $c \in \mathbb{R}^E$ find a vector x among all $z \in P_1 \cap P_2$, for which c.x, the weighted sum of components, is maximal.
c) To a given vector $c \in \mathbb{R}^E$ and a number $m \in \mathbb{N}$, either find a vector x among all $z \in P_1 \cap P_2$, $\sum\{z_e : e \in E\} = m$, for which c.x is maximal, or prove that no such vector exists.

Let $n := |E|$, $K := \min\{k : k \in \mathbb{N},\ P_1 \cap P_2 \subseteq [0,k]^E\}$, Z_k the complexity of the subroutine of P_k mentioned above, $Z := \max\{Z_1, Z_2\}$.

First we have to actually find direct algorithms to solve a) to c). For a) we construct a primal algorithm, for b) and c) a primal-dual algorithm, which uses the first algorithm as a subalgorithm. The algorithms are based on the matroid intersection algorithms of J.Edmonds. We develop similar or equivalent structures and prove similar lemmas.

As a key to the problem we found a so called Transitivity Property of polymatroids. This is a relation between the elements of the span of a vector $x \in P$, i.e. of those elements $e \in E$, whose components x_e of x can not be increased without decreasing simultaneously annother component x_h, $h \in E$, otherwise the changed vector $\hat{x}$ would not be in $P_1 \cap P_2$. The transitivity property says now that if there was a third element $g \in E$, and by decreasing x_g we could increase x_h, then we can as well increase x_e instead of x_h.

The transitivity property helps us to determine augmenting paths. And it is very important in order to estimate the complexity of the algorithms. It turns out that the main difficulty is to compute the number of augmentations of the primal vector in the case of a) to c) and the number of revisions of the dual vector in the case of b) and c). For the algorithm of a) we finally have a complexity of $O(\min\{n^3, K\}.n^2.Z.(\log K + n))$, for the algorithms of b) and c) a complexity of $O(n^3.K.(Z+n^2))$.