

The meshless radial point interpolation method for electromagnetics

Doctoral Thesis

Author(s):

Kaufmann, Thomas

Publication date:

2011

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-006532435>

Rights / license:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

DISS. ETH No. 19622

THE MESHLESS RADIAL POINT INTERPOLATION METHOD FOR ELECTROMAGNETICS

A dissertation submitted to the
ETH ZURICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by

THOMAS KAUFMANN

Master of Science ETH in Electrical Engineering and Information Technology,
ETH ZURICH, Switzerland

born February 8, 1982

citizen of Basel (BS)

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Ch. Hafner, examiner
Assoc. Prof. Ch. Fumeaux, co-examiner
Dr. Ch. Engström, co-examiner

2011

Abstract

Meshless methods are a class of numerical methods with unique advantages over classical mesh-based methods. Instead of calculating the solution of physical equations on a mesh topology, a solution is sought on a set of collocation nodes. A high flexibility in the placement of the nodes allows to accurately model complex geometries.

Radial basis functions (RBFs) show superb approximation properties and are applied in many fields of research where accurate interpolation of scattered data point is required. Numerical solvers for physical equations, i.e. partial differential equations, with radial basis functions gained in interest recently due to the ability of obtaining highly accurate results for a relatively low computational effort. The high accuracy comes at the cost of high matrix condition numbers especially for flat basis functions. Due to the radial dependence of the basis functions, implementations in two or three dimensional settings are formulated straightforwardly.

A special variant of RBF methods is the radial point interpolation method (RPIM). In a preprocessing step, a new set of interpolating shape functions is calculated that shows extraordinary properties, namely the ability to use explicit time-stepping and a beneficial structure for matrix solvers. In a localized scheme on one hand, each collocation node is only assumed to influence the surrounding neighbors in a so-called support domain. This leads to sparse matrices, even for large domains. For global basis functions on other hand, very high accuracy can be achieved, but the computational effort increases drastically when large problems are solved. A possible remedy is to divide the domain into several smaller support domains through a domain-decomposition approach.

In this thesis, the properties of the RPIM scheme are summarized and an algorithm to optimize the flatness of the basis functions is introduced. A two-dimensional framework in electromagnetics is developed for the first- and second-order form of Maxwell's equations. The first-order form yields solutions in Cartesian and cylindrical coordinates in the time domain in a similar approach to the generalized finite-difference time-domain method. This allows to simulate transient signals and to obtain results of a broad frequency range in one simulation run. Important material boundary conditions and a stability criterion for stable time iterations are presented. Investigations on the long-time stability are performed by studying the corresponding eigenvalue problem. The second-order implementation solves the wave equation in frequency domain using global basis functions. First an RPIM eigenvalue solver for resonant cavities is developed and compared to other preexisting RBF methods. Very similar numerical results are obtained for all methods. Second a solver for source problems is implemented in the RPIM framework and a solution is calculated through a matrix inversion. Domain-decomposition strategies are proposed to handle material discontinuities.

Absorbing boundary conditions to simulate open problems are developed. For the first-order framework, perfectly matched layers are introduced. In the second-order scheme,

due to the high accuracy offered by global basis functions, high-order non-reflecting boundary conditions can be directly implemented. An algorithm to optimize these boundary conditions is presented. To improve the accuracy offered by the high-order boundary conditions, a procedure to progressively increase the node density close to the boundary is introduced. Numerical evaluations show a very good correspondence between theoretically expected results and numerical solutions.

For the second-order RPIM eigenvalue solver, adaptive refinement strategies are introduced. The collocation node distribution is refined iteratively based on two alternative *a posteriori* error estimators on a set of test nodes. The first estimator calculates the residual error on the test nodes and the second estimator indicates regions with large jumps in the gradient. Nodes with large estimated errors are subsequently added to the set of collocation nodes. This iteration is repeated until a stopping criterion is fulfilled. Numerical experiments show the effectiveness of these two refinement strategies. Regardless of the chosen error estimation approach, both algorithms perform very similarly and show much lower numerical errors than a naive uniform refinement.

The RPIM framework developed in this thesis is finally evaluated on a number of numerical examples. For the time-domain solver, the input reflections of a waveguide bend are calculated. Solutions with conformal node placement converge much faster than with a rectangular setup with stair-casing effects. In cylindrical coordinates, the simulation of a corrugated copper cable shows a very good correspondence with a commercially available field solver. For the second-order eigenvalue solver, comparisons with different finite-element codes reveal a much higher accuracy than lower-order finite-element methods and even better performance than a high-order discontinuous Galerkin code with curvilinear elements.

Zusammenfassung

Gitterfreie Methoden gehören zu einer neuen Art von numerischen Methoden, die einige wichtige Vorteile gegenüber herkömmlichen, gitterbasierten Methoden aufweisen. Gitterfreie Methoden können die Lösung eines physikalischen Gesetzes an frei wählbaren Kollokationsstellen berechnen und sind somit nicht an eine Gittertopologie gebunden. Der grosse Vorteil einer flexiblen Platzierung dieser Punkte liegt in einem einfachen Modellieren von komplexen Geometrien.

Radiale Basisfunktionen (RBF), die ausgezeichnete Eigenschaften in der Annäherung von Funktionen mit unstrukturiert verteilten Stützstellen aufweisen, sind für gitterfreie Methoden besonders geeignet. Numerische Verfahren zur Lösung von Partiellen Differentialgleichungen unter Anwendung von RBF haben in letzter Zeit wegen der sehr hohen Rechengenauigkeit bei einem relativ kleinen Rechenaufwand an Bedeutung gewonnen. Die Rechengenauigkeit wird dabei auf Kosten einer grossen Matrixkonditionszahl erreicht, die durch flache Formen der Basisfunktionen bedingt ist. Dank der radialen Abhängigkeit der Basisfunktionen ist eine Implementierung in zwei und drei Dimensionen relativ unkompliziert.

Ein spezieller Typ von Methoden mit RBF ist die Radiale Punktinterpolations-Methode (RPIM). In einem Vorverarbeitungsschritt werden vor dem Lösen der Gleichungen neue Näherungsfunktionen berechnet, die nützliche Eigenschaften aufweisen. Die Vorteile liegen in der Möglichkeit eines expliziten Zeitschrittverfahrens und einer günstigen Struktur zur Matrixinvertierung. In einer lokalen Formulierung wird davon ausgegangen, dass jeder Punkt nur von seinen Nachbarn innerhalb eines kompakten Raumbereichs beeinflusst wird. Dies führt zu einer schwach besetzten Matrix. Globale Formulierungen dagegen haben eine sehr hohe Rechengenauigkeit, jedoch nimmt der Rechenaufwand drastisch zu, wenn grosse Probleme berechnet werden. Eine mögliche Abhilfe bietet die Aufteilung des Rechengebiets in einzelne kleinere Teilbereiche mit Hilfe einer Gebietszerlegungstechnik.

In dieser Dissertation wird eine Implementierung von RPIM für elektromagnetische Probleme vorgestellt. Zuerst werden die Eigenschaften von RPIM zusammengefasst und ein Algorithmus eingeführt, welcher die Form der Basisfunktionen optimiert. Für zweidimensionale Probleme wird eine Grundstruktur zum Lösen der Maxwell-Gleichungen in erster und in zweiter Ordnung vorgeschlagen. Das Lösungsverfahren für Probleme erster Ordnung wird im Zeitbereich für kartesische und zylindrische Koordinatensysteme ähnlich der Finiten-Differenzen-Methode im Zeitbereich (FDTD) formuliert. Das ermöglicht die Modellierung von zeitabhängigen Signalen und somit die Simulation eines breiten Frequenzspektrums in einem einzigen Durchgang. Dazu werden wichtige Randbedingungen und ein Stabilitätskriterium für eine stabile Zeititeration erörtert. Das Lösungsverfahren für Probleme zweiter Ordnung löst die Wellengleichung im Frequenzbereich mit Hilfe von globalen Basisfunktionen. Zunächst wird ein Verfahren zur Berechnung der

Eigenwerte von resonanten Strukturen mittels RPIM eingeführt. Das Verfahren wird mit anderen existierenden RBF Methoden verglichen, wobei sehr ähnliche Resultate erreicht werden. Danach wird ein Verfahren zum Lösen der inhomogenen Wellengleichung implementiert, das auf einer numerischen Matrixinvertierung basiert. Schliesslich werden Gebietszerlegungstechniken diskutiert, die es ermöglichen Materialübergänge korrekt zu simulieren.

Sogenannte Absorbing Boundary Conditions (ABCs) dienen der Imitation von offenen Rechengebieten. Für das Verfahren erster Ordnung wird die Perfectly Matched Layers (PML) Methode eingeführt. Im Verfahren zweiter Ordnung können ABCs hoher Ordnung dank der hohen Rechengenauigkeit der globalen Basisfunktionen direkt eingebunden werden. Der Reflexionkoeffizient wird dabei mit einer Optimierungsmethode reduziert. Um die Interpolationsgenauigkeit der Ableitungen höherer Ordnung zu verbessern, wird ein Punkteplatzierungsverfahren vorgeschlagen, welches die Kollokationsstellen nahe am Rand des Rechengebietes anordnet. Bei beiden Implementationen wird eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den numerischen Resultaten und den theoretischen Werten erzielt.

Die Rechengenauigkeit kann durch zwei verschiedene adaptive Verfeinerungsstrategien für das Eigenwertverfahren zweiter Ordnung Schritt für Schritt erhöht werden. Die Punkteverteilung wird iterativ verfeinert, indem eine von zwei *a posteriori* Schätzfunktionen auf zusätzlichen Testpunkten ausgewertet wird. Die eine Schätzfunktion bestimmt das Residuum auf den Testpunkten und die andere Schätzfunktion benutzt den Sprung im Gradienten zwischen zwei Stützstellen als Fehlerindikator. Testpunkte mit einem hohen geschätzten Fehler werden zu den Kollokationsstellen hinzugefügt und die Iteration dann so lange wiederholt bis ein Abbruchkriterium erreicht ist. In numerischen Experimenten wird die Wirksamkeit dieser Strategien nachgewiesen. Beide Ansätze konvergieren deutlich schneller als eine einfache Strategie mit gleichförmiger Punkteverfeinerung.

Schliesslich werden die vorgeschlagenen Verfahren an verschiedenen numerischen Beispielen getestet. Für das Zeitbereichsverfahren erster Ordnung werden die Eingangreflexionen eines gekrümmten Wellenleiters berechnet. Dank der konformen Annäherung der Kollokationsstellen an die Geometrie konvergiert die Lösung schneller als auf einem Rechteckgitter. Die Simulation eines Koaxialkabels mit gewellten Wänden zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit einem kommerziellen Programm, das auf der Methode der Finite-Elemente-Methode (FEM) basiert. Vergleiche des Frequenzbereichsverfahrens zweiter Ordnung mit verschiedenen FEM Codes zeigen, dass eine grössere Genauigkeit erreicht werden kann als mit FEM niedriger Ordnung und sogar eine höhere Genauigkeit als mit der diskontinuierlichen Galerkin Methode höherer Ordnung und kurvenförmigen Elementen.