



Doctoral Thesis

Convex Relaxations in Mixed Integer Optimization Methods and Control Applications

Author(s):

Vujanic, Robin

Publication Date:

2014

Permanent Link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-010280590> →

Rights / License:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

DISS. ETH NO. 22160

Convex Relaxations in Mixed–Integer Optimization
—
Methods and Control Applications

A thesis submitted to attain the degree of
DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH
(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

Robin Vujanic

M. sc. in Mechanical Engineering, ETH Zurich

born 31.07.1984

citizen of Switzerland

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Manfred Morari (examiner)

Prof. Dr. Ignacio E. Grossmann (co-examiner)

2014

Abstract

Systems that involve discrete components (e.g., on/off decisions, switches and symbolic reasoning) and continuous quantities (such as physical measurements of voltages, concentrations and positions in space) arise in several practical and industrial contexts. However, when decision problems associated to these systems are cast as mathematical optimization problems, the resulting models are affected by severe computational challenges. Even modest problem sizes can be unsolvable by general purpose solvers when the models contain discrete variables. Further, the required computation time and memory can vary significantly between two instances of the same size, which hinders the practitioners' ability in allocating sufficient computational resources when such optimization problems have to be solved repeatedly – as is typically the case in a control context. These impediments significantly inhibit the usefulness of discrete models in practical applications.

To alleviate these difficulties, in this Thesis we have developed computational schemes to obtain approximate solutions for several problem structures that are of wide practical interest. They are computationally attractive, and equipped with guarantees on the approximation strength.

Two main approaches are used in order to derive our schemes.

The Lagrangian duality framework is the first, and it is used to tackle large scale, structured optimization problems. The ever increasing availability of large amounts of data and communication (the “big data” revolution), as well as the appeal in operating more efficiently large engineered systems, such as power systems, are some of the reasons why large scale optimization is flourishing. The Lagrangian duality framework is useful in this context because it allows one to decompose the problem in smaller pieces, but in contrast to the convex counterpart, when applied to models with discrete decisions (mixed-integer optimization problems) it is generally unable to produce global optimal solutions. In fact, the solutions recovered may not only be suboptimal, but even infeasible. In this Thesis we derive new structural properties of the solutions that can be recovered from the dual, and using these results we develop solution methods that are guaranteed to produce globally feasible solutions in a distributed fashion. They are simple to implement and the quality of the solutions they produce improves (in relative terms) as the size of the problems is increased. Roughly speaking, the reason why we can achieve this is that these instances

resemble more and more convex problems the larger they become. We illustrate the efficacy of our methods with extensive experimentations on problems stemming from power systems management and supply chain optimization.

The second approach is based on linear relaxations, and it is used in the context of optimizing systems affected by uncertainty. We investigate two structures in this setting.

In the first one, we look into problems affected by endogenous uncertainty, i.e., by uncertainty that depends on the decisions taken. We derive a robust counterpart in this case, and show how this framework can be useful for scheduling problems. As an illustrative example, we study the problem of integrating industrial power consumers in network reserve mechanisms.

The second one is related to the robust control of mixed-integer input linear systems. We derive a control scheme in which the mixed-integer optimal control problem is first relaxed, and a projection function is applied to the resulting relaxed control sequence. This procedure rectifies it into a solution satisfying the integrality conditions on the inputs, while state constraints satisfaction is guaranteed by applying a robust reformulation of the problem. The key ingredient here is the design of a suitable projection function. We find the class of Pulse-Width-Modulated (PWM) systems particularly well suited for this approach: we provide a projection function for this case and demonstrate how our controller performs on different converter topologies. The results indicate a substantial performance improvement with respect to a plain MPC implementation – at the same computational cost. We finally investigate approaches to reduce the necessary conservatism by adapting the idea of affine recourse for the robust control of MLD hybrid systems.

Compendio

Sistemi che contengono sia componenti discrete (come ad esempio decisioni di accensione o spegnimento, interruttori e ragionamenti logici) come anche quantità continue (ad esempio, misure di voltaggi, concentrazioni o posizioni nello spazio) appaiono in molti contesti pratici ed industriali. Tuttavia, quando i problemi decisionali associati a questi sistemi vengono espressi come problemi di ottimizzazione matematica, i modelli risultanti sono soggetti a notevoli difficoltà computazionali. Tant'è vero che persino istanze di modeste dimensioni possono essere irrisolvibili da software di soluzione generici. Inoltre, il tempo e la memoria richiesti per calcolare una soluzione possono variare in modo significativo tra due istanze della stessa dimensione. Ciò ostacola il professionista nello stabilire risorse computazionali sufficienti, soprattutto quando questi problemi di ottimizzazione devono essere risolti più e più volte – come è spesso il caso in un contesto di automazione. Questi impedimenti inibiscono in modo considerevole l'utilità di modelli discreti per applicazioni pratiche.

Per alleviare queste difficoltà, in questa Tesi abbiamo sviluppato degli schemi computazionali che permettono di calcolare soluzioni approssimative per svariate strutture di problemi di interesse pratico. I nostri schemi hanno proprietà computazionali attrattive e sono equipaggiati di garanzie sulla qualità delle approssimazioni.

Abbiamo impiegato due approcci principali nella derivazione dei nostri metodi di approssimazione.

Il framework di dualità lagrangiana è il primo, ed è utilizzato per affrontare problemi di ottimizzazione di grosse dimensioni. La grande quantità di dati che diventano sempre più disponibili (la rivoluzione "big data"), come anche l'attrattività di operare in modo più efficiente grossi sistemi ingegneristici, come ad esempio sistemi di potenza concernenti intere reti elettriche, sono alcune tra le ragioni per cui l'ottimizzazione di problemi di grandi dimensioni sta acquistando importanza. Il framework di dualità lagrangiana è utile in questo contesto perchè permette la scomposizione dei problemi in pezzi più piccoli ma, a differenza del caso convesso, non è generalmente in grado di fornire soluzioni ottimali globali quando applicato a modelli contententi decisioni discrete. Anzi, le soluzioni ricavate possono essere non solo subottimali, ma persino violare i vincoli del problema. In questa Tesi abbiamo derivato nuove proprietà strutturali delle soluzioni che possono essere ottenute dal problema duale, e utilizzando questi risultati abbiamo sviluppato metodi che

producono soluzioni che soddisfano i vincoli sia locali che globali in modo distribuito. Sono semplici da implementare, e più le dimensioni dei problemi considerati sono grandi, migliore è la qualità delle soluzioni che producono (in senso relativo). Il motivo per cui è possibile ottenere questi risultati è che più grandi sono le istanze considerate, più queste assomigliano a problemi convessi. L'efficacia dei nostri metodi è estensivamente illustrata con sperimentazioni su problemi provenienti dall'operazione ottimale di sistemi di potenza e dall'ottimizzazione di supply chains.

Il secondo approccio è basato su rilassazioni lineari, ed è utilizzato nel contesto di ottimizzazione di sistemi influenzati da componenti incerte. Abbiamo investigato due strutture in questo senso.

Nella prima, abbiamo considerato problemi influenzati da incertezze endogene, cioè da incertezze che dipendono dalle decisioni prese. Abbiamo derivato metodi per trovare soluzioni robuste, e mostrato come il framework proposto può essere utile per problemi di scheduling. Come esempio illustrativo, abbiamo studiato il problema di integrazione di carichi elettrici industriali nei sistemi di riserva di rete.

La seconda è associata al controllo robusto di sistemi lineari con entrate continue e discrete. Abbiamo sviluppato uno schema in cui il problema di controllo ottimale viene dapprima rilassato, e la sequenza di inputs prodotta viene poi passata a una funzione di proiezione. Questa funzione rettifica gli inputs di modo che soddisfino le condizioni di integralità richieste, mentre i vincoli di stato vengono assicurati attraverso una riformulazione robusta del problema. La componente chiave del nostro sistema è la funzione di proiezione utilizzata. Troviamo che la classe di sistemi modulati a pulsii (PWM) sia particolarmente adatta a questo approccio: forniamo una funzione di proiezione adatta per questi sistemi e mostriamo la performance del controllore su diverse topologie di convertitori di potenza. I nostri risultati indicano che è possibile ottenere miglioramenti di performance sostanziali rispetto a un'implementazione di controllo predittivo comune – allo stesso costo computazionale. Per concludere abbiamo investigato metodi per ridurre il conservatismo necessario, adattando idee di ricorso affine per il controllo di sistemi ibridi.