

Regelungstechnik II

Monograph

Author(s):

Geering H. P.; Shafai E.

Publication date:

2004

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-004953290>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Institut für Mess- und Regeltechnik
Prof. Dr. Hans P. Geering

H. P. Geering und E. Shafai

Regelungstechnik II

IMRT Press

© Institut für Mess- und Regeltechnik

ETH-Zentrum

CH-8092 Zürich, Schweiz

2. Auflage, März 2004

www.imrt.mavt.ethz.ch

www.imrt.mavt.ethz.ch/~geering/

www.imrt.mavt.ethz.ch/~shafai/

Inhaltsverzeichnis

1	Regelung mit PID-Regler	1
1.1	Modifizierte Strukturen des PID-Reglers	1
1.1.1	PID-Regler mit Sollwertgewichtung	1
1.1.2	Realer PID-Regler	4
1.1.3	Anti-Windup des Integrators	6
1.2	Einführung in die Spezifikation	9
1.3	Entwurfsmethoden	18
1.3.1	Ziegler-Nichols-Methode	18
1.3.2	Loop-shaping mit PID-Regler	20
1.3.3	Smith-Prädiktor	28
2	Strukturen der Steuerung und Regelung	33
2.1	Folge-Steuerung	34
2.2	Folge-Steuerung mit Referenz-Modell	35
2.3	Folge-Steuerung/Regelung	36
2.4	Folge-Steuerung/Regelung mit Referenz-Modell	37
2.5	Bemerkungen zur Regelung und Vorsteuerung	37
3	Modellbasierte Steuerung und Regelung mit Zustandsraum-Modellen	41
3.1	Einleitung	41
3.2	LQ-Regulator als Zustandsvektor-Rückführung	44
3.2.1	Das zeitinvariante LQ-Regulator-Problem	44
3.2.2	Robustheits-Eigenschaften des Regelsystems	45
3.2.3	Bemerkungen	47
3.3	Lineare Regelung mit Ausgangsvektor-Rückführung	49
3.3.1	Struktur des Kompensators	49
3.3.2	LG-Filter als robuster Zustands-Beobachter	50
3.3.3	Robustheit des Regelsystems?	55

4 Die LQG/LTR-Methode für den Entwurf robuster Mehrgrößenregler	59
4.1 Problemlösungstechnik LQG/LTR	60
4.1.1 Modellierung	61
4.1.2 Sytemerweiterung	61
4.1.3 Spezifikation von Singularwertverläufen	63
4.1.4 Loop Shaping	66
4.1.5 Loop Transfer Recovery	68
4.1.6 Ordnungs-Reduktion	73
4.1.7 Umsetzung auf digitale Regelung	74
4.1.8 Anti-Reset-Windup-Massnahmen	76
4.1.9 Die duale LQG/LTR-Methode	77
4.2 Beispiele	78
4.2.1 SISO-Beispiel	78
4.2.2 MIMO-Beispiel: Drehzahl-Lambda-Regelung eines Ottomotors	81
Anhang 1: Gleichungen für lineare MIMO-Systeme	87
Anhang 2: Singularwerte einer Matrix	91
Anhang 3: Skalierung von Zustandsraum-Modellen	97
Anhang 4: Qualitativer Einfluss der Pol-Nullstellen-Konstellation auf die Sprungantwort	101
Anhang 5: Balancierung und Ordnungs-Reduktion	105
Anhang 6: Diskretisierung eines zeitkontinuierlichen Reglers	111
Anhang 7: Padé-Approximation für eine Totzeit	115
Literaturhinweise	117

1 Regelung mit PID-Regler

1.1 Modifizierte Strukturen des PID-Reglers

Mit einem idealen PID-Regler wird die Stellgröße im Zeitbereich mit der folgenden Gleichung berechnet:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

mit $K_I = \frac{K_P}{T_N}$ und $K_D = K_P T_V$,

wobei $e(t) = w(t) - y(t)$ der Regelfehler, K_P , K_I , K_D die Verstärkungsfaktoren, T_N die Nachstellzeit und T_V die Vorhaltezeit bedeuten. Durch die Laplace-Transformation erhalten wir für die Stellgröße im Frequenzbereich:

$$u(s) = G_{PID}(s)e(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s\right)e(s),$$

wobei $G_{PID}(s)$ die Übertragungsfunktion des idealen PID-Reglers darstellt. Der ideale PID-Regler in der oben angegebenen Formulierung wird nur selten in der Praxis gebraucht. Für den praktischen Einsatz wurden einige modifizierte Strukturen entwickelt. In den nachfolgenden drei Unterkapiteln werden die drei wichtigsten Vertreter dieser Modifikationen vorgestellt.

1.1.1 PID-Regler mit Sollwertgewichtung

Bei einem sollwertgewichteten PID-Regler werden drei Fehlersignale definiert:

$$\begin{aligned} e_P(t) &= bw(t) - y(t) , \\ e_I(t) &= e(t) = w(t) - y(t) , \\ e_D(t) &= cw(t) - y(t) , \end{aligned}$$

wobei die Führungsgröße bei der Bildung von e_P mit b und bei der Bildung von e_D mit c gewichtet wird. Da der I-Teil für einen verschwindenden stationären Nachlauffehler sorgen soll, wird die Führungsgröße bei der Bildung von e_I nicht gewichtet.

Die Stellgrösse lässt sich in diesem Fall wie folgt im Frequenzbereich anschreiben:

$$\begin{aligned} u(s) &= K_P [bw(s) - y(s)] + \frac{K_I}{s} [w(s) - y(s)] + K_D s [cw(s) - y(s)] \\ &= (bK_P + \frac{K_I}{s} + cK_D s)w(s) - (K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s)y(s) . \end{aligned}$$

Wenn die Übertragungsfunktion der Regelstrecke durch ihr Zähler- und Nennerpolynom charakterisiert wird:

$$G_S(s) = \frac{P_S(s)}{Q_S(s)} ,$$

erhalten wir für die Übertragungsfunktion des Störverhaltens von d_1 nach y (vgl. Bild 1.1):

$$G_{d_1}(s) = \frac{G_S(s)}{1 + G_{PID}(s)G_S(s)} = \frac{sP_S(s)}{sQ_S(s) + (K_D s^2 + K_P s + K_I)P_S(s)} ,$$

für die Übertragungsfunktion des Störverhaltens von d_2 nach y , die auch als Sensitivität des Regelsystems bezeichnet wird:

$$S(s) = G_{d_2}(s) = \frac{1}{1 + G_{PID}(s)G_S(s)} = \frac{sQ_S(s)}{sQ_S(s) + (K_D s^2 + K_P s + K_I)P_S(s)} ,$$

und für die Übertragungsfunktion des Führungsverhaltens (von w nach y):

$$\begin{aligned} G_W(s) &= \frac{(bK_P + \frac{K_I}{s} + cK_D s)G_S(s)}{1 + G_{PID}(s)G_S(s)} \\ &= \frac{(cK_D s^2 + bK_P s + K_I)P_S(s)}{sQ_S(s) + (K_D s^2 + K_P s + K_I)P_S(s)} . \end{aligned}$$

Aus diesen drei Übertragungsfunktionen geht hervor, dass die Faktoren b und c der Sollwertgewichtung nur das Führungsverhalten beeinflussen.

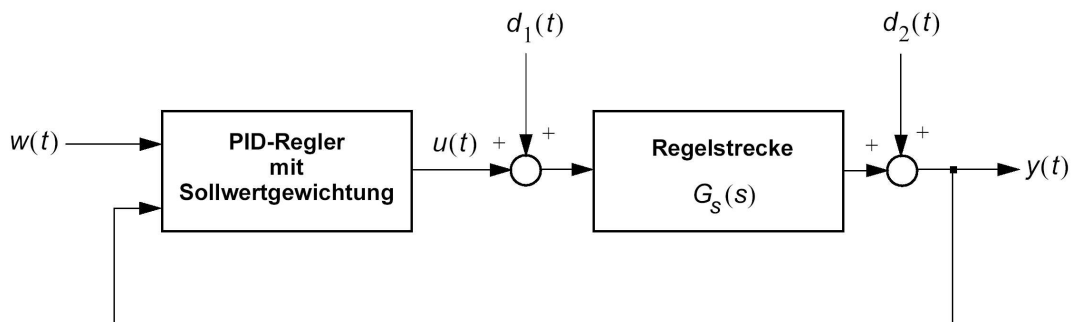


Bild 1.1: Regelsystem mit einem sollwertgewichteten PID-Regler

Somit kann mit einer entsprechenden Wahl von b und c in $cK_Ds^2 + bK_Ps + K_I$ (vgl. Zähler von $G_W(s)$) das Führungsverhalten durch Vorgabe von zwei Nullstellen vom Störverhalten entkoppelt werden.

Häufig wird $c = 0$ gesetzt, um grosse Ausschläge der Steuergrösse zu verhindern, die durch eine Differenzierung der Führungsgrösse (z.B. Sprungfunktion) verursacht würden. In diesem Fall kann die Entkopplung nur noch durch die Vorgabe einer einzigen Nullstelle in der Übertragungsfunktion des Führungsverhaltens vorgenommen werden.

Beispiel:

Als Regelstrecke betrachten wir ein Masse-Feder-Dämpfer-System mit der Masse m , Federsteifigkeit k und Dämpfungskonstante d . Die Übertragungsfunktion dieses Systems lautet:

$$G_S(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + k} \quad .$$

Wir werden die Reglerparameter K_P , K_I und K_D durch Polvorgabe berechnen. Dadurch wird das Störverhalten vollständig festgelegt. Den Einfluss der Sollwertgewichtung b im P-Teil auf das Führungsverhalten werden wir dann für $c = 0$ durch Simulation untersuchen (vgl. Bild 1.2).

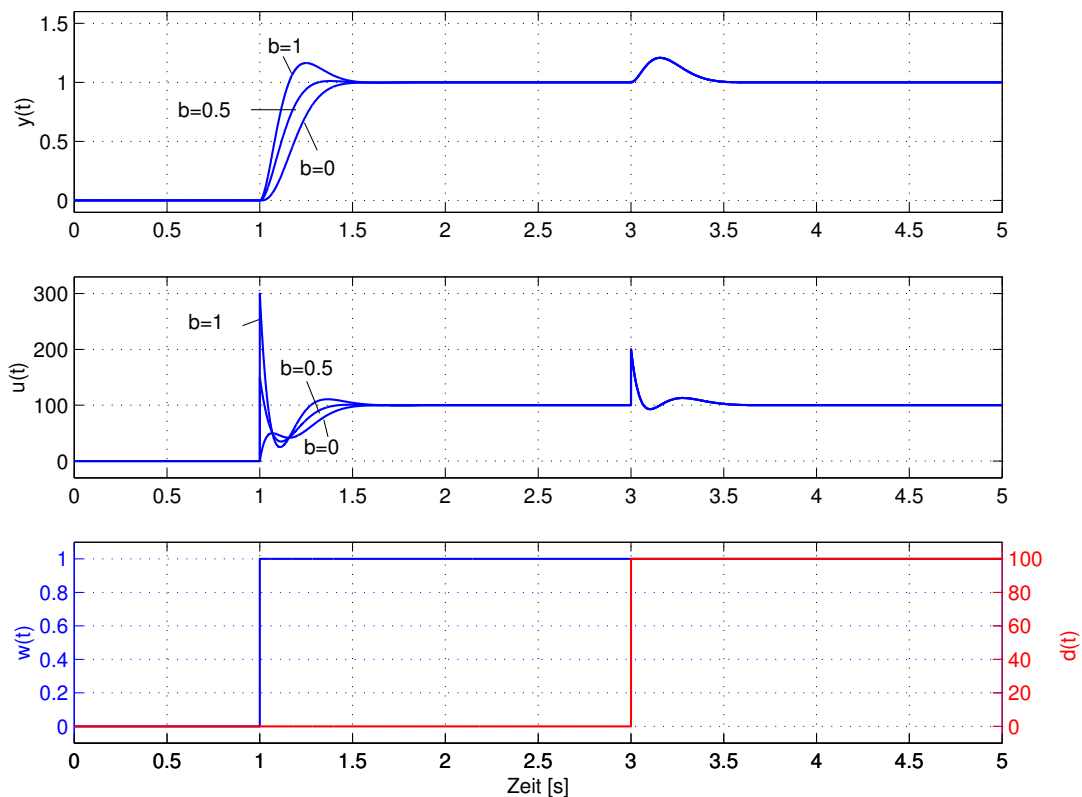


Bild 1.2: Einfluss der Sollwertgewichtung im P-Teil des PID-Reglers ($c = 0$)

Für die Polvorgabe wählen wir die folgenden drei Pole:

$$s_{1,2} = \frac{-1 \pm j}{\tau} \quad \text{und} \quad s_3 = -\alpha \frac{1}{\tau},$$

die durch α und τ parametrisiert sind.

Mit der Wahl von $s_{1,2}$ soll ein unterkritisch gedämpftes Verhalten mit einer Dämpfungszahl von $\zeta = \sqrt{2}/2$ (5% Überschwingen der Sprungantwort) erzielt werden. Mit der Zeitkonstante τ wird das Abklingen der Schwingungsenveloppen vorgegeben und mit α wird die Zeitkonstante des nichtschwingfähigen Anteils der Sprungantwort relativ zu τ bestimmt. In der Untersuchung für Bild 1.2 (Sollwertsprung nach einer Sekunde und Störsprung nach drei Sekunden) sind $\tau = 0.1s$ und $\alpha = 1$ gewählt worden. Der Einfluss von b ist klar erkennbar, nämlich je kleiner b gewählt wird, umso kleiner wird das Überschwingverhalten des Systems.

Die Reglerparameter K_P , K_I und K_D werden durch Koeffizientenvergleich des charakteristischen Polynoms für die vorgegebenen Pole bestimmt:

$$s^3 + \left(\frac{d}{m} + \frac{K_D}{m}\right)s^2 + \left(\frac{k}{m} + \frac{K_P}{m}\right)s + \frac{K_I}{m} = \left(s + \frac{1+j}{\tau}\right)\left(s + \frac{1-j}{\tau}\right)\left(s + \frac{\alpha}{\tau}\right).$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} K_P &= m(\alpha + 1) \frac{2}{\tau^2} - k, \\ K_I &= m \frac{2\alpha}{\tau^3}, \\ K_D &= m(\alpha + 2) \frac{1}{\tau} - d. \end{aligned}$$

1.1.2 Realer PID-Regler

Beim Wechsel von einem P-Regler zu einem PD-Regler bzw. von einem PI-Regler zu einem PID-Regler erhalten wir als Vorteil, dass die Phase bei hohen Frequenzen um bis 90° "zurück" gedreht wird. Durch geeignete Wahl der Eckfrequenz $\frac{1}{T_V}$ können wir also die Phasenreserve eines Regelsystems signifikant vergrößern.

Als Nachteil erhalten wir aber eine erhöhte Empfindlichkeit des Reglers auf hochfrequente Störsignale.

Beispiel: Die Regelabweichung $e(t)$ enthalte ein harmonisches Nutzsignal mit der Kreisfrequenz 10 rad/s und einen kleinen Netzbrumm von 50 Hz , welcher vom Sensor stammt:

$$e(t) = \sin(10t) + 0.03 \sin(100\pi t).$$

Im D-Teil des PD- oder PID-Reglers wird der folgende Signalanteil $u_D(t)$ des Stellsignals $u(t)$ erzeugt:

$$u_D(t) = K_P T_V (10 \cos(10t) + 3\pi \cos(100\pi t)).$$

Offensichtlich wird das Stellsignal ein unzulässig hohes Brummsignal enthalten, das die Lebensdauer der Aktoren reduzieren kann und das unerwünschte Signalanteile in der Regelstrecke erzeugt.

Betrachten wir ausserdem den Frequenzgang zwischen der Störgrösse d_2 und dem Stellsignal u :

$$G_{ud_2}(j\omega) = -\frac{G_{PID}(j\omega)}{1 + G_o(j\omega)}.$$

und bilden wir den Limes für $\omega \rightarrow \infty$, um das Übertragungsverhalten hochfrequenter Störungen zu bestimmen, dann erhalten wir für den Amplitudengang:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_{ud_2}(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_{PID}(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [K_P + \frac{K_I}{\omega} + K_D \omega],$$

da in der Regel $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_o(j\omega)| = 0$ ist. Dieser Limes ist wegen dem D-Anteil unendlich gross.

In jeder Realisierung eines D-Anteils eines PD- oder PID-Reglers muss deshalb die Wirkung des D-Anteils vom unendlichen Frequenzintervall $1/T_V \cdots \infty$ auf ein sinnvolles Intervall

$$\frac{1}{T_V} \cdots \frac{N}{T_V} \quad \text{mit} \quad N = 5 \cdots 20$$

beschränkt werden. Zu diesem Zweck wird ein Tiefpasselement erster Ordnung mit der Eckfrequenz N/T_V und einem statischen Verstärkungsfaktor Eins dem D-Teil in Serie geschaltet. Somit erhalten wir als Übertragungsfunktion eines realen PD-Reglers:

$$G_R(s) = K_P \left(1 + \frac{T_V s}{1 + \frac{T_V}{N} s} \right)$$

und eines realen PID-Reglers:

$$G_R(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_N s} + \frac{T_V s}{1 + \frac{T_V}{N} s} \right).$$

Im Bild 1.3 ist das Bode-Diagramm des realen PD-Reglers für verschiedene Werte des Parameters N dargestellt. Zu beachten ist, dass die Verstärkung der hochfrequenten Störungen ($\omega \rightarrow \infty$) auf

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G_{PD}(j\omega)| = K_P(1 + N)$$

begrenzt wird. Als Nachteil muss jedoch mit einem kleineren Phasenreservengewinn durch den D-Anteil gerechnet werden.

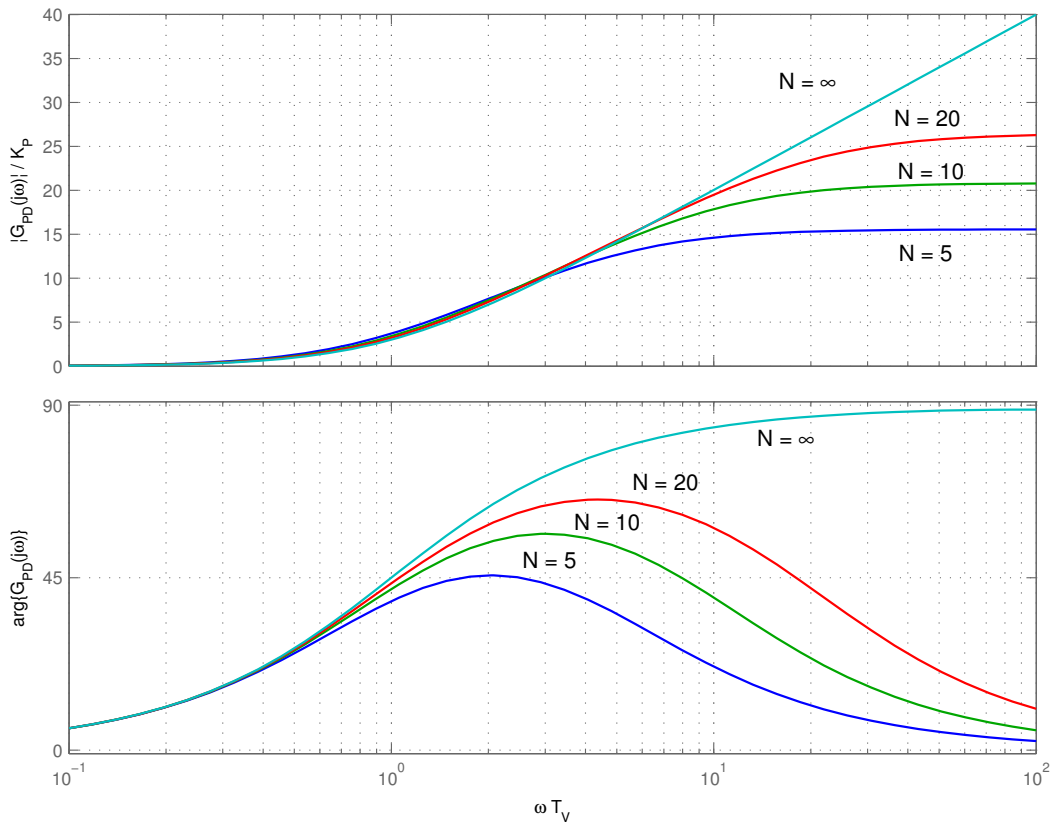


Bild 1.3: Bode-Diagramm des realen PD-Reglers

1.1.3 Anti-Windup des Integrators

Ein weiterer Aspekt aus der Praxis, der ebenfalls zu einer Erweiterung der Struktur des PID-Reglers führt, basiert auf der Tatsache, dass jeder Aktuator eine Begrenzung aufweist (vgl. Bild 1.4). Zum Beispiel kann ein Ventil nur so weit öffnen wie schliessen als seine Anschläge dies erlauben.

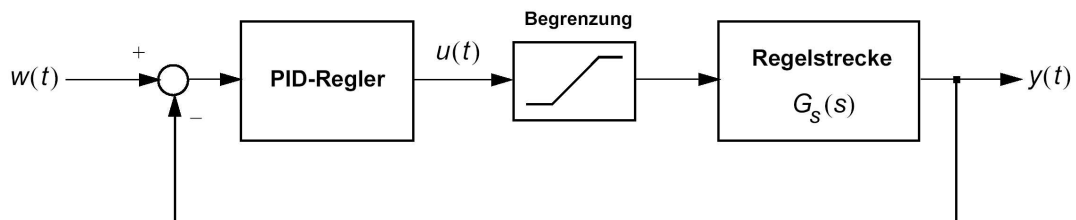


Bild 1.4: Regelsystem mit Begrenzung

In einem Regelsystem kann der Regler beim Auftreten von grossen Störgrößen resp. Führungsgrößen Stellsignale verlangen, die zu einem Über- oder Unter-

schreiten der Begrenzung des Aktuators führen. In diesem Fall arbeitet das Regelsystem in “open loop”, da der Aktuator unabhängig vom verlangten Stellsignal in der Begrenzung bleibt.

Falls der Regler nun einen integrierenden Anteil besitzt, wird der Regelfehler durch den Integrator des Reglers weiter integriert. Dadurch wird der I-Anteil des Stellsignals sehr gross, der nach einer Umkehrung des Wirkungssinns des Stellsignals zunächst abgebaut werden muss. Dieser Effekt wird als “windup” des Integrators bezeichnet und hat eine negative Auswirkung auf das Regelverhalten.

Im Bild 1.5 ist der Integrator-windup eines PI-Reglers anhand der Niveauregelung eines Flüssigkeitsbehälters illustriert. Der Sollwert $w(t)$ ist so gross, dass der Aktuator in den oberen Anschlag geht. Der I-Anteil des Reglers steigt anfänglich wegen dem positiven Regelfehler und erreicht sein Maximum bei $t = 5s$, wenn der Regelfehler Null wird. Wegen dem grossen I-Anteil bleibt der Aktuator im oberen Anschlag, den er erst verlässt, nachdem der Regelfehler genügend lang negativ bleibt. Während dieser Zeit muss zunächst der I-Anteil des Reglers abgebaut werden. Dies geschieht einige Male in beiden Richtungen, bis das Stellsignal nicht mehr so gross ist, so dass der Aktuator nicht mehr in seine Anschläge geht. Dies führt zu einem grossen Überschwingverhalten und zu einem schwachgedämpften Verhalten des Regelsystems.

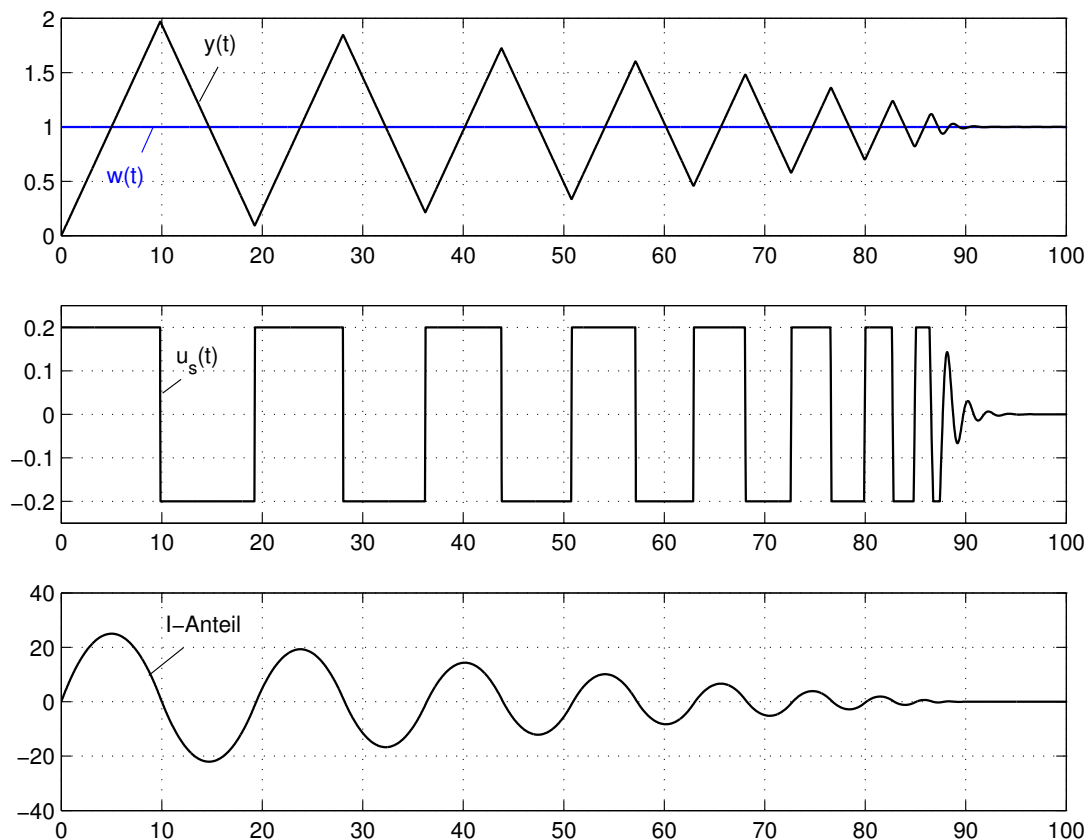


Bild 1.5: Illustration von “windup” des Integrators anhand einer Niveauregelung

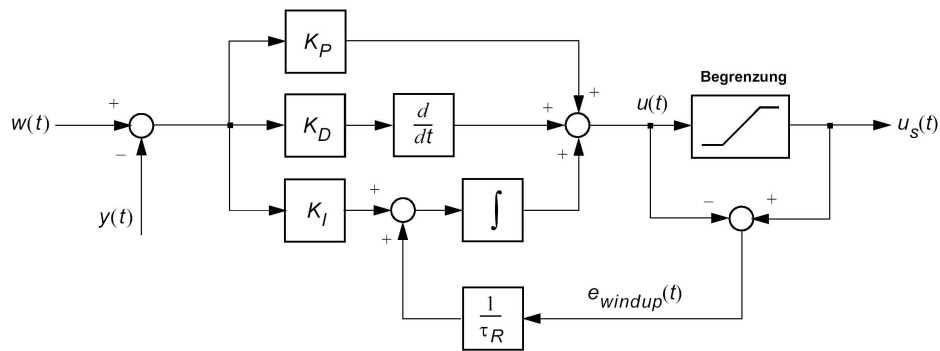


Bild 1.6: Blockschaltbild eines PID-Reglers mit Anti-Windup

Das Bild 1.6 zeigt eine Modifikation der Struktur des PID-Reglers als eine Massnahme gegen windup des Integrators. Dieser PID-Regler mit anti-windup führt die Abweichung e_{windup} zwischen den beiden Signalen vor und nach der Begrenzung mit der Verstärkung $\frac{1}{\tau_R}$ auf den Integrator zurück, um ein Weiterintegrieren des Integrators im Sinne des windups zu verhindern. Solange sich der Aktuator nicht im Anschlag befindet, ist das Fehlersignal $e_{\text{windup}} = 0$ und der Normalbetrieb wird nicht durch die Rückführung beeinflusst.

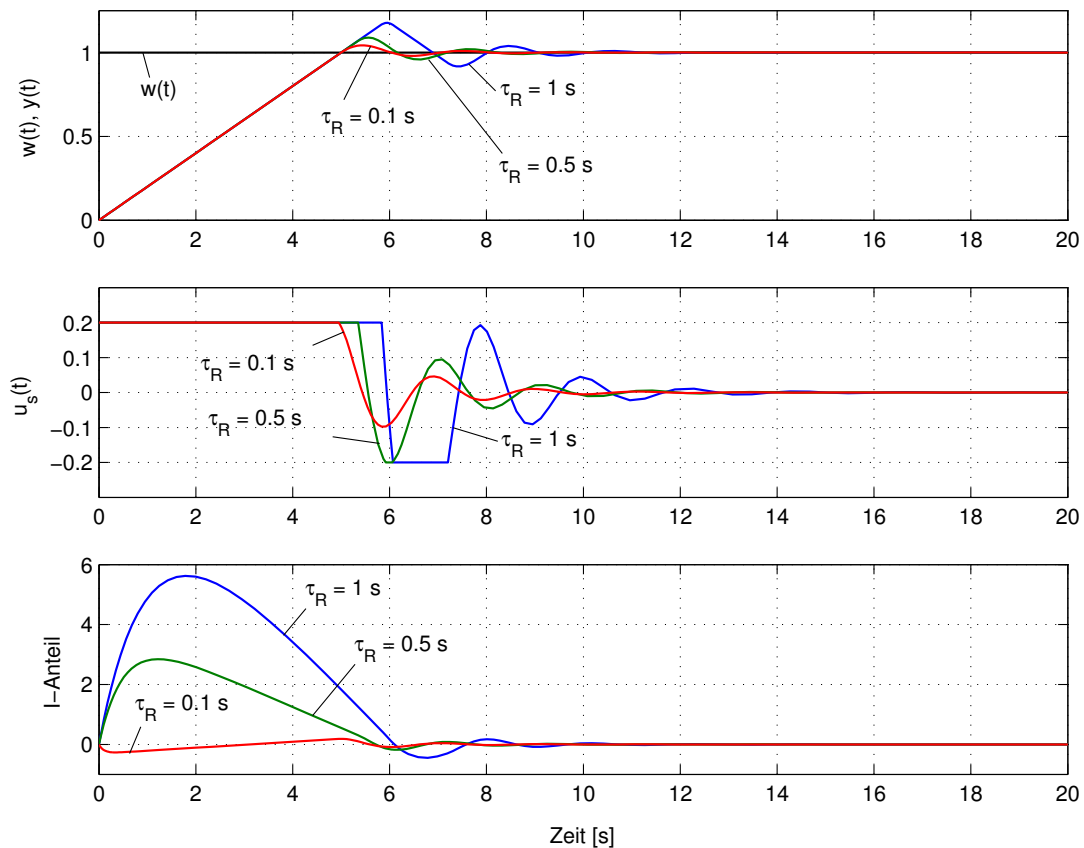


Bild 1.7: Niveauregelung mit einem PID-Regler mit anti-windup für die drei verschiedenen Reset-Zeitkonstanten $\tau_R = 0.1, 0.5$ und 1.0 s

Die Reset-Zeitkonstante τ_R bestimmt dabei, wie schnell auf windup des Integrators reagiert wird. Das Bild 1.7 zeigt das Verhalten der Niveauregelung des Flüssigkeitsbehälters mit einem PID-Regler mit anti-windup für die drei verschiedenen Reset-Zeitkonstanten (vgl. auch mit dem Bild 1.5).

1.2 Einführung in die Spezifikation

Bei der Spezifikation werden quantitative Forderungen an das dynamische Verhalten des Regelsystems gestellt. Diese Forderungen werden hier hauptsächlich im Frequenzbereich formuliert. Dabei werden die folgenden grob formulierten Ziele verfolgt:

- Für tiefe Frequenzen: gute Folgeregelung und gute Störgrößenunterdrückung
- Für mittlere Frequenzen: gute Robustheit (Phasenreserve, Verstärkungsreserve) gegen Modellierungsfehler
- Für hohe Frequenzen: gute Robustheit gegen hochfrequente Modellierungsfehler (vernachlässigte Dynamik von Sensoren, Aktoren, sowie mechanischen Strukturen usw.)

Diese grob formulierten Ziele werden weiter unten in quantitative Spezifikationen umgesetzt, nachdem zunächst einige Begriffe und Zusammenhänge vorgestellt worden sind. Die Erweiterung auf Mehrgrößen-Regelsysteme (MIMO) erfolgt mit Hilfe der Singularwerte (vgl. Kapitel 4.1.3 und Anhang 2).

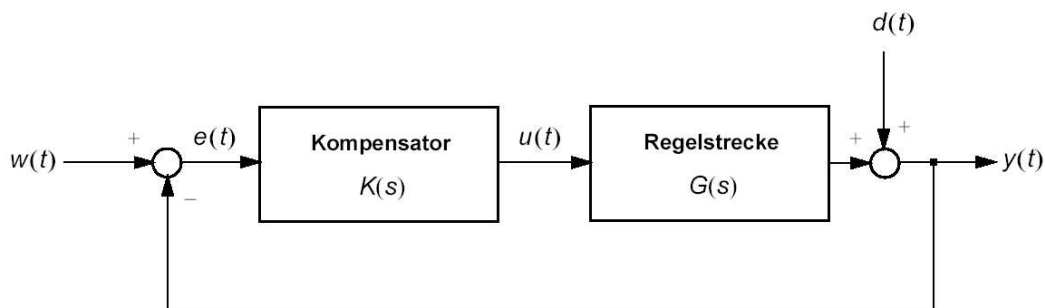


Bild 1.8: Signalflussbild des Regelsystems mit der “worst case” Störgröße d

Basierend auf dem im Bild 1.8 dargestellten Signalflussbild des Regelsystems mit der “worst case” Störgröße werden die folgenden Übertragungsfunktionen eingeführt, die für die quantitative Spezifikation verwendet werden:

Die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Regelkreises oder kurz die Kreisverstärkung (loop gain):

$$L(s) = G(s)K(s) ,$$

die Kreisverstärkungsdifferenz (return differenz):

$$D(s) = 1 + G(s)K(s) = 1 + L(s)$$

die Empfindlichkeit (sensitivity):

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)K(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{D(s)},$$

und die komplementäre Empfindlichkeit (complementary sensitivity):

$$T(s) = \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)}.$$

Sie heisst komplementäre Empfindlichkeit, weil sie die Empfindlichkeit zu Eins ergänzt:

$$S(s) + T(s) = 1.$$

Verifikation:

$$S(s) + T(s) = \frac{1}{1 + L(s)} + \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{1 + L(s)}{1 + L(s)} = 1.$$

Es ist zu beachten, dass bei den oben eingeführten Übertragungsfunktionen gegenüber früher neue Bezeichnungen verwendet wurden. Die Relationen zu den bisher verwendeten Bezeichnungen sind:

$$G_S(s) \longrightarrow G(s), \quad G_R(s) \longrightarrow K(s),$$

und

$$G_o(s) \longrightarrow L(s), \quad G_d(s) \longrightarrow S(s) \quad \text{und} \quad G_W(s) \longrightarrow T(s).$$

Im Bild 1.9 sind die Frequenzgänge der Kreisverstärkung, der Empfindlichkeit, der komplementären Empfindlichkeit und der Kreisverstärkungsdifferenz eines mit einem PID-Regler geregelten Systems in einem Bode-Diagramm dargestellt.

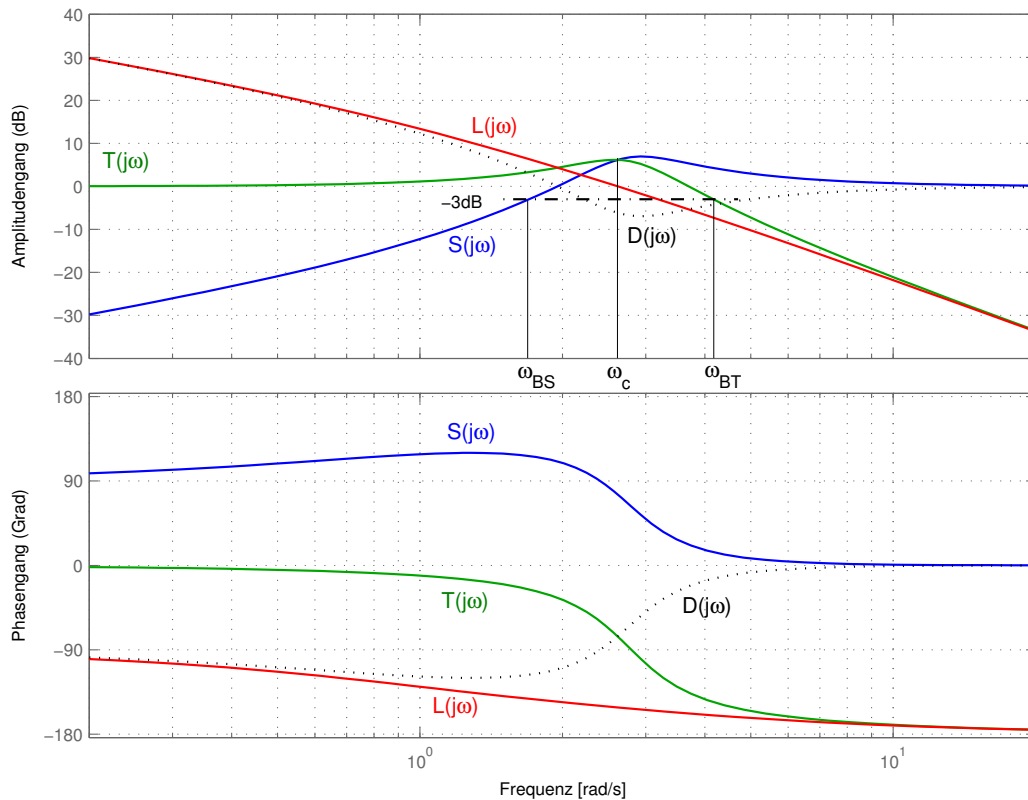


Bild 1.9: Frequenzgänge der Kreisverstärkung, der Kreisverstärkungsdifferenz, der Empfindlichkeit und der komplementären Empfindlichkeit eines mit einem PID-Regler geregelten Systems

Definitionen:

Für die Spezifikation werden die folgenden Begriffe verwendet:

- *Bandbreite der Empfindlichkeit:* ω_{BS} = Die Frequenz, wo der Amplitudengang der Empfindlichkeit die $-3dB$ -Linie zum ersten Mal von unten schneidet, d.h. $|S(j\omega_{BS})| = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$
- *Bandbreite der komplementären Empfindlichkeit:* ω_{BT} = Die Frequenz, wo der Amplitudengang der komplementären Empfindlichkeit die $-3dB$ -Linie zum ersten Mal von oben schneidet, d.h. $|T(j\omega_{BT})| = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$
- *Bandbreite des Regelsystems:* ω_c = Durchtrittsfrequenz der Kreisverstärkung (durch die 0-dB-Linie), d.h. $|L(j\omega_c)| = 1$ (in der Regel: $\omega_{BS} < \omega_c < \omega_{BT}$)
- *Passband:* Frequenzintervall $0 \leq \omega < 0.1\omega_c$
- *Durchtrittsbereich:* Frequenzintervall $0.1\omega_c \leq \omega < 10\omega_c$
- *Sperrband:* Frequenzintervall $10\omega_c \leq \omega < \infty$
- *Maximum der Empfindlichkeit:* $S_{\max} = \sup_{0 \leq \omega < \infty} |S(j\omega)|$
- *Maximum der komplementären Empfindlichkeit:* $T_{\max} = \sup_{0 \leq \omega < \infty} |T(j\omega)|$

Drei Interpretationen der Empfindlichkeit:

a) Interpretation als Sensitivität des Folgeregelungsverhaltens:

Die Empfindlichkeit $S(s)$ wurde ursprünglich in der Regelungstechnik als eine relative Änderung des Folgeregelungsverhaltens $dT(s)/T(s)$ aufgrund einer relativen Änderung der Regelstrecke $dG(s)/G(s)$ eingeführt:

$$S(s) = \frac{dT(s)}{T(s)} \bigg/ \frac{dG(s)}{G(s)} .$$

Verifikation:

$$\begin{aligned} T = \frac{GK}{1+GK} &\Rightarrow \frac{dT}{dG} = \frac{K(1+GK) - KGK}{(1+GK)^2} = \frac{K}{(1+GK)^2} = \frac{1}{G} \cdot \frac{GK}{(1+GK)} \cdot \frac{1}{(1+GK)} \\ \Rightarrow \frac{dT}{dG} = \frac{T \cdot S}{G} &\Rightarrow S(s) = \frac{dT(s)}{T(s)} \bigg/ \frac{dG(s)}{G(s)} \quad q.e.d. \end{aligned}$$

b) Interpretation als Störgrößenunterdrückung:

Die Empfindlichkeit stellt die Übertragungsfunktion zwischen der Störgrösse d und der Regelgrösse y dar:

$$y(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \cdot d(s) = S(s) \cdot d(s) ,$$

so dass sie der frequenzabhängigen Abschwächung (Unterdrückung) der Störgrösse durch die Regelung entspricht.

c) Interpretation als Güte der Folgeregelung:

Der Regelfehler $e(s) = w(s) - y(s)$ für die Folgeregelung gemäss Bild 1.8 mit $d \equiv 0$ kann angegeben werden durch:

$$e(s) = S(s) \cdot w(s) .$$

Für $S(s) = 1$ würde ein Regelfehler resultieren, der gleich gross wäre wie das Führungssignal selbst ($e(s) = 1 \cdot w(s)$). Dies entspräche einem Folgeregelfehler von 100 % und würde bedeuten, dass der Regler die Aufgabe der Folgeregelung nicht erfüllen würde. Dies liegt insbesondere für ein hochfrequentes Führungssignal ($\omega \rightarrow \infty$) vor (vgl. Bild 1.9). Wir bezeichnen dieses Fehlersignal mit $e_{100\%}(s)$ und betrachten es als eine Referenz für die Güte der Folgeregelung:

$$e(s) = S(s) \cdot e_{100\%}(s) .$$

Dadurch kann die Empfindlichkeit als eine frequenzabhängige Intensität der Reduktion des Folgeregelfehlers im Vergleich zum Referenzfehlersignal $e_{100\%}(s)$ interpretiert werden.

Die Regelung bewirkt somit eine Verbesserung im Sinne einer Reduktion des Regelfehlers und der Störung für tiefe Frequenzen im *Passband*, wo $|S(j\omega)| < 1$ ist. Falls der Regler ein integrierendes Verhalten besitzt, dann resultiert sogar $|S(j0)| = 0$ (vgl. Bild 1.8), so dass der stationärer Nachlauf Fehler verschwindet.

Da die realen Systeme ein Tiefpassverhalten aufweisen, gilt für hohe Frequenzen ($\omega \rightarrow \infty$) im *Sperrband*: $|L(j\omega)| \rightarrow 0$ und demzufolge $|S(j\omega)| \rightarrow 1$. Somit kann der Regler im *Sperrband* die Aufgabe der Störunterdrückung und der Folgeregelung ($e(s) \approx e_{100\%}(s)$) nicht mehr erfüllen.

Für den mittleren Frequenzbereich im *Durchtrittsbereich* kann im allgemeinen nicht vermieden werden, dass ein Maximum der Empfindlichkeit grösser als Eins resultiert ($S_{\max} > 1$). Somit ist im *Durchtrittsbereich* in der Regel mit einer negativen Auswirkung zu rechnen. Das Maximum S_{\max} der Empfindlichkeit kann demzufolge als ein Mass für die maximale Degradierung des Regelungseffekts interpretiert werden.

Apolloniuskreise:

Der Apolloniuskreis ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten ein festes Verhältnis haben. Dieser geometrische Ort erhielt seine Bezeichnung (Apolloniuskreis) nach seinem Erfinder, Apollonius von Perga, einem griechischen Mathematiker und Astronomen, der ca. 262–190 v.Chr. lebte.

Hier wird der Apolloniuskreis als geometrischer Ort einer konstanten komplementären Empfindlichkeit interpretiert:

$$|T(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} = k .$$

Dabei handelt es sich hier um die folgenden zwei Strecken mit dem konstanten Verhältnis k :

- $|L(j\omega)|$: der Abstand eines Punktes vom Ursprung und
- $|1 + L(j\omega)|$: der Abstand desselben Punktes vom Nyquist-Punkt $(-1, j \cdot 0)$.

Ein solcher Apolloniuskreis besitzt:

- das Zentrum: $(\frac{-k^2}{k^2-1}, j \cdot 0)$ und
- den Radius $(\frac{k}{k^2-1})$.

Im Bild 1.11 sind die Apolloniuskreise für $k = 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 2$ und 3 dargestellt. Wird der komplexe Frequenzgang der Kreisverstärkung $L(j\omega)$ in diesem Diagramm dargestellt, so bestimmt der durch $L(j\omega)$ tangierte und gleichzeitig begrenzende Apolloniuskreis mit dem konstanten Verhältnis k die Resonanz-Überhöhung der komplementären Empfindlichkeit $T_{\max} = k$.

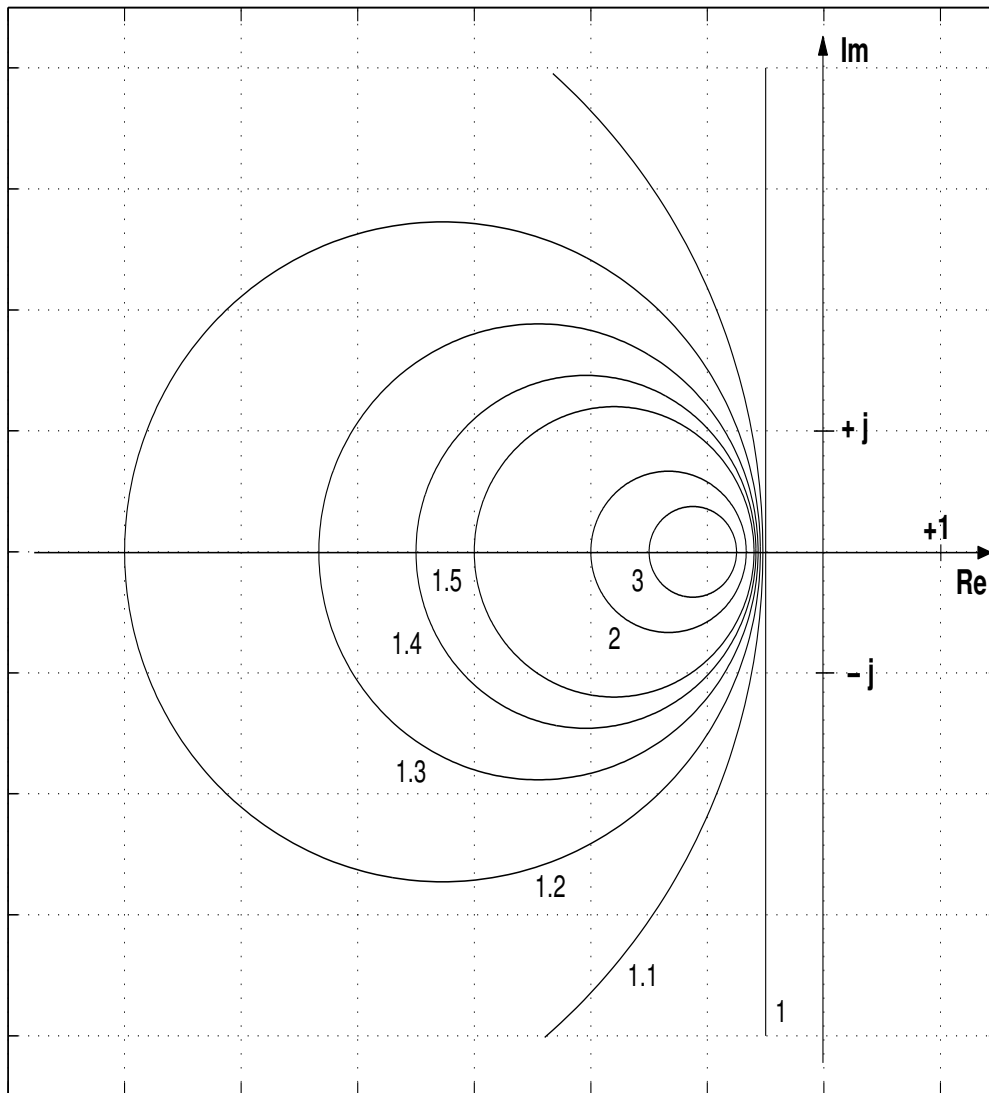


Bild 1.10: Apolloniuskreise für $k = 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 2$ und 3

Maximalwerte als Robustheitsmasse (“maximum peak criteria”):

Das Maximum S_{\max} der Empfindlichkeit und das Maximum T_{\max} der komplexen Empfindlichkeit stehen auch in einem direkten Zusammenhang mit den Robustheitsmassen Phasen- und Verstärkungsreserve.

A) Aufgrund eines Maximalwertes S_{\max} der Empfindlichkeit ist mindestens die folgende Robustheit (Phasen- und Verstärkungsreserve) garantiert:

$$K \in \left(\frac{S_{\max}}{S_{\max} + 1}, \frac{S_{\max}}{S_{\max} - 1} \right) \quad \text{und} \quad \varphi = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2S_{\max}}\right)$$

Beispiel: $S_{\max} = 3 \text{ dB} \approx 1.414 \Rightarrow K \in (0.586, 3.41)$ und $\varphi \approx 41.4^\circ$

Verifikation:

Geometrie (vgl. Bild 1.11): Die Nyquist-Kurve $L(j\omega)$, $0 \leq \omega < \infty$, betritt den Kreis mit Zentrum im Nyquist-Punkt $(-1, j \cdot 0)$ und Radius $D_{\min} = 1/S_{\max} \leq 1$ nicht.

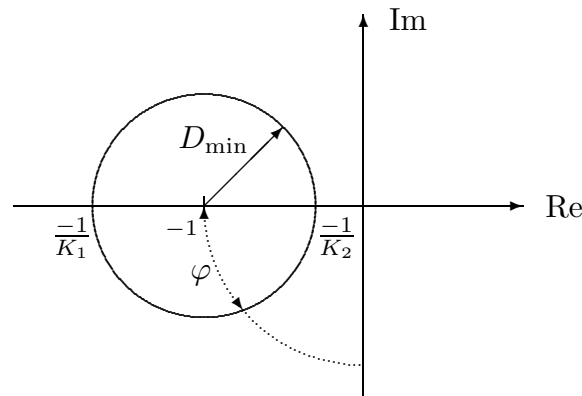


Bild 1.11: Geometrie zur worst case Analyse von S_{\max}

- Verstärkungsreserve:

Worst case Punkte:

$$\frac{-1}{K_1} = -1 - D_{\min} \quad \text{und} \quad \frac{-1}{K_2} = -1 + D_{\min}$$

Somit:

$$K_1 = \frac{1}{1 + D_{\min}} = \frac{S_{\max}}{S_{\max} + 1} \quad \text{und} \quad K_2 = \frac{1}{1 - D_{\min}} = \frac{S_{\max}}{S_{\max} - 1}$$

- Phasenreserve:

Worst case Punkt:

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{D_{\min}}{2}$$

Somit:

$$\varphi = 2 \arcsin\left(\frac{D_{\min}}{2}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2S_{\max}}\right)$$

- B) Aufgrund eines Maximalwertes T_{\max} der komplementären Empfindlichkeit ist mindestens die folgende Robustheit (Phasen- und Verstärkungsreserve) garantiert:

$$K \in \left(1 - \frac{1}{T_{\max}}, 1 + \frac{1}{T_{\max}}\right) \quad \text{und} \quad \varphi = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2T_{\max}}\right)$$

Beispiel: $T_{\max} = 1 \text{ dB} \approx 1.122 \Rightarrow K \in (0.109, 1.891)$ und $\varphi \approx 52.9^\circ$

Verifikation:

Geometrie (vgl. Bild 1.12): Die Nyquist-Kurve $L(j\omega)$, $0 \leq \omega < \infty$, betritt den Apollonius-Kreis mit Zentrum im Punkt $(\frac{-T_{\max}^2}{T_{\max}^2-1}, j\cdot 0)$ und Radius $\frac{T_{\max}}{T_{\max}^2-1}$ nicht.

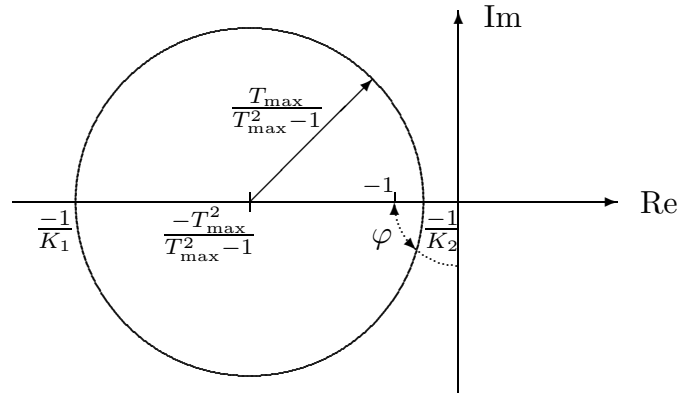


Bild 1.12: Geometrie zur worst case Analyse von T_{\max}

- Verstärkungsreserve:

Worst case Punkte:

$$\frac{-1}{K_1} = \frac{-T_{\max}^2}{T_{\max}^2-1} - \frac{T_{\max}}{T_{\max}^2-1} \quad \text{und} \quad \frac{-1}{K_2} = \frac{-T_{\max}^2}{T_{\max}^2-1} + \frac{T_{\max}}{T_{\max}^2-1}$$

Somit:

$$K_1 = 1 - \frac{1}{T_{\max}} \quad \text{und} \quad K_2 = 1 + \frac{1}{T_{\max}}$$

- Phasenreserve:

Worst case Punkt:

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{|D(j\omega_c)|}{2} = \frac{|D(j\omega_c)| |L(j\omega_c)|}{2} = \frac{1}{2T_{\max}}$$

Somit:

$$\varphi = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2T_{\max}}\right)$$

- C) Aufgrund eines Maximalwertes S_{\max} der Empfindlichkeit *und* eines Maximalwertes T_{\max} der komplementären Empfindlichkeit ist mindestens die folgende Robustheit (Phasen- und Verstärkungsreserve) garantiert:

$$K \in \left(\min \left\{ 1 - \frac{1}{T_{\max}}, \frac{S_{\max}}{S_{\max} + 1} \right\}, \max \left\{ \frac{S_{\max}}{S_{\max} - 1}, 1 + \frac{1}{T_{\max}} \right\} \right)$$

$$\text{und } \varphi = 2 \arcsin \left(\frac{1}{2 \min \{T_{\max}, S_{\max}\}} \right)$$

Beispiel: $S_{\max} = 3 \text{ dB} \approx 1.414$ und $T_{\max} = 1 \text{ dB} \approx 1.122$

$$\Rightarrow K \in (0.109, 3.41) \text{ und } \varphi \approx 52.9^\circ$$

Quantitative Spezifikationen:

Im Hinblick auf Mehrgrößenregelsysteme, für deren Spezifikationen die Singularwertverläufe (vgl. Kapitel 4.1.3 und Anhang 2) als reelle Frequenzkennlinien (ohne Phaseninformation) herangezogen werden, werden für die Spezifikation von einschleifigen Regelsystemen (SISO) häufig auch nur die Amplitudengänge $|L(j\omega)|$ der Kreisverstärkung, $|D(j\omega)|$ der Kreisverstärkungsdifferenz, $|S(j\omega)|$ der Empfindlichkeit und $|T(j\omega)|$ der komplementären Empfindlichkeit verwendet (vgl. Bild 4.4 im Kapitel 4.1.3).

Dabei ist zu beachten, dass die in den Bildern 1.9 und 4.4 gezeigten Frequenzkennlinien redundante Informationen enthalten: Im Passband (bei sehr grosser Kreisverstärkung) gilt $L(j\omega) \approx D(j\omega)$ und im Sperrband (bei sehr kleiner Kreisverstärkung) $L(j\omega) \approx T(j\omega)$. Zudem gilt definitionsgemäss $S(j\omega) = \frac{1}{D(j\omega)}$.

Die zu Beginn dieses Kapitels grob formulierten Ziele werden nun nachfolgend in quantitative Spezifikationen für die Frequenzkennlinien umgesetzt:

- gute Folgeregelung und gute Störgrössenunterdrückung im Passband:

$$|L(j\omega)| > L_{\min}(\omega)$$

$$\text{oder } |S(j\omega)| < S_{\max}(\omega) = \frac{1}{L_{\min}(\omega)}$$

$$\text{oder } |D(j\omega)| > D_{\min}(\omega) = L_{\min}(\omega)$$

Beispiel (vgl. Bild 4.4 im Kapitel 4.1.3):

$$L_{\min}(\omega) = \left| \frac{1}{j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) + 0.01} \right| = \frac{100}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{0.01 \cdot \omega_c}\right)^2}}; \quad (0 \leq \omega < 0.1\omega_c)$$

$L_{\min}(0) = 100$ (40 dB): garantiert einen stationären Nachlauffehler $< 1\%$

Bemerkung: Im Bild 4.4 sind die Asymptoten von $L_{\min}(\omega)$ dargestellt.

- gute Robustheit gegen Modellierungsfehler im Durchtrittsbereich:

$$|S(j\omega)| < S_{\max}(\omega)$$

$$\text{oder } |D(j\omega)| > D_{\min}(\omega) = \frac{1}{S_{\max}(\omega)}$$

$$\text{und } |T(j\omega)| < T_{\max}(\omega)$$

Beispiel (vgl. Bild 4.4 im Kapitel 4.1.3):

$$S_{\max} = 3 \text{ dB} \approx 1.414 \text{ und } T_{\max} = 1 \text{ dB} \approx 1.122$$

$$\Rightarrow K \in (0.109, 3.41) \text{ und } \varphi \approx 52.9^\circ$$

- gute Robustheit gegen hochfrequente Modellierungsfehler im Sperrband:

$$|L(j\omega)| < L_{\max}(\omega)$$

$$\text{oder } |T(j\omega)| < T_{\max}(\omega) = L_{\max}(\omega)$$

Beispiel (vgl. Bild 4.4 im Kapitel 4.1.3):

$$L_{\max}(\omega) = \frac{\omega_c}{\omega}; \quad (10\omega_c \leq \omega < \infty)$$

1.3 Entwurfsmethoden

1.3.1 Ziegler-Nichols-Methode

Die Ziegler-Nichols-Methode ist aus der Regelungstechnik I bekannt. Hier wird als Ergänzung dazu eine Interpretation der Einstellregeln vorgestellt.

Einstellregel nach Ziegler, Nichols:

$$\text{für P-Regler: } K_P = 0.5K_{P,kr}$$

$$\text{für PI-Regler: } K_P = 0.45K_{P,kr}$$

$$T_N = 0.85T_{kr}$$

$$\text{für PD-Regler: } K_P = 0.55K_{P,kr}$$

$$T_V = 0.15T_{kr}$$

$$\text{für PID-Regler: } K_P = 0.6K_{P,kr}$$

$$T_N = 0.5T_{kr}$$

$$T_V = 0.125T_{kr} = 0.25T_N,$$

wobei $K_{P,kr}$ die kritische Verstärkung und $T_{kr} = 2\pi/\omega_{kr}$ die Schwingungsperiode und ω_{kr} die kritische Kreisfrequenz der Regelstrecke im kritischen Punkt (Schnittpunkt von $G(j\omega)$ mit der negativen Re-Achse) bedeuten.

Interpretation:

Der kritische Punkt der Regelstrecke $(-1/K_{P,kr}, 0 \cdot j)$ wird mit den Einstellwerten nach Ziegler, Nichols wie folgt verschoben:

- für einen P-Regler in den Punkt: -0.5 ,
- für einen PI-Regler in den Punkt: $-0.45 + 0.084j$ (vgl. Bild 1.13),
- für einen PD-Regler in den Punkt: $-0.55 - 0.518j$,
- für einen PID-Regler in den Punkt: $-0.6 - 0.28j$.

Dabei ist der Zielpunkt ein Element der Kreisverstärkung $L(j\omega)$.

Verifikation:

$$\text{a) } L(j\omega_{kr}) = K(j\omega_{kr}) \cdot G(j\omega_{kr}) = K_P \cdot \left(-\frac{1}{K_{P,kr}}\right)$$

$$K_P = 0.5K_{P,kr} \quad \Rightarrow \quad L(j\omega_{kr}) = -0.5$$

$$\text{b) } L(j\omega_{kr}) = K(j\omega_{kr}) \cdot G(j\omega_{kr}) = K_P \left(1 - \frac{1}{T_N \omega_{kr}} j\right) \cdot \left(-\frac{1}{K_{P,kr}}\right)$$

$$K_P = 0.45K_{P,kr}, \quad T_N = 0.85T_{kr} \quad \text{und} \quad \omega_{kr} = 2\pi/T_{kr}$$

$$\Rightarrow \quad L(j\omega_{kr}) = 0.45K_{P,kr} \left(1 - \frac{1}{(0.85T_{kr})(2\pi/T_{kr})} j\right) \cdot \left(\frac{-1}{K_{P,kr}}\right) \approx -0.45 + 0.084j$$

$$\text{c) } L(j\omega_{kr}) = K(j\omega_{kr}) \cdot G(j\omega_{kr}) = K_P (1 + T_V \cdot \omega_{kr} j) \cdot \left(-\frac{1}{K_{P,kr}}\right)$$

$$K_P = 0.55K_{P,kr}, \quad T_V = 0.15T_{kr} \quad \text{und} \quad \omega_{kr} = 2\pi/T_{kr}$$

$$\Rightarrow \quad L(j\omega_{kr}) = 0.55K_{P,kr} (1 + (0.15T_{kr})(2\pi/T_{kr})j) \cdot \left(\frac{-1}{K_{P,kr}}\right) \approx -0.55 - 0.518j$$

$$\text{d) } L(j\omega_{kr}) = K(j\omega_{kr}) \cdot G(j\omega_{kr}) = K_P \left[1 + (T_V \omega_{kr} - \frac{1}{T_N \omega_{kr}}) j\right] \cdot \left(-\frac{1}{K_{P,kr}}\right)$$

$$K_P = 0.6K_{P,kr}, \quad T_N = 0.5T_{kr}, \quad T_V = 0.125T_{kr} \quad \text{und} \quad \omega_{kr} = 2\pi/T_{kr}$$

$$\Rightarrow \quad L(j\omega_{kr}) = 0.6K_{P,kr} \left[1 + \left(0.125T_{kr} \cdot \frac{2\pi}{T_{kr}} - \frac{1}{(0.5T_{kr})(2\pi/T_{kr})}\right) j\right] \cdot \left(-\frac{1}{K_{P,kr}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad L(j\omega_{kr}) = -0.6 \left[1 + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}\right) j\right] \approx -0.6 - 0.28j$$

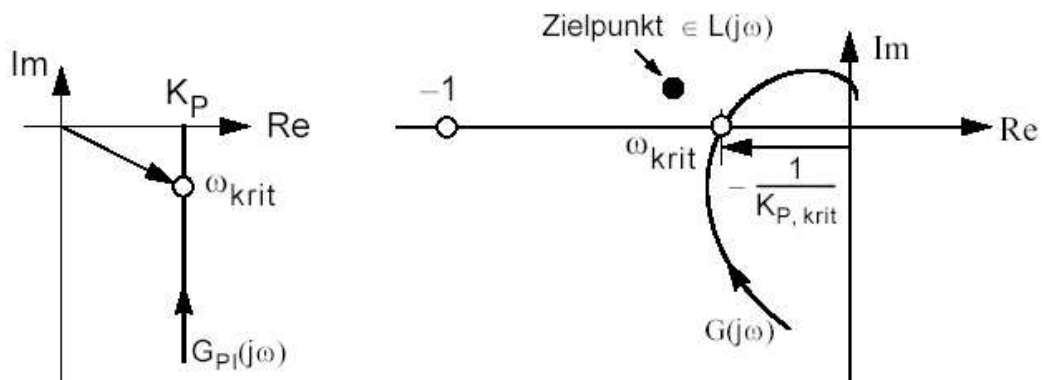


Bild 1.13: Interpretation der Ziegler-Nichols-Methode bei der Einstellung eines PI-Reglers (Verschiebung des kritischen Punkts der Regelstrecke)

1.3.2 Loop-shaping mit PID-Regler

Als “loop-shaping”-Methode wird ein Entwurfsverfahren bezeichnet, das dem Frequenzgang der Kreisverstärkung $L(j\omega)$ eine geeignete Form gibt. Nachfolgend werden drei Methoden für das “loop-shaping” mit PID-Regler vorgestellt.

Modifikation der Ziegler-Nichols-Methode

Mit der oben angegebenen Interpretation der Ziegler-Nichols-Methode kann sie als einfachste “loop-shaping”-Methode angesehen werden. Die Verschiebung des kritischen Punktes der Regelstrecke in einen Zielpunkt kann dabei durch folgende allgemeiner formulierte Spezifikation im Sinne von “loop-shaping” ersetzt werden:

Spezifikation: Die Kreisverstärkung soll durch eine geeignete Einstellung der Parameter eines PID-Reglers derart geformt werden, dass dessen Frequenzgang $L(j\omega)$ für eine beliebig gewählte Frequenz ω_0 durch einen beliebig vorgegebenen Zielpunkt hindurchgeht.

Für die Bestimmung der Reglerparameter betrachten wir das Bild 1.14. Der Punkt A: $G(j\omega_0) = r_a e^{j(-\pi+\varphi_a)}$ soll durch den PID-Regler ($r_c e^{j\varphi_c}$) in den Punkt B: $L(j\omega_0) = r_b e^{j(-\pi+\varphi_b)}$ geführt werden. Aus der Definition für die Kreisverstärkung $L(j\omega) = K(j\omega) \cdot G(j\omega)$ folgt:

$$r_b \cdot e^{j(-\pi+\varphi_b)} = r_a \cdot r_c \cdot e^{j(-\pi+\varphi_a+\varphi_c)} \quad \Rightarrow \quad r_c = \frac{r_b}{r_a} \quad \text{und} \quad \varphi_c = \varphi_b - \varphi_a.$$

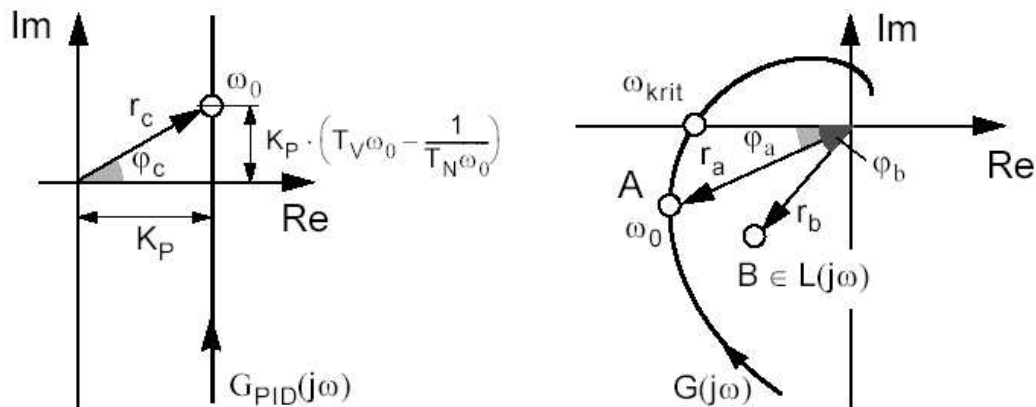


Bild 1.14: Verschiebung eines beliebigen Punkts (A) der Frequenzgangkurve der Regelstrecke in den Zielpunkt (B)

Mit dem Frequenzgang des PID-Reglers (vgl. Bild 1.14) resultieren dann die folgenden zwei Beziehungen für die Bestimmung der Reglerparameter:

$$K_P = r_c \cdot \cos \varphi_c = \frac{r_b}{r_a} \cdot \cos(\varphi_b - \varphi_a)$$

$$T_V \omega_0 - \frac{1}{T_N \omega_0} = \tan \varphi_c = \tan(\varphi_b - \varphi_a)$$

Bei der letzten Beziehung handelt es sich um eine Gleichung für die Bestimmung der beiden unbekanntenen Reglerparameter T_V und T_N . Eine mögliche Vorgehensweise für die Bestimmung dieser zwei Parameter ist es, dessen Verhältnis konstant zu wählen:

$$\frac{T_V}{T_N} = \alpha ,$$

wie bei der Ziegler-Nichols-Methode, wo $\alpha = 1/4$ gewählt wurde. Daraus folgt:

$$T_N = \frac{1}{2\alpha\omega_0} \left[\tan(\varphi_b - \varphi_a) + \sqrt{\tan^2(\varphi_b - \varphi_a) + 4\alpha} \right]$$

$$T_V = \alpha \cdot T_N .$$

Spezialfall:

In diesem Spezialfall wird in Anlehnung an die Ziegler-Nichols-Methode einerseits $\alpha = 1/4$ und andererseits der kritische Punkt der Regelstrecke als Punkt A ausgewählt (vgl. Bild 1.15):

$$\omega_0 = \omega_{kr} \Rightarrow \varphi_a = 0, \quad r_a = \frac{1}{K_{P,kr}} .$$

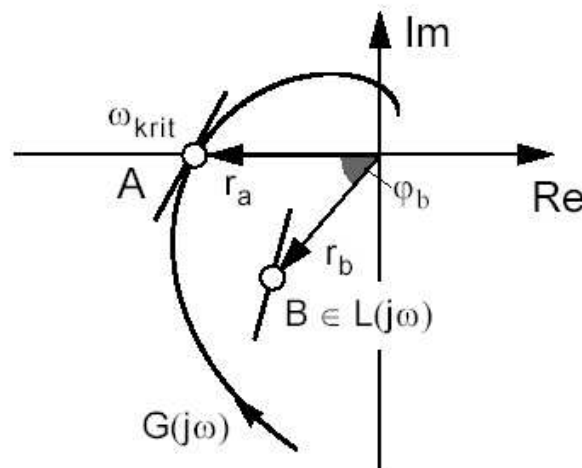


Bild 1.15: Zur Verallgemeinerung der Ziegler-Nichols-Methode und zur 1. Erweiterung der Ziegler-Nichols-Methode mit der Vorgabe der Neigung der Kreisverstärkung $L(j\omega)$ am Zielpunkt

Die resultierenden Einstellregeln werden wir als *Verallgemeinerung der Ziegler-Nichols-Methode* bezeichnen:

$$K_P = [r_b \cdot \cos \varphi_b] \cdot K_{P,kr}$$

$$T_N = \frac{2}{\omega_{kr}} \left[\tan \varphi_b + \sqrt{1 + \tan^2 \varphi_b} \right] = \left[\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1 + \sin \varphi_b}{\cos \varphi_b} \right] \cdot T_{kr}$$

$$T_V = \alpha \cdot T_N = \left[\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1 + \sin \varphi_b}{\cos \varphi_b} \right] \cdot T_{kr} .$$

Sinnvolle Zielpunkte für die Anwendung der obigen Einstellregeln lauten:

- $-0.2 - 0.36j$ entspricht $r_b = 0.41$ und $\varphi_b = 61^\circ$ oder
- $-0.2 - 0.21j$ entspricht $r_b = 0.29$ und $\varphi_b = 46^\circ$.

Erweiterung der Ziegler-Nichols-Methode

Das dynamische Verhalten eines Regelsystems kann nicht nur durch die Vorgabe eines Zielpunktes bestimmt werden. Die Neigung (Steigung der Tangente) des Frequenzgangs der Kreisverstärkung $L(j\omega)$ am vorgegebenen Zielpunkt spielt dabei eine signifikante Rolle. Deshalb wird bei den folgenden zwei Erweiterungen diese Grösse in der Spezifikation direkt vorgegeben.

1. Erweiterung

Es handelt sich um eine direkte Erweiterung der Ziegler-Nichols-Methode. Dabei wird die Vorgabe $T_V/T_N = \alpha = 0.25$ durch die Vorgabe der Neigung von $L(j\omega)$ am Zielpunkt ersetzt.

Spezifikation:

Der kritische Punkt der Regelstrecke

$$\text{A: } G(j\omega_{kr}) = r_a e^{j(-\pi + \varphi_a)} \text{ mit } r_a = \frac{1}{K_{P,kr}} \text{ und } \varphi_a = 0$$

wird in den durch r_b und φ_b vorgegebenen Zielpunkt

$$\text{B: } L(j\omega_{kr}) = r_b e^{j(-\pi + \varphi_b)} \text{ mit der Neigung } \arg \left\{ \frac{d}{d\omega} L(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_{kr}} \right\} = \psi$$

geführt (vgl. Bild 1.15).

Mit der Substitution $\beta = \tan(\varphi_b)/\omega_{kr}$ resultieren die folgenden Einstellwerte für den PID-Regler:

$$K_P = [r_b \cdot \cos \varphi_b] \cdot K_{P,kr}$$

$$T_N = \frac{1}{\omega_{kr}^2(T_V - \beta)}$$

$$T_V = \frac{1}{2} \left[\beta \cdot \left(1 - \frac{r'(\omega_{kr})}{r(\omega_{kr})} \omega_{kr} \right) - \varphi'(\omega_{kr}) + \left(\frac{r'(\omega_{kr})}{r(\omega_{kr})} - \omega_{kr} \beta \varphi'(\omega_{kr}) \right) \tan \psi \right].$$

Für die Bestimmung der Einstellwerte werden sowohl der Frequenzgang der Strecke bei der kritischen Frequenz

$$G(j\omega_{kr}) = r(\omega) \cdot e^{j(-\pi + \varphi(\omega))} \Big|_{\omega=\omega_{kr}}$$

d.h. insbesondere $r(\omega_{kr}) = 1/K_{P,kr}$ ($\varphi(\omega_{kr}) \equiv 0$), als auch die Ableitungen des Amplituden- und Phasenganges nach der Frequenz für $\omega = \omega_{kr}$, d.h.

$$r'(\omega_{kr}) = \frac{\partial}{\partial \omega} r(\omega) \Big|_{\omega=\omega_{kr}} \quad \text{und} \quad \varphi'(\omega_{kr}) = \frac{\partial}{\partial \omega} \varphi(\omega) \Big|_{\omega=\omega_{kr}}$$

benötigt.

Herleitung: Siehe die Herleitung zur 2. Erweiterung (Spezifikationsvariante A).

2. Erweiterung

Spezifikationsvariante A

Das Regelsystem soll die Bandbreite (Durchtrittsfrequenz) ω_c und die Phasenreserve φ_{res} besitzen. Die Kreisverstärkung soll ausserdem im Durchtrittspunkt die Neigung ψ aufweisen.

Diese Spezifikation kann gemäss Bild 1.16 wie folgt formuliert werden:

Der Punkt A des Frequenzganges der Regelstrecke bei der Durchtrittsfrequenz

$$\text{A: } G(j\omega_c) = r_a e^{j(-\pi + \varphi_a)}$$

soll in den Zielpunkt

$$\text{B: } L(j\omega_c) = r_b e^{j(-\pi + \varphi_b)} \quad \text{mit } r_b = 1, \varphi_b = \varphi_{\text{res}} \quad \text{und} \quad \text{arg} \left\{ \frac{d}{d\omega} L(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_c} \right\} = \psi$$

geführt werden.

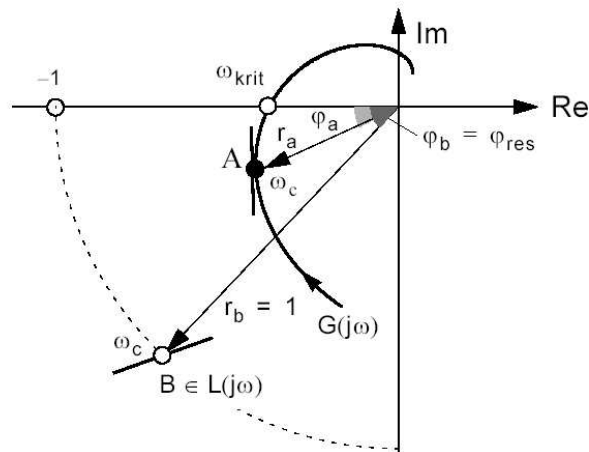


Bild 1.16: Zur Spezifikationsvariante A der 2. Erweiterung

Mit den Substitutionen

$$\beta_c = \tan(\varphi_{\text{res}} - \varphi_a) / \omega_c$$

und

$$\psi_c = \psi - \arg\{G(j\omega_c)\} = \psi + \pi - \varphi_a$$

resultieren die folgenden Einstellwerte für den PID-Regler:

$$K_P = \frac{r_b}{r_a} \cos(\varphi_b - \varphi_a) = \frac{1}{r_a} \cos(\varphi_{\text{res}} - \varphi_a)$$

$$T_N = \frac{1}{\omega_c^2 (T_V - \beta_c)}$$

$$T_V = \frac{1}{2} \left[\beta_c \cdot \left(1 - \frac{r'(\omega_c)}{r(\omega_c)} \omega_c \right) - \varphi'(\omega_c) + \left(\frac{r'(\omega_c)}{r(\omega_c)} - \omega_c \beta_c \varphi'(\omega_c) \right) \tan \psi_c \right].$$

Für die Bestimmung der Einstellwerte werden sowohl der Frequenzgang der Strecke bei der Durchtrittsfrequenz

$$G(j\omega_c) = r(\omega_c) \cdot e^{j(-\pi + \varphi(\omega_c))}$$

d.h. $r(\omega_c) = r_a$ und $\varphi(\omega_c) = \varphi_a$, als auch die Ableitungen des Amplituden- und Phasenganges nach der Frequenz für $\omega = \omega_c$, d.h.

$$r'(\omega_c) = \left. \frac{\partial}{\partial \omega} r(\omega) \right|_{\omega=\omega_c} \quad \text{und} \quad \varphi'(\omega_c) = \left. \frac{\partial}{\partial \omega} \varphi(\omega) \right|_{\omega=\omega_c}$$

benötigt.

Herleitung:

Die Beziehungen für die Einstellwerte K_P und T_N erhalten wir direkt durch die zwei Bestimmungsgleichungen, die wir am Anfang dieses Unterkapitels anhand des Bildes 1.13 angegeben hatten. Die dort verwendete Frequenz ω_0 soll nun durch die Durchtrittsfrequenz ω_c ersetzt werden. Den Reglerparameter T_N erhalten wir allerdings vorerst nur in Funktion von T_V .

Für die Bestimmung des Reglerparameters T_V leiten wir den Frequenzgang der Kreisverstärkung nach der Frequenz ab, damit wir die Vorgabe der Neigung der Kreisverstärkung ψ ebenfalls ins Spiel bringen können:

$$\left. \frac{dL(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} = G(j\omega_c) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \omega} K(j\omega) \right|_{\omega=\omega_c} + \left. \frac{\partial}{\partial \omega} G(j\omega) \right|_{\omega=\omega_c} \cdot K(j\omega_c).$$

Mit der Substitution

$$\beta_c = \frac{\tan(\varphi_{\text{res}} - \varphi_a)}{\omega_c} = T_V - \frac{1}{T_N \omega_c^2}$$

erhalten wir für den ersten Summanden

$$G(j\omega_c) \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \omega} K(j\omega) \right|_{\omega=\omega_c} = G(j\omega_c) \cdot K_P \cdot (2T_V - \beta_c) \cdot j$$

und für den zweiten Summanden

$$\left. \frac{\partial}{\partial \omega} G(j\omega) \right|_{\omega=\omega_c} \cdot K(j\omega_c) = G(j\omega_c) \cdot \left(\frac{r'(\omega_c)}{r(\omega_c)} + \varphi'(\omega_c)j \right) \cdot K_P \cdot (1 + \omega_c \beta_c j).$$

Durch Vereinfachung des zweiten Summanden und Zusammensetzen mit dem ersten Summanden erhalten wir:

$$\left. \frac{dL(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} = G(j\omega_c) \cdot K_P \cdot \left[\frac{r'}{r} - \omega_c \beta_c \varphi' + \left(\varphi' + \frac{r'}{r} \omega_c \beta_c + 2T_V - \beta_c \right) \cdot j \right],$$

wobei um Platz zu sparen, die Abkürzungen $r = r(j\omega_c)$, $r' = r'(j\omega_c)$ und $\varphi' = \varphi'(j\omega_c)$ verwendet wurden.

Das Argument der komplexen Zahl in den eckigen Klammern bezeichnen wir mit ψ_c , das einerseits angegeben werden kann als

$$\tan \psi_c = \frac{\varphi'(j\omega_c) + \frac{r'(\omega_c)}{r(\omega_c)}\omega_c\beta_c + 2T_V - \beta_c}{\frac{r'(\omega_c)}{r(\omega_c)} - \omega_c\beta_c\varphi'(\omega_c)}$$

und andererseits berechnet werden kann als

$$\psi_c = \arg\left\{\left.\frac{dL(j\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_c}\right\} - \arg\{G(j\omega_c)\} = \psi + \pi - \varphi_a.$$

Aus den letzten zwei Beziehungen können wir dann die Vorhaltezeit wie folgt berechnen:

$$T_V = \frac{1}{2} \left[\beta_c \cdot \left(1 - \frac{r'(\omega_c)}{r(\omega_c)}\omega_c \right) - \varphi'(\omega_c) + \left(\frac{r'(\omega_c)}{r(\omega_c)} - \omega_c\beta_c\varphi'(\omega_c) \right) \tan \psi_c \right].$$

P. S.: Für die Herleitung der 1. Erweiterung müssen sinngemäss ω_c durch ω_{kr} ersetzt und berücksichtigt werden, dass $\varphi_a = 0$ und $\tan(\psi + \pi) = \tan \psi$ sind.

q.e.d.

Spezifikationsvariante B

Das Regelsystem soll eine vordefinierte maximale Empfindlichkeit M_S bei einer gewünschten Frequenz ω_x aufweisen. Zu diesem Zweck darf der Frequenzgang der Kreisverstärkung den Kreis mit dem Radius $r_0 = 1/M_S$ um den Nyquistpunkt nicht betreten (vgl. Bild 1.17). Es wird angenommen, dass der Kreis durch $L(j\omega)$ in einem Punkt ($\omega = \omega_x$) berührt wird. Es wird ausserdem verlangt, dass $L(j\omega)$ am Berührungspunkt eine Neigung von

$$\arg\left\{\left.\frac{d}{d\omega}L(j\omega)\right|_{\omega=\omega_x}\right\} = \psi$$

aufweist. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass der im Bild 1.17 angegebene Winkel $\theta = (\pi/2) - \psi$ sein muss.

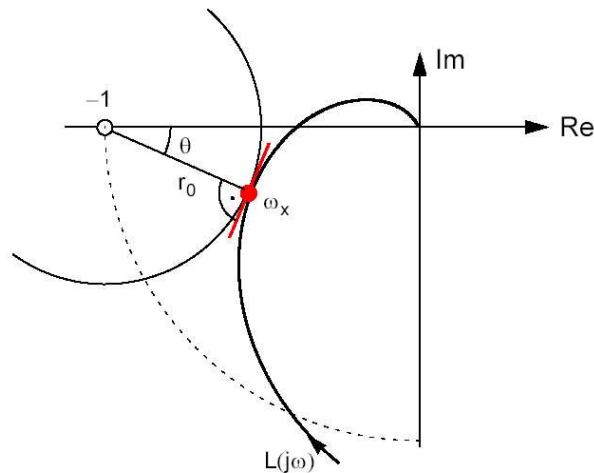


Bild 1.17: Zur Spezifikationsvariante B der 2. Erweiterung

Die Bedingung dafür, dass die Kreisverstärkung durch den Punkt X geht, lautet:

$$\begin{aligned} L(j\omega_x) &= r(\omega_x) \cdot e^{j[-\pi + \varphi(\omega_x)]} \cdot \left[K_P + \left(K_D \omega_x - \frac{K_I}{\omega_x} \right) \cdot j \right] \\ &= -1 + r_0 \cos \theta - j \cdot r_0 \sin \theta. \end{aligned}$$

Die getrennte Betrachtung des Real- und des Imaginärteils führt auf die folgenden zwei Bedingungen für die Bestimmung der drei Reglerparameter K_P , K_I und K_D :

$$r(\omega_x) \cos \varphi(\omega_x) K_P + \frac{r(\omega_x)}{\omega_x} \sin \varphi(\omega_x) K_I - \omega_x r(\omega_x) \sin \varphi(\omega_x) K_D = 1 - r_0 \cos \theta$$

und

$$r(\omega_x) \sin \varphi(\omega_x) K_P - \frac{r(\omega_x)}{\omega_x} \cos \varphi(\omega_x) K_I + \omega_x r(\omega_x) \cos \varphi(\omega_x) K_D = r_0 \sin \theta.$$

Durch eine ähnliche Herleitung wie unter der Spezifikationsvariante A erhalten wir durch Differentiation und Vereinfachung:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dL(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_x} &= G(j\omega_x) \cdot \left\{ \left[K_P \frac{r'(\omega_x)}{r(\omega_x)} - \left(K_D \omega_x - \frac{K_I}{\omega_x} \right) \varphi'(\omega_x) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[K_P \varphi'(\omega_x) + \left(K_D \omega_x - \frac{K_I}{\omega_x} \right) \frac{r'(\omega_x)}{r(\omega_x)} + K_D + \frac{K_I}{\omega_x^2} \right] \cdot j \right\} \end{aligned}$$

Ähnlich wie bei der Spezifikationsvariante A wird mit der Einführung des Argumentes der komplexen Zahl in den geschweiften Klammern

$$\psi_x = \arg \left\{ \frac{d}{d\omega} L(j\omega) \Big|_{\omega=\omega_x} \right\} - \arg \{G(j\omega_x)\} = \psi + \pi - \varphi(\omega_x)$$

durch

$$\tan \psi_x = \frac{K_P \varphi'(\omega_x) + \left(K_D \omega_x - \frac{K_I}{\omega_x} \right) \frac{r'(\omega_x)}{r(\omega_x)} + K_D + \frac{K_I}{\omega_x^2}}{K_P \frac{r'(\omega_x)}{r(\omega_x)} - \left(K_D \omega_x - \frac{K_I}{\omega_x} \right) \varphi'(\omega_x)}$$

eine weitere Beziehung für die Bestimmung der Reglerparameter gewonnen. Sie erfüllt insbesondere die Bedingung für die tangentielle Berührung des Kreises durch $L(j\omega)$. Diese Beziehung wird analog zu den ersten zwei Beziehungen nachfolgend in Form einer linearen Gleichung in den Reglerparametern angeschrieben:

$$a \cdot K_P + b \cdot K_I + c \cdot K_D = 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} a &= \varphi'(\omega_x) - \frac{r'(\omega_x)}{r(\omega_x)} \cdot \tan \psi_x \\ b &= \frac{1}{\omega_x} \cdot \left(\frac{1}{\omega_x} - \frac{r'(\omega_x)}{r(\omega_x)} - \varphi'(\omega_x) \cdot \tan \psi_x \right) \\ c &= 1 + \omega_x \cdot \frac{r'(\omega_x)}{r(\omega_x)} + \omega_x \cdot \varphi'(\omega_x) \cdot \tan \psi_x. \end{aligned}$$

1.3.3 Smith-Prädiktor

In diesem Kapitel betrachten wir Regelstrecken, die durch Serieschaltung eines Totzeitelements und einer rationalen Übertragungsfunktion approximiert werden können:

$$G(s) = G_r(s) e^{-sT_t},$$

wobei $G_r(s)$ den totzeitfreien rationalen Anteil repräsentiert (r: rational).

Als Spezifikation für den Reglerentwurf wird das Führungsverhalten des Regelsystems durch die folgende komplementäre Empfindlichkeit vorgegeben:

$$T(s) = T_r(s) e^{-sT_t} = \frac{P_T(s)}{Q_T(s)} e^{-sT_t},$$

wobei $T_r(s) = P_T(s)/Q_T(s)$ wiederum den totzeitfreien Anteil des Führungsverhaltens des Regelsystems darstellt. Bei dieser Vorgabe geht man davon aus, dass die in der Regelstrecke vorhandene Totzeit T_t auch im Regelsystem in Kauf genommen werden muss. Für ein Führungsverhalten mit einem verschwindenden stationären Regelfehler muss $T_r(0) = 1$ betragen.

Reglerentwurf:

Der Ausdruck für die komplementäre Empfindlichkeit

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

wird nach der Übertragungsfunktion des Reglers $K(s)$ aufgelöst. Dadurch erhalten wir:

$$K(s) = \frac{1}{G(s)} \cdot \frac{T(s)}{1 - T(s)}$$

Die Übertragungsfunktion der Regelstrecke $G(s)$ und die spezifizierte komplementäre Empfindlichkeit des Regelsystems $T(s)$ eingesetzt, ergibt:

$$\begin{aligned} K(s) &= \frac{1}{G_r(s)e^{-sT_t}} \cdot \frac{\frac{P_T(s)}{Q_T(s)}e^{-sT_t}}{1 - \frac{P_T(s)}{Q_T(s)}e^{-sT_t}} = \frac{1}{G_r(s)} \cdot \frac{1}{\frac{Q_T(s)}{P_T(s)} - e^{-sT_t}} \\ &= \frac{1}{G_r(s)} \cdot \frac{1}{\left[\frac{Q_T(s)}{P_T(s)} - 1\right] + [1 - e^{-sT_t}]} \end{aligned}$$

Strukturelle Interpretation des Reglers:

Mit $K(s) = u(s)/e(s)$ erhalten wir für den Regelfehler

$$e(s) = G_r(s) \cdot [1 - e^{-sT_t}] \cdot u(s) + G_r(s) \cdot \left[\frac{Q_T(s)}{P_T(s)} - 1\right] \cdot u(s).$$

Nun definieren wir ein modifiziertes Fehlersignal

$$e_{mod}(s) = e(s) - G_r(s) \cdot [1 - e^{-sT_t}] \cdot u(s) = G_r(s) \cdot \left[\frac{Q_T(s)}{P_T(s)} - 1\right] \cdot u(s),$$

für welches die Übertragungsfunktion eines internen (rationalen) Reglers

$$K_r(s) = \frac{u(s)}{e_{mod}(s)} = \frac{1}{G_r(s) \cdot \left[\frac{Q_T(s)}{P_T(s)} - 1\right]} = \frac{1}{G_r(s)} \cdot \frac{P_T(s)}{Q_T(s) - P_T(s)},$$

resultiert (vgl. Bild 1.18).

Durch die interne Rückführung im Regler bei der Bildung des modifizierten Fehlersignals e_{mod} wird dem internen Regler K_r die Wirkung des Stellsignals auf die Regelstrecke nach der Totzeit vorgetäuscht. Der interne Regler erhält,

eine exakte Modellierung der Regelstrecke vorausgesetzt, nur die Rückführung des totzeitfreien Anteils der Regelstrecke G_r . Daher kann der gesamte Regler als ein prädiktiver Regler interpretiert werden. Er ist in Fachliteratur als Smith-Prädiktor bekannt.

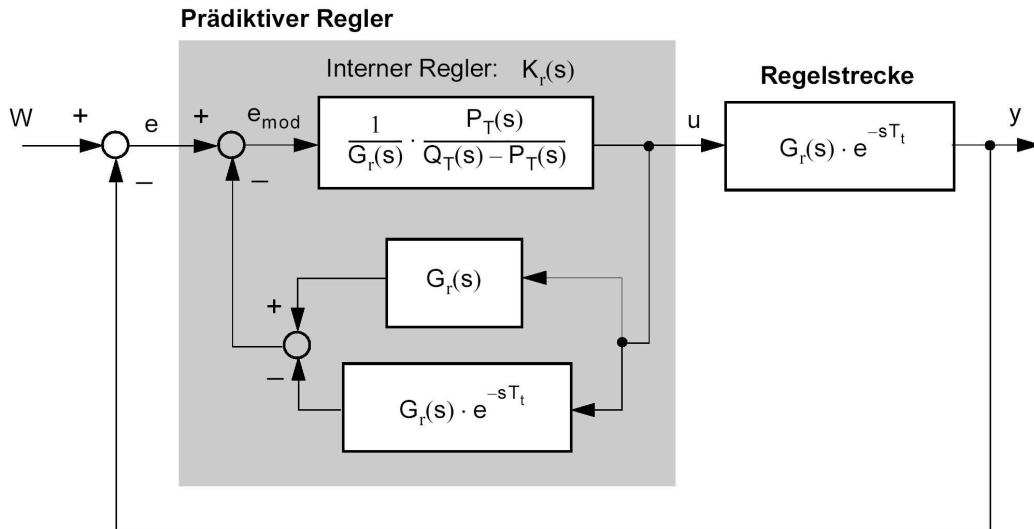


Bild 1.18: Struktur des Smith-Prädiktors

Nachfolgend werden zwei Spezialfälle vorgestellt.

Prädiktiver PI-Regler (PPI-Regler):

Die Regelstrecke kann durch Serieschaltung eines Tiefpasselementes erster Ordnung mit einem Totzeitelement approximiert werden:

$$G(s) = G_r(s)e^{-sT_t} = \frac{K}{\tau \cdot s + 1} e^{-sT_t}.$$

Durch die folgende komplementäre Empfindlichkeit wird das Führungsverhalten des Regelsystems spezifiziert:

$$T(s) = T_r(s)e^{-sT_t} = \frac{P_T(s)}{Q_T(s)} e^{-sT_t} = \frac{1}{\lambda \tau \cdot s + 1} e^{-sT_t},$$

wobei mit dem Parameter λ die Zeitkonstante des Regelsystems relativ zur Zeitkonstante der Regelstrecke τ ausgewählt werden kann.

Das modifizierte Fehlersignal und die Übertragungsfunktion des internen Reglers lauten:

$$e_{mod}(s) = e(s) - \frac{K}{\tau \cdot s + 1} \cdot [1 - e^{-sT_t}] \cdot u(s)$$

$$K_r(s) = \frac{u(s)}{e_{mod}(s)} = \frac{\tau \cdot s + 1}{K \cdot \lambda \tau \cdot s} = \frac{1}{K \cdot \lambda} \cdot \left(\frac{1}{\tau \cdot s} + 1 \right).$$

Beim internen Regler $K_r(s)$ handelt es sich um einen PI-Regler mit dem Verstärkungsfaktor $K_P = \frac{1}{K \cdot \lambda}$ und der Nachstellzeit $T_N = \tau$. Daher bezeichnen wir diesen Regler auch als prädiktiver PI-Regler (PPI-Regler).

Robustheit des PPI-Reglers:

Die Empfindlichkeit des Regelsystems ist gegeben durch:

$$S(s) = 1 - T(s) = 1 - \frac{1}{\lambda \tau \cdot s + 1} e^{-sT_t}.$$

Man kann zeigen, dass diese Empfindlichkeit für jede beliebige Wahl der Parameter T_t , τ und λ immer im Intervall $1 < M_S < 2$ bleibt. Dadurch ist nach "maximum peak criteria" mindestens die folgende Robustheit garantiert:

$$M_S < 2 \quad \Rightarrow \quad K \in \left(\frac{2}{3}, 2 \right) \quad \text{und} \quad \varphi = 28^\circ$$

Man kann ebenfalls zeigen, dass je grösser das Verhältnis der Zeitkonstante zur Totzeit ist (τ/T_t) und je grösser der Parameter λ gewählt wird, umso kleiner die maximale Empfindlichkeit wird ($M_S \rightarrow 1$) und damit umso höhere Robustheit garantiert werden kann.

Prädiktiver PID-Regler (PPID-Regler):

Approximation der Regelstrecke:

$$G(s) = G_r(s)e^{-sT_t} = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 \cdot s + \omega_0^2} e^{-sT_t}.$$

Spezifikation:

$$T(s) = T_r(s)e^{-sT_t} = \frac{\Omega_0^2}{s^2 + 2Z\Omega_0 \cdot s + \Omega_0^2} e^{-sT_t}.$$

Das modifizierte Fehlersignal und die Übertragungsfunktion des internen Reglers:

$$\begin{aligned}
 e_{mod}(s) &= e(s) - \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 \cdot s + \omega_0^2} \cdot [1 - e^{-sT_t}] \cdot u(s) \\
 K_r(s) &= \frac{u(s)}{e_{mod}(s)} = \frac{1}{G_r(s)} \cdot \frac{P_T(s)}{Q_T(s) - P_T(s)} \\
 &= \frac{s^2 + 2\zeta\omega_0 \cdot s + \omega_0^2}{K \cdot \omega_0^2} \cdot \frac{\Omega_0^2}{s^2 + 2Z\Omega_0 \cdot s} \\
 &= \frac{\Omega_0^2}{K \cdot \omega_0^2} \cdot \left(s + 2\zeta\omega_0 + \frac{\omega_0^2}{s} \right) \cdot \frac{1}{s + 2Z\Omega_0} \\
 &= \frac{\Omega_0^2}{K \cdot \omega_0^2} \cdot \frac{2\zeta\omega_0}{2Z\Omega_0} \cdot \left(\frac{1}{2\zeta\omega_0} \cdot s + 1 + \frac{1}{\frac{2\zeta}{\omega_0} \cdot s} \right) \cdot \frac{2Z\Omega_0}{s + 2Z\Omega_0} \\
 &= \frac{\Omega_0}{K \cdot \omega_0} \cdot \frac{\zeta}{Z} \cdot \left(\frac{1}{2\zeta\omega_0} \cdot s + 1 + \frac{1}{\frac{2\zeta}{\omega_0} \cdot s} \right) \cdot \frac{2Z\Omega_0}{s + 2Z\Omega_0}.
 \end{aligned}$$

Beim internen Regler $K_r(s)$ handelt es sich um einen PID-Regler mit den Reglerparametern:

$$K_P = \frac{\Omega_0}{K \cdot \omega_0} \cdot \frac{\zeta}{Z}, \quad T_N = \frac{2\zeta}{\omega_0} \quad \text{und} \quad T_V = \frac{1}{2\zeta\omega_0}.$$

Daher bezeichnen wir diesen Regler auch als prädiktiven PID-Regler (PPID-Regler). Das Tiefpasselement erster Ordnung, das in Serie zum PID-Regler auftritt, kann zusammen mit dem D-Teil als ein reales D-Element interpretiert werden. Der Unterschied zu einem realen PID-Regler ist jedoch, dass es sich nicht nur auf den D-Teil, sondern auch auf den P- und den I-Teil auswirkt.

Literaturangaben:

1. H. P. Geering, *Regelungstechnik*, 6. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, 2003.
2. K. J. Åström, T. Hägglund, *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, 2nd ed., Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 1995.
3. S. Skogestad, I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, Wiley, New York, NY, 1996.
4. H. P. Geering, *Robuste Regelung*, 3. Aufl., IMRT-Press, ETH Zürich, 2004; Kap. 2 und 4.

2 Strukturen der Steuerung und Regelung

In diesem Kapitel betrachten wir eine lineare zeitinvariante Regelstrecke mit m Eingangssignalen $u(t)$ (Vektor der Stellsignale) und p Ausgangssignalen $y(t)$ (Vektor der zu steuernden oder zu regelnden Signale), deren zeitlicher Verlauf in geeigneter Weise beeinflusst werden soll. Die Übertragungsmatrix $G(s)$ ist eine komplexe Matrix mit p Zeilen und m Kolonnen. Sie beschreibt das Eingangs-Ausgangs-Verhalten der Regelstrecke im Frequenzbereich:

$$y(s) = G(s)u(s) \quad .$$

Wenn wir alle p Ausgangssignale *unabhängig voneinander* beeinflussen wollen, brauchen wir mindestens gleich viele untereinander nicht redundante Eingangssignale:

$$m \geq p \quad .$$

Als *Folge-Problem* bezeichnen wir die Aufgabe, eine Steuerung oder eine Regelung oder eine Kombination einer Steuerung und einer Regelung¹ zu finden, so dass der Ausgangsvektor $y(\cdot)$ einem “beliebig” vorgebbaren Führungsvektor $r(\cdot)$ folgt:

$$y(t) = r(t) \quad \text{für alle } t$$

beziehungsweise

$$y(s) = r(s) \quad .$$

Als *Folge-Problem mit Referenz-Modell* bezeichnen wir die Aufgabe, eine Steuerung oder eine Regelung oder eine Kombination einer Steuerung und einer Regelung zu finden, so dass der Ausgangsvektor $y(\cdot)$ einer “tiefpassgefilterten” Version eines beliebig vorgebbaren Führungsvektors $r(\cdot)$ folgt:

$$y(s) = M(s)r(s)$$

Das Filter mit der p mal p Übertragungsmatrix $M(s)$ nennen wir *Referenz-Modell* des Problems. — Bei beliebig vorgebbarem Führungsvektor $r(\cdot)$ soll der

¹ Regelung mit Vorsteuerung

Ausgangsvektor $y(\cdot)$ der Regelstrecke dem Ausgangsvektor des Referenz-Modells folgen.

In diesem Kapitel unterscheiden wir eigentlich nicht zwischen SISO- und MIMO-Systemen. Wir diskutieren so locker wie bei SISO-Systemen, die durch Übertragungsfunktionen beschrieben werden. Aber in den Formeln verwenden wir stets die für MIMO-Systeme korrekte (nicht-kommutative) Matrix-Schreibweise.

2.1 Folge-Steuerung

Das Folge-Problem soll mit einer Steuerung gelöst werden.

Das Bild 2.1 zeigt einerseits die Serieschaltung der Steuerung mit der m mal p Übertragungsmatrix $K_s(s)$ und der Regelstrecke mit der p mal m Übertragungsmatrix $G(s)$ und andererseits die einleitend genannte Forderung des Folge-Problems: $y(s) = r(s)$.

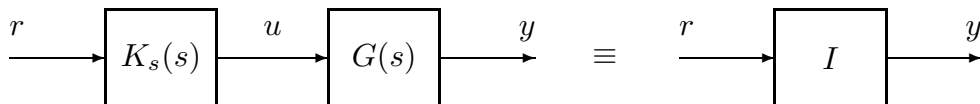


Bild 2.1: Folge-Steuerung

Die theoretisch perfekte Steuerung hat somit die folgende Übertragungsmatrix²:

Für $m = p$:

$$K_s(s) = G^{-1}(s) \quad ,$$

für $m > p$:

$$K_s(s) = G^\dagger(s) = G^T(s)[G(s)G^T(s)]^{-1} \quad .$$

Diese Folge-Steuerung hat offensichtlich die folgenden Schwächen:

- Die Inversion der Dynamik der Regelstrecke im Regler oder die Pol-Nullstellen-Aufhebung findet nur mathematisch/theoretisch statt. Physisch haben wir es immer noch mit der Serieschaltung der beiden dynamischen Systeme $K_s(s) = G^{-1}(s)$ und $G(s)$ zu tun. — Physisch gibt es also Modi in $K_s(s)$ und $G(s)$, welche durch das Eingangssignal r nicht steuerbar und/oder im Ausgangssignal y nicht beobachtbar sind.
- In Realfall sind die Koeffizienten oder sogar die Struktur des Modells der Regelstrecke nicht genau bekannt. Die Empfindlichkeit des Übertragungsverhaltens von r nach y auf solche Fehler kann sehr gross sein!

² Prinzip der inversen Dynamik. — Für $m > p$: pseudo-inverse Matrix von G .

- Falls die Regelstrecke instabil ist, wird der Ausgangsvektor y unbeschränkt wachsende, fehlerhafte Signalanteile enthalten, die durch irgend welche Störeinflüsse angeregt werden.
- Falls die Regelstrecke nicht-minimalphasig ist³, ist die Steuerung $K_s(s)$ instabil, und wir haben sinngemäss das gleiche Problem wie oben. Zudem wächst dann auch der Stellvektor u unbeschränkt.
- Wenn die Regelstrecke, wie üblich, ein Tiefpass⁴ ist, hat $K_s(s) = G^{-1}(s)$ differenzierendes Verhalten und ist somit nicht exakt realisierbar.

2.2 Folge-Steuerung mit Referenz-Modell

Das Bild 2.2 zeigt einerseits die Serieschaltung der Steuerung mit der m mal p Übertragungsmatrix $K_s(s)$ und der Regelstrecke mit der p mal m Übertragungsmatrix $G(s)$ und andererseits die einleitend genannte Forderung des Folge-Problems mit Referenz-Modell: $y(s) = M(s)r(s)$.

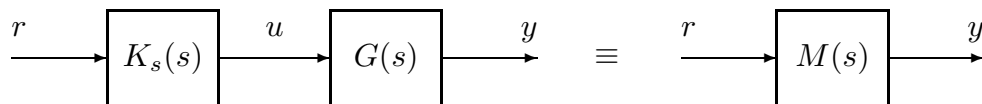


Bild 2.2: Folge-Steuerung mit Referenz-Modell

Als Übertragungsmatrix $K_s(s)$ der Steuerung erhalten wir hier somit⁵:

Für $m = p$:

$$K_s(s) = G^{-1}(s)M(s) \quad ,$$

für $m > p$:

$$K_s(s) = G^\dagger(s) = G^T(s)[G(s)G^T(s)]^{-1}M(s) \quad .$$

Als Referenzmodell $M(s)$ wählen wir selbstverständlich ein asymptotisch stabiles und minimal-phasiges System mit genügend starken Tiefpass-Eigenschaften, so dass die Steuerung $K_s(s)$ differentiator-frei realisierbar ist.⁶

Damit ist allerdings nur einer der im Abschnitt 2.1 genannten gravierenden Mängel behoben!

³ d.h. $G(s)$ hat Transmissions-Nullstellen mit positivem Realteil.

⁴ Übertragungsfunktion $G(s)$: Grad des Nennerpolynoms $>$ Grad des Zählerpolynoms. — Übertragungsmatrix $G(s)$: strictly proper. — Zustandsraummodell mit feed-through-Matrix $D = 0$.

⁵ Inversion der Dynamik der Regelstrecke am Ausgang der Steuerung.

⁶ Vgl. Geering, *Regelungstechnik*, 6. Aufl., Springer-Verlag, 2003, Kap. 3.4.

2.3 Folge-Steuerung/Regelung

Das Folge-Problem soll mit einer Kombination einer Steuerung⁷ mit einer Regelung gelöst werden.

Die Hauptaufgaben des Reglers mit der Übertragungsmatrix $K(s)$ sind die Stabilisierung der Regelstrecke und die Abschwächung des Einflusses von (im Signalflussbild nicht gezeigten) Störsignalen auf den Ausgangsvektor y .

Die Aufgabe der Vorsteuerung mit der Übertragungsmatrix $V(s)$ und des Filters mit der Übertragungsmatrix $F(s)$ ist, das perfekte Folge-Verhalten $y(s) = r(s)$ zu bewerkstelligen.

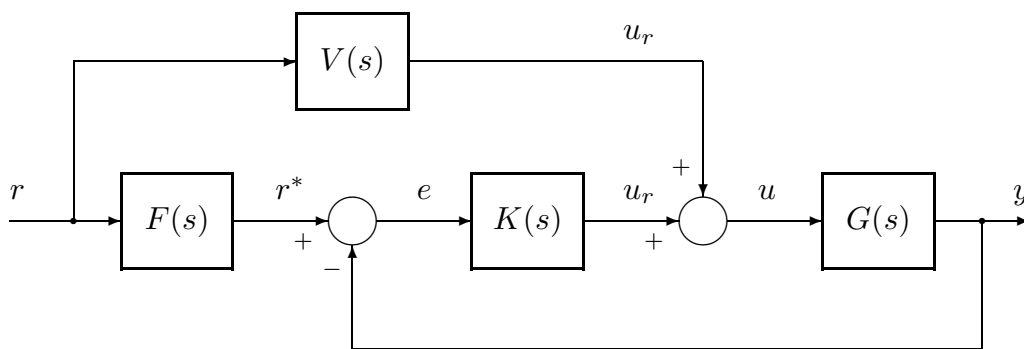


Bild 2.3: Kombination von Steuerung und Regelung

Für das Übertragungsverhalten von r nach y gilt⁸

$$y(s) = T_{yr}(s)r(s)$$

mit der Übertragungsmatrix

$$T_{yr}(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1} [G(s)V(s) + G(s)K(s)F(s)] \quad .$$

Die Forderung $T_{yr}(s) = I$ ist genau dann erfüllt, wenn wir die Übertragungsmatrizen des Filters und der Vorsteuerung wie folgt wählen:

$$F(s) = I$$

$$V(s) = \begin{cases} G^{-1}(s) & \text{für } m = p \\ G^\dagger(s) & \text{für } m > p \end{cases} .$$

⁷ in diesem Zusammenhang oft als *Vorsteuerung* bezeichnet

⁸ Vgl. Anhang 1: Gleichungen für lineare MIMO-Systeme.

Bemerkungen:

- Das Regelsystem mit der Übertragungsmatrix $T_{yr}(s)$ ist asymptotisch stabil, falls die Regelstrecke minimal-phasig und nicht-differenzierend ist.
- Wenn die Regelstrecke, wie üblich, ein Tiefpass ist, hat $V(s) = G^{-1}(s)$ differenzierendes Verhalten und ist somit nicht exakt realisierbar.
- Dank der Regelung ist die Empfindlichkeit des Übertragungsverhaltens von r nach y gegen Fehler im Modell $G(s)$ der Regelstrecke im Vergleich zur Folge-Steuerung (Kap. 2.1) reduziert.
- Wenn die Regelstrecke gut modelliert ist und wenn nur physikalisch realisierbare Führungsgrößen $r(t)$ eingegeben werden, sind die Regelabweichungen $e(t)$ und die Regelgrößen $u_r(t)$ im Bild 2.3 stets klein; die Hauptaufgaben des Reglers mit der Übertragungsmatrix $K(s)$ sind dann nur noch die Stabilisierung der Regelstrecke und die Reduktion der Empfindlichkeit des Regelsystems auf Störeinflüsse.

2.4 Folge-Steuerung/Regelung mit Referenz-Modell

Wenn für das Übertragungsverhalten der Folgeregelung mit Vorsteuerung gemäss Bild 2.3 das Referenz-Modell $M(s)$ verlangt wird,

$$T_{yr}(s) = M(s) \quad ,$$

erhalten wir für die Übertragungsmatrizen des Filters und der Vorsteuerung die folgende Lösung:

$$F(s) = M(s)$$

$$V(s) = \begin{cases} G^{-1}(s)M(s) & \text{für } m = p \\ G^\dagger(s)M(s) & \text{für } m > p \end{cases} .$$

Als Referenzmodell $M(s)$ wählen wir selbstverständlich ein asymptotisch stabiles und minimal-phasiges System mit genügend starken Tiefpass-Eigenschaften, so dass die Vorsteuerung $V(s)$ differentiator-frei realisierbar ist.

2.5 Bemerkungen zur Regelung und Vorsteuerung

Mit einer reinen Regelung, d.h. mit $V(s) = 0$, können nur die Pole der Regelstrecke verschoben werden.

Mit einer Regelung mit Vorsteuerung können die Pole der Regelstrecke ebenfalls verschoben werden. Zudem kann die Konstellation der Lage der Pole und Nullstellen verbessert werden. — Die Nullstellen der Regelstrecke können allerdings

nicht verschoben werden. Sie können höchstens durch Pol-Nullstellen-Aufhebung “beseitigt” werden.

Am einfachsten erkennen wir diese allgemein gültigen Fakten, wenn wir uns auf SISO-Systeme beschränken und alle Übertragungsfunktionen explizit in rationaler Form⁹ anschreiben.

Für eine reine Regelung erhalten wir:

$$\begin{aligned} T_{yr}(s) &= \frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)} F(s) \\ &= \frac{\frac{N_G(s)}{D_G(s)} \frac{N_K(s)}{D_K(s)}}{1 + \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \frac{N_K(s)}{D_K(s)}} \frac{N_F(s)}{D_F(s)} \\ &= \frac{N_G(s)N_K(s)}{D_G(s)D_K(s) + N_G(s)N_K(s)} \frac{N_F(s)}{D_F(s)} . \end{aligned}$$

Aus dem Nennerpolynom der Übertragungsfunktion des Regelsystems ist ersichtlich, dass sowohl die Pole der Regelstrecke, als auch die Pole des Reglers verschoben werden. Die übrigen Pole des Regelsystems entsprechen den Polen des Filters.

Die Nullstellen der Regelstrecke und des Reglers werden nicht verschoben. Die übrigen Nullstellen des Regelsystems entsprechen den Nullstellen des Filters.

Für eine Regelung mit Vorsteuerung erhalten wir in analoger Weise:

$$\begin{aligned} T_{yr}(s) &= \frac{G(s)V(s) + G(s)K(s)F(s)}{1 + G(s)K(s)} \\ &= \frac{\frac{N_G(s)}{D_G(s)} \frac{N_V(s)}{D_V(s)} + \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \frac{N_K(s)}{D_K(s)} \frac{N_F(s)}{D_F(s)}}{1 + \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \frac{N_K(s)}{D_K(s)}} \\ &= \frac{N_G(s)D_K(s) \frac{N_V(s)}{D_V(s)} + N_G(s)N_K(s) \frac{N_F(s)}{D_F(s)}}{D_G(s)D_K(s) + N_G(s)N_K(s)} . \end{aligned}$$

Diese Gleichung zeigt aufgrund des gemeinsamen Faktors $N_G(s)$ im Zähler, dass die Nullstellen der Regelstrecke nicht verschoben werden können. (Sie können nur mittels Pol-Nullstellen-Aufhebung “beseitigt” werden.) Hingegen können

⁹ Zählerpolynom $N_{\cdot}(s)$ dividiert durch Nennerpolynom $D_{\cdot}(s)$; $N_{\cdot}(s)$ und $D_{\cdot}(s)$ ohne gemeinsame Nullstellen, d.h. teilerfremd

durch geeignete Wahl des Filters und der Vorsteuerung neue Pole und Nullstellen platziert werden. Dies kann die Pol-Nullstellen-Konstellation des Regelsystems¹⁰ verbessern.

Bei der Folge-Steuerung/Regelung mit Referenzmodell nach Kap. 2.4 werden alle Pole und Nullstellen der Regelstrecke durch Pol-Nullstellen-Aufhebung “eliminiert” und neue Pole und Nullstellen des Regelsystems entsprechend dem Referenzmodell $M(s)$ platziert.

¹⁰ Im Anhang 4 werden einige Einflüsse der Pol-Nullstellen-Konstellation eines SISO-Systems mit reellen Polen und Nullstellen auf die qualitativen Eigenschaften seiner Sprungantwort erörtert.

3 Modellbasierte Steuerung und Regelung mit Zustandsraum-Modellen

3.1 Einleitung

Wir betrachten eine Regelstrecke mit m Stellsignalen und p messbaren und zu regelnden Ausgangssignalen. Realistischerweise gehen wir davon aus, dass die Regelstrecke nichtlinear ist. Dementsprechend gehen wir für die Untersuchung der Dynamik der Regelstrecke und für die Auslegung der Regelung und der Vorsteuerung von einem nichtlinearen Zustandsraum-Modell der Regelstrecke aus:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= f(X(t), U(t)) & X(t) &\in R^n, U(t) \in R^m \\ X(t_0) &= X_0 \\ Y(t) &= g(X(t)) & Y(t) &\in R^p, m \geq p \end{aligned}$$

Wir nehmen an, das Problem der Auslegung einer modellbasierten Vorsteuerung für die ins Auge gefasste Mission sei bereits gelöst. Für die im Bild 3.1 dargestellten Grössen $U_{\text{nom}}(\cdot)$ und $Y_{\text{nom}}(\cdot)$ sind also bereits geeignete Signalverläufe bekannt.

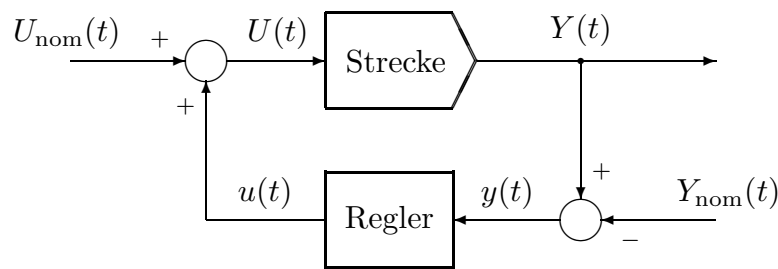


Bild 3.1: Nichtlineare Regelstrecke mit Vorsteuerung und überlagert linearer Regelung mit Ausgangsrückführung.

Da die wahre Dynamik der Regelstrecke im allgemeinen nicht perfekt mit dem obigen Modell übereinstimmt, wird das wahre Ausgangssignal $Y(t)$ vom theoretischen $Y_{\text{nom}}(t)$ leicht abweichen:

$$Y(t) = Y_{\text{nom}}(t) + y(t) \quad .$$

Dabei hoffen wir, dass der Fehler $y(t)$ des Ausgangsvektors mittels kleiner Korrekturen $u(t)$ am Stellvektor klein gehalten werden kann:

$$U(t) = U_{\text{nom}}(t) + u(t) \quad .$$

Wir werden deshalb den im Bild 3.1 gezeigten Regler mit Ausgangsvektor-Rückführung als linearen Regler auslegen und uns dabei auf die um die Nominal-Trajektorie herum linearisierte Dynamik der Regelstrecke abstützen:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$y(t) = C(t)x(t)$$

mit

$$A(t) = \left. \frac{\partial f(X, U)}{\partial X} \right|_{\text{nom}}$$

$$B(t) = \left. \frac{\partial f(X, U)}{\partial U} \right|_{\text{nom}}$$

$$C(t) = \left. \frac{\partial g(X)}{\partial X} \right|_{\text{nom}} \quad .$$

Die um die Nominaltrajektorie herum linearisierte Regelstrecke wird oft zeitvariabel sein, da sich die obigen Jacobi-Matrizen entlang der Nominaltrajektorie, d.h. im Verlauf der Zeit, ändern können¹.

Im Rest dieses Skripts werden wir stets annehmen, dass die linearisierte Dynamik der Regelstrecke in genügender Approximation als zeitinvariant betrachtet werden könne, und wir werden dementsprechend zeitinvariante lineare Regler entwerfen.

Im Idealfall können wir nicht nur die zu regelnden Ausgangsgrößen $Y(t)$ sondern alle Komponenten des Zustandsvektors $X(t)$ messen. Die Ausgangsgleichung lautet dann

$$Y(t) = X(t)$$

beziehungsweise

$$y(t) = x(t) \quad .$$

In diesem Fall werden wir natürlich einen Regler mit Zustandsvektor-Rückführung realisieren. Dies ist im Bild 3.2 dargestellt. Dabei ist zu beachten,

¹ Beispiel: Bewegung eines Flugzeuges mit variierender Fluggeschwindigkeit in variierender Flughöhe.

dass mit den m Freiheitsgraden des Stellvektors $U(t)$ immer noch höchstens $p \leq m$ Freiheitsgrade am Ausgang der Regelstrecke geregelt werden können. Dies ist im Rahmen der Aufbereitung der Sollgrößen $X_{\text{nom}}(t)$ in der Vorsteuerung gebührend zu berücksichtigen!² — Bei der Auslegung des Reglers als LQ-Regulator spielt dies allerdings keine Rolle!

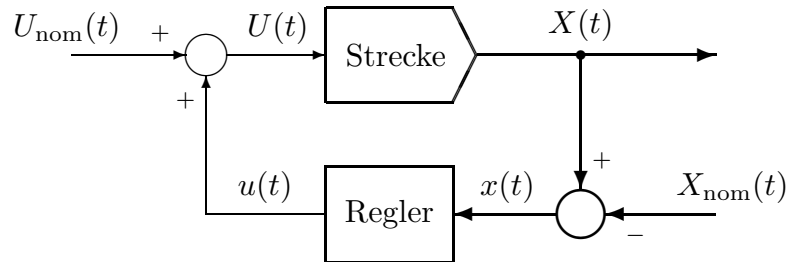


Bild 3.2: Nichtlineare Regelstrecke mit Vorsteuerung und überlagelter linearer Regelung mit Zustandsrückführung.

Im Kap. 3.2 wird der Regler für diesen Idealfall als zeitinvariante Lösung eines LQ-Regulator-Problems berechnet. Die automatisch resultierende Robustheit des Regelsystems wird aufgezeigt, und die Rolle der zur Verfügung stehenden Entwurfsparameter (Gewichtungsmatrizen des Gütekriteriums) wird diskutiert.

Im Kap. 3.3 wird der realistischere Fall behandelt, in dem nur der zu regelnde Ausgangsvektor $Y(t)$ bzw. $y(t)$ gemessen werden kann. In diesem Fall verwenden wir einen Regler bestehend aus einem vollständigen Zustands-Beobachter und einem LQ-Regulator, der den vom Beobachter rekonstruierten Zustandsvektor $\hat{x}(t)$ anstelle des wahren Zustandsvektors $x(t)$ zurück führt.

Als Zustands-Beobachter verwenden wir ein LG-Filter³. Dieses ist dual zum LQ-Regulator und hat deshalb die analogen Robustheits-Eigenschaften. Es zeigt sich aber, dass die Kombination eines robusten LG-Filters mit einem robusten LQ-Regulator nicht automatisch auch zu einem robusten Regelsystem führt. — Dies wird anhand eines Beispiels gezeigt.

Im Kap. 4 wird dann die sogenannte LQG/LTR-Methode behandelt, die zeigt, wie mit den Entwurfsparametern des LQ-Filters und des LQ-Regulators gespielt werden muss, damit das resultierende Regelsystem genügend robust ist.

² Beispiel: $X_1(t)$ = Positions-Koordinate, $X_2(t)$ = entsprechende Geschwindigkeits-Koordinate $\implies X_{2,\text{nom}}(t) \equiv \dot{X}_{1,\text{nom}}(t)$.

³ auch Kalman-Bucy-Filter genannt

3.2 LQ-Regulator als Zustandsvektor-Rückführung

Wir betrachten die zeitinvariante linearisierte Regelstrecke

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) &= x_0 \quad .\end{aligned}$$

Ein linearer zeitinvarianter Regler mit Zustandsvektor-Rückführung hat grundsätzlich die Form

$$u(t) = -Gx(t) \quad ,$$

wobei G eine geeignete Rückführmatrix mit m Zeilen und n Kolonnen ist.

Wir fordern mindestens, dass das resultierende Regelsystem

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= [A - BG]x(t) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

asymptotisch stabil ist. Dies ist nur möglich, wenn die (linearisierte) Regelstrecke $[A, B]$ stabilisierbar ist.

Am elegantesten ist es, die Rückführmatrix G aus der Lösung eines LQ-Regulator-Problems zu bestimmen, da dann das Regelsystem automatisch gute Robustheitseigenschaften besitzt, und da die anfallenden Entwurfsparameter in sehr intuitiver Weise zu handhaben sind.

3.2.1 Das zeitinvariante LQ-Regulator-Problem mit unendlichem Horizont

Unter diesem Titel verstehen wir die folgende Problemstellung:

Gegeben:

Regelstrecke:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

$[A, B]$: stabilisierbar

Gütekriterium:

$$J = \int_0^{\infty} \left(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) \right) dt$$

$$R = \rho I \quad \text{mit} \quad \rho > 0$$

$$Q = Q^T = Q^{T/2}Q^{1/2} \geq 0$$

$[A, Q^{1/2}]$: hat keinen nicht-detektierbaren Pol auf der imaginären Achse.

Gesucht:

Finde den optimalen Steuervektor-Verlauf $u : [0, \infty) \rightarrow R^m$, so dass die Regelstrecke stabilisiert wird⁴ und dabei das Gütekriterium minimiert wird.

Lösung:

$$u(t) = -Gx(t)$$

mit

$$G = \rho^{-1} B^T K \quad ,$$

wobei K die einzige stabilisierende Lösung⁵ der folgenden algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung ist:

$$A^T K + KA - KB\rho^{-1}B^T K + Q = 0 \quad .$$

Die Parameter für den Entwurf des Reglers sind somit die positive Zahl ρ und die symmetrische, positiv-semidefinite n mal n Matrix Q .

3.2.2 Robustheits-Eigenschaften des Regelsystems

Im Bild 3.3 ist das Signalflussbild der linearisierten Regelstrecke mit der optimalen linearen Zustandsvektor-Rückführung dargestellt.⁶

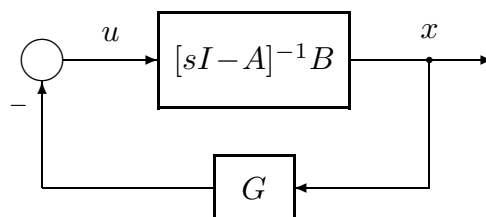


Bild 3.3: Lösung des LQ-Regulator-Problems

mit der Zustandsvektor-Rückführmatrix $G = \rho^{-1} B^T K$.

Bezogen auf den “loop-breaking point” bei u hat dieses Regelsystem die Kreisverstärkungsmatrix

$$L_u(s) = G[sI - A]^{-1} B \quad ,$$

die Kreisverstärkungsdifferenzmatrix

$$D_u(s) = I + L_u(s) = I + G[sI - A]^{-1} B \quad ,$$

⁴ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ gilt bei beliebigem Anfangszustand x_0 .

⁵ Stabilisierende Lösung $K \iff [A - BK]$ eine Stabilitätsmatrix.

⁶ Der im Bild 3.2 eingezeichnete Regler ist somit ein statischer Regler mit der Verstärkungsmatrix $-G$.

die Empfindlichkeitsmatrix

$$S_u(s) = D_u^{-1}(s) = \left[I + G[sI - A]^{-1}B \right]^{-1}$$

und die komplementäre Empfindlichkeitsmatrix

$$\begin{aligned} T_u(s) &= I - S_u(s) = I - \left[I + G[sI - A]^{-1}B \right]^{-1} \\ &= G[sI - A]^{-1}B \left[I + G[sI - A]^{-1}B \right]^{-1} = L_u(s)S_u(s) \\ &= \left[I + G[sI - A]^{-1}B \right]^{-1} G[sI - A]^{-1}B = S_u(s)L_u(s) \quad . \end{aligned}$$

Da wir die Gewichtungsmatrix R für den Stellvektor u im Gütekriterium des LQ-Regulator-Problems als Diagonalmatrix mit identischen Diagonalelementen, $R = \rho I$, gewählt haben, resultieren (unabhängig von der Wahl von ρ und Q) die folgenden Robustheitseigenschaften des optimal geregelten linearen Systems, ausgedrückt durch die Singularwertverläufe der interessierenden Frequenzgangsmatrizen:⁷

Für den kleinsten Singularwert $\underline{\sigma}$ Kreisverstärkungsdifferenz $D_u(j\omega)$ gilt:

$$\underline{\sigma}\{D_u(j\omega)\} = \sqrt{1 + \frac{1}{\rho} \underline{\sigma}^2\{Q^{1/2}[j\omega I - A]^{-1}B\}} \geq 1 \quad \text{für alle } \omega \in [0, \infty). \quad (1)$$

Aufgrund der Gleichungen (12) und (8) von Anhang 2 gelten somit für die maximalen Singularwerte $\bar{\sigma}$ der Empfindlichkeit $S_u(j\omega)$ und der komplementären Empfindlichkeit $T_u(j\omega)$ die beiden folgenden Ungleichungen:

$$\bar{\sigma}\{S_u(j\omega)\} \leq 1 \quad \text{für alle } \omega \in [0, \infty) \quad (2)$$

und

$$\bar{\sigma}\{T_u(j\omega)\} \leq 2 \quad \text{für alle } \omega \in [0, \infty). \quad (3)$$

Spezialfall: Falls die Regelstrecke nur über eine einzige Stellgröße verfügt, $m = 1$, erhalten wir aus den obigen Ungleichungen die folgenden Interpretationen:

- Der Amplitudengang der Kreisverstärkungsdifferenz D_u taucht nicht unter die 0-dB-Linie.

⁷ Da die Singularwerte einer komplexen Matrix die Verallgemeinerung des Betrages einer komplexen Zahl sind (vgl. Anh. 2), sind die Ungleichungen für die Singularwertverläufe einer Frequenzgangsmatrix im Spezialfall einer einzigen Stellgröße ($m = 1$) als Ungleichung für den Amplitudengang des entsprechenden Frequenzgangs zu interpretieren.

- Der Amplitudengang der Empfindlichkeit S_u bleibt bei allen Frequenzen unterhalb der 0-dB-Linie.
- Das Maximum des Amplitudengangs der komplementären Empfindlichkeit T_u ist höchstens 6 dB (“kleine” Resonanzüberhöhung).
- In der Gaussischen Zahlenebene schneidet die Nyquistkurve $L_u(j\omega)$, $\omega = 0, \dots, \infty$, die Kreisscheibe mit Radius 1 und dem Zentrum im Nyquistpunkt $(-1, j \cdot 0)$ nicht.
- Daraus folgt direkt, dass das Regelsystem beim “loop-breaking-point” u eine Phasenreserve $|\varphi| \geq 60^\circ$ und eine Verstärkungsreserve von mindestens $K \in (\frac{1}{2}, \infty)$ besitzt.
- Für eine gewisse Kreisfrequenz ω^* hat die komplementäre Empfindlichkeit die maximal mögliche Resonanzüberhöhung mit $|T_u(j\omega^*)|=2$, wenn die Nyquistkurve bei dieser Kreisfrequenz die oben genannte Kreisscheibe im Punkt $(-2, j \cdot 0)$ berührt.

3.2.3 Bemerkungen

Im Folgenden werden einige allgemein gültige Aspekte des LQ-Regulators diskutiert:

- Ausgedrückt durch Phasenreserven oder Verstärkungsreserven beim “loop-breaking-point” u hat das LQ-Regelsystem im Mehrgrößenfall in jedem Kanal u_i eine Phasenreserve $|\varphi_i| \geq 60^\circ$ bzw. eine Verstärkungsreserve von mindestens $K_i \in (\frac{1}{2}, \infty)$. — Diese Aussagen gelten für beliebige Konstellationen der Phasenfehler φ_i bzw. der Verstärkungsfehler K_i .
- Die in den Gleichungen (1)–(3) mit Singularwerten ausgedrückten Robustheitseigenschaften des LQ-Regelsystems gelten nur für den Ansatz $R = \rho I$ für die Gewichtungsmatrix R .
- Wenn die Gewichtungsmatrix $R = \rho R_1$ zwar diagonal ist, aber unterschiedliche (positive) Diagonalelemente aufweist, hat der LQ-Regulator beim “loop-breaking-point” u immer noch die gleichen kanalweisen Phasen- bzw. Verstärkungsreserven. Hingegen gelten die Gleichungen (1)–(3) nicht mehr bezogen auf den “loop-breaking-point” beim “falsch skalierten” Vektor u , sondern beim “richtig skalierten” Vektor $v = R_1^{1/2} u$, wie im Bild 3.4 dargestellt.

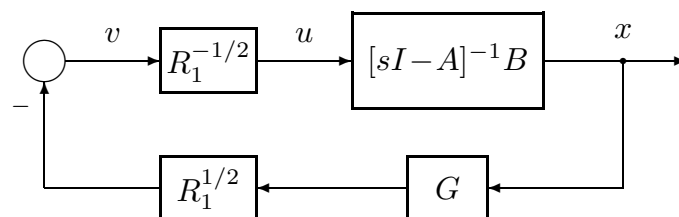


Bild 3.4: Modifiziertes Signalflussbild des LQ-Regelsystems.

$$R_1 = \text{diag}\{r_i\}, R_1^{1/2} = \text{diag}\{\sqrt{r_i}\}.$$

- Wenn wir eine Gewichtungsmatrix R mit nicht-verschwindenden ausserdiagonalen Elementen verwenden, können die Stabilitätsreserven des Regelsystems im Grenzfall einer fast singulären Matrix R marginal werden.
- Die Ungleichung (1) gilt streng, wenn $\underline{\sigma}\{Q^{1/2}[j\omega I - A]^{-1}B\} > 0$ erfüllt ist. Eine notwendige Bedingung dafür ist $\text{Rang}(Q^{1/2}) \geq m$.
- *Expensive Control*: Wenn wir den Stellvektor u mit $\rho \rightarrow \infty$ extrem stark bestrafen, gehen die Pole des Regelsystems, (Eigenwerte der Matrix $A - BG$) asymptotisch gegen die Pole der Regelstrecke (Eigenwerte der Matrix A) oder deren Spiegelbilder bezüglich der imaginären Achse, so dass alle Pole negativen Realteil haben.
- *Cheap Control*: Wenn wir den Stellvektor u mit $\rho \rightarrow 0$ extrem schwach bestrafen, gehen die einen Pole des Regelsystems asymptotisch gegen die Nullstellen der Regelstrecke bzw. deren Spiegelbilder in der linken Halbebene und die übrigen gruppenweise⁸ in der linken Halbebene ins Unendliche.
- *Robustness Enhancement (β -Methode)*: Wir können die Robustheitseigenschaften des LQ-Regelsystems noch weiter verbessern, indem wir den quadratischen Term in der algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung mit einem Faktor $\frac{1}{\beta}$ mit $\beta > 1$ abschwächen:

$$0 = -A^T K - K A + \frac{1}{\beta} K B \rho^{-1} B^T K - Q \quad .$$

Die Robustheitseigenschaft (1) des LQ-Regelsystems mit der Zustandsvektor-Rückführmatrix $G = -\rho^{-1} B^T K$ lautet dann neu:

$$\underline{\sigma}\{\beta I + L_u(j\omega)\} \geq \beta \quad .$$

Falls die Regelstrecke nur über eine einzige Stellgrösse verfügt, $m = 1$, vergrössert sich die im Kap. 3.2.2 genannte Kreisscheibe wie folgt: In der Gaussschen Zahlenebene schneidet die Nyquistkurve $L_u(j\omega)$, $\omega = 0, \dots, \infty$, die Kreisscheibe mit Radius β und dem Zentrum im Punkt $(-\beta, j \cdot 0)$ nicht.

Somit vergrössert sich die Phasenreserve beim “loop-breaking-point” u auf $|\varphi| \geq \arccos(\frac{1}{2\beta})$ und die Verstärkungsreserve auf mindestens $K \in (\frac{1}{2\beta}, \infty)$. Zudem verkleinert sich die maximal mögliche Resonanzüberhöhung der komplementären Empfindlichkeit auf $|T_u(j\omega)| \leq \frac{2\beta}{2\beta-1}$.

Im Mehrgrössenfall gelten diese besseren Werte für die Phasenreserve bzw. die Verstärkungsreserve in jedem der Kanäle u_i , $i = 1, \dots, m$.

Beachte: Für den offensichtlich interessanten Fall $\beta = \infty$ degeneriert die quadratische Riccati-Gleichung zur linearen Lyapunov-Gleichung für K . Diese hat aber nur dann eine positiv-semidefinite Lösung K , wenn die Regelstrecke asymptotisch stabil ist.

⁸ in einer oder mehreren (maximal m) Butterworth-Konfiguration(en)

3.3 Lineare Regelung mit Ausgangsvektor-Rückführung

Wir betrachten die zeitinvariante linearisierte Regelstrecke

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(t) &\in R^n, u(t) \in R^m \\ x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) & y(t) &\in R^p, p \leq m .\end{aligned}$$

Wir suchen einen linearen, zeitinvarianten Regler mit dem Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= A_c z(t) + B_c y(t) & z(t) &\in R^{n_z} \\ z(0) &= z_0 \\ u(t) &= C_c z(t) + D_c y(t) ,\end{aligned}$$

wobei n_z eine geeignete Ordnung, z_0 ein geeigneter Anfangszustand und A_c , B_c , C_c und D_c geeignete Systemmatrizen des dynamischen Reglers sind.

Wir fordern mindestens, dass das resultierende Regelsystem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BD_cC & BC_c \\ B_cC & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

asymptotisch stabil ist. Dies ist nur möglich, wenn die (linearisierte) Regelstrecke $[A, B, C]$ stabilisierbar und detektierbar ist.

3.3.1 Struktur des Kompensators

Um die Vorteile des LQ-Regulators weiterhin nutzen zu können, wählen wir einen Regler mit vollständigem Zustands-Beobachter⁹ und Zustandsvektor-Rückführung (siehe Bild 3.5).

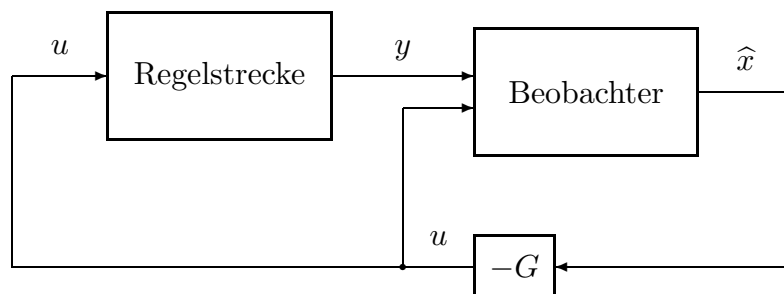


Bild 3.5: Zustandsregler mit vollständigem Zustands-Beobachter.

⁹ H. P. Geering, *Regelungstechnik*, 6. Aufl., Springer-Verlag, 2003, Kap. 6.1.

Die Ordnung des Reglers entspricht somit der Ordnung der Regelstrecke,

$$n_z = n \quad ,$$

und der Zustandsvektor $z(t)$ des Reglers ist eine Schätzung $\hat{x}(t)$ des momentanen Zustandsvektors $x(t)$ der (linearisierten) Regelstrecke:

$$z(t) = \hat{x}(t) \quad .$$

Die Gleichungen des Zustands-Beobachters lauten:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + H[y(t) - C\hat{x}(t)] \\ &= [A - HC]\hat{x}(t) + Bu(t) + Hy(t) \\ \hat{x}(0) &= z_0 \quad . \end{aligned}$$

Die n mal p Beobachter-Verstärkungsmatrix H ist so festzulegen, dass die Matrix $A - HC$ eine Stabilitätsmatrix ist. Als Anfangszustand des Beobachters wählen wir im Idealfall, bei bekanntem Anfangszustand x_0 der Regelstrecke,

$$\hat{x}(0) = x_0 \quad .$$

Falls der Anfangszustand x_0 der Regelstrecke nicht a priori bekannt ist, wählen wir der Bequemlichkeit halber meistens

$$\hat{x}(0) = 0 \quad .$$

Eine raffiniertere Wahl wäre

$$\hat{x}(0) = C^\dagger y(0) = C^T (CC^T)^{-1} y(0) \quad .$$

Es verbleibt also nur noch die Wahl einer geeigneten Beobachter-Verstärkungsmatrix H .

3.3.2 LG-Filter als robuster Zustands-Beobachter

Im Bild 3.6 ist das Signalflussbild des für die Stabilität und Robustheit des Zustands-Beobachters wesentliche Teil dargestellt.

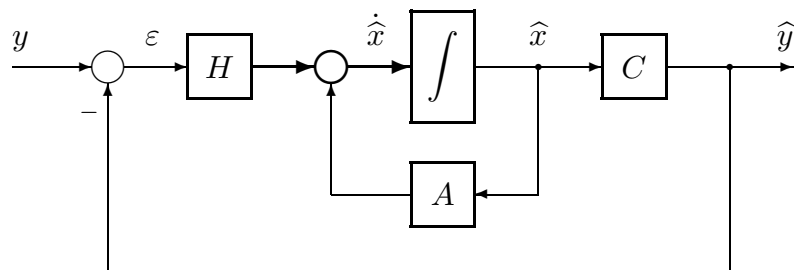


Bild 3.6: Vollständiger Zustands-Beobachter — mit “state injection”.

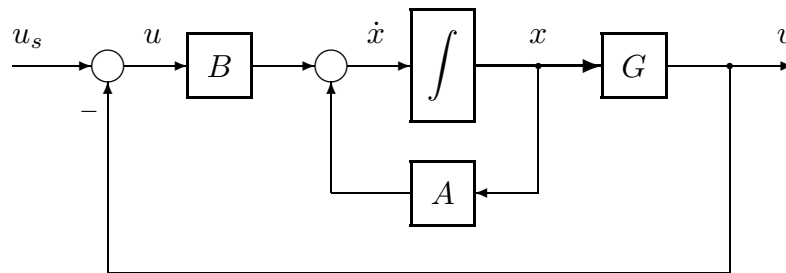


Bild 3.7: LQ-Regelsystem — mit Zustandsvektor-Rückführung.

Zum Vergleich zeigt das Bild 3.7 das Signalflussbild des LQ-Regelsystems. In diesen beiden Bildern ist eine gewisse Symmetrie zu erkennen:

- Im LQ-Regulator-Problem wird eine Matrix G berechnet, die den Zustandsvektor x zum Stellvektor u zurückführt.
- Beim Entwurf des vollständigen Zustands-Beobachters wird eine Matrix H bestimmt, die den Fehlervektor $\varepsilon = y - \hat{y}$ an den Eingang \hat{x} der Ableitung des Zustandsvektors \hat{x} einspeist (“state injection”).
- Im LQ-Regelsystem ist die Eingangsmatrix B , im Beobachter-Problem die Ausgangsmatrix C beteiligt.
- Für das LQ-Regelsystem erhalten wir automatisch für beliebige (zulässige) Wahl der Entwurfparameter ρ und Q gute Robustheitseigenschaften an der Stelle u bzw. am Ausgang von G . — Solche Robustheitseigenschaften möchten wir für den Zustands-Beobachter an der Stelle ε , d.h. am Eingang von H erhalten.

Die in den beiden Bildern 3.6 und 3.7 dargestellten Systeme können mit Gleichungen in der folgenden Form beschrieben werden:

LQ-Regelsystem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$u(t) = u_s(t) - v(t)$$

Zustands-Beobachter:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & H \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad .$$

Nun betrachten wir das zum Zustands-Beobachter “duale” System¹⁰ mit den Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \dot{\chi}(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ H^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}$$

$$\psi(t) = \psi_s(t) - \nu(t) \quad .$$

Sein Signalflussbild ist im Bild 3.8 dargestellt.

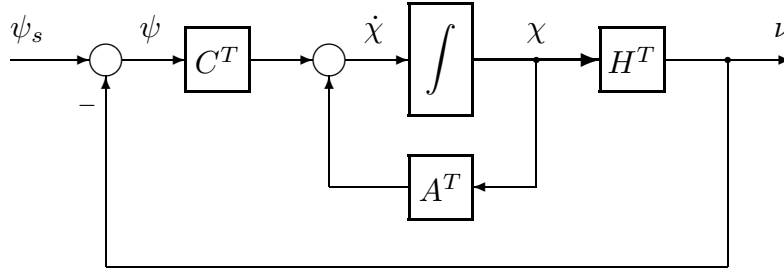


Bild 3.8: Zum Beobachter duales System mit Zustandsvektor-Rückführung.

Offensichtlich können wir für das duale System mit Hilfe der LQ-Regulator-Theorie eine Zustands-Rückführmatrix H^T bestimmen, so dass das duale System bei beliebiger (zulässiger) Wahl der Entwurfsparameter an der Stelle ψ die bekannten Robustheitseigenschaften besitzt.

Konkret betrachten wir die folgende Problemstellung:

Gegeben:

Duale Regelstrecke:

$$\dot{\chi}(t) = A^T \chi(t) + C^T \psi(t)$$

$$\chi(0) = \chi_0$$

$$[A^T, C^T] : \text{stabilisierbar}$$

Gütekriterium:

$$J = \int_0^\infty \left(\chi^T(t) \Xi \chi(t) + \psi^T(t) \Theta \psi(t) \right) dt$$

$$\Theta = \mu I \quad \text{mit} \quad \mu > 0$$

$$\Xi = \Xi^T = \Xi^{1/2} \Xi^{T/2} \geq 0$$

$$[A^T, \Xi^{T/2}] : \text{hat keinen nicht-detektierbaren Pol auf der imaginären Achse.}$$

¹⁰ “dual” im Sinne einer transponierten Block-Systemmatrix im Vorwärtspfad

Gesucht:

Finde den optimalen Steuervektor-Verlauf $\psi : [0, \infty) \rightarrow R^p$, so dass die duale Regelstrecke stabilisiert wird und dabei das Gütekriterium minimiert wird.

Lösung:

$$\psi(t) = -H^T \chi(t)$$

mit

$$H^T = \mu^{-1} C \Sigma \quad ,$$

wobei Σ die einzige stabilisierende Lösung der folgenden algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung ist:

$$A \Sigma + \Sigma A^T - \Sigma C^T \mu^{-1} C \Sigma + \Xi = 0 \quad .$$

Die Parameter für den Entwurf des dualen Reglers sind somit die positive Zahl μ und die symmetrische, positiv-semidefinite n mal n Matrix Ξ .

Dieses duale LQ-Regelsystem hat an der Stelle ψ (Bild 3.8) die im Kap. 3.2.3 diskutierten Robustheitseigenschaften.

Wenn wir jetzt vom dualen LQ-Regelsystem (Bild 3.8) wieder auf den dazu dualen vollständigen Zustands-Beobachter (Bild 3.6) zurück gehen, haben wir somit den folgenden robusten Zustands-Beobachter gefunden, welchen wir LG-Filter nennen:

LG-Filter

Algebraische Matrix-Riccati-Gleichung¹¹:

$$A \Sigma + \Sigma A^T - \Sigma C^T \mu^{-1} C \Sigma + \Xi = 0 \quad .$$

Voraussetzungen für die Existenz einer stabilisierenden Lösung¹² Σ :

$[A, C]$: detektierbar,

$[A, \Xi^{1/2}]$: hat keinen nicht-steuerbaren Pol auf der imaginären Achse.

Beobachter-Verstärkungsmatrix:

$$H = \Sigma C^T \mu^{-1} \quad .$$

¹¹ $\Xi = \Xi^{1/2} \Xi^{T/2}$

¹² Stabilisierende Lösung $\Sigma \iff [A - HC]$ eine Stabilitätsmatrix.

Welche garantierten Robustheitseigenschaften hat nun das LG-Filter an der Stelle ε im Bild 3.6?

Zunächst untersuchen wir das duale LQ-Regelsystem (Bild 3.8). Bezogen auf den “loop-breaking-point” ψ erhalten wir die Kreisverstärkungsmatrix

$$L_\psi(s) = H^T [sI - A^T]^{-1} C^T$$

und die Kreisverstärkungsdifferenzmatrix

$$D_\psi(s) = I + L_\psi(s) \quad .$$

Für diese gilt aufgrund von Gleichung (1) in Kap. 3.2.2, angewandt auf das neue LQ-Problem:

$$\underline{\sigma}\{D_\psi(j\omega)\} = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu} \underline{\sigma}^2 \{ \Xi^{T/2} [j\omega I - A^T]^{-1} C^T \}} \geq 1 \quad \text{für alle } \omega \in [0, \infty).$$

Bezogen auf den “loop-breaking-point” ε hat das LG-Filter die zu $L_\psi(s)$ transponierte Kreisverstärkungsmatrix

$$L_\varepsilon(s) = C [j\omega I - A]^{-1} H = L_\psi^T(s)$$

und dementsprechend die Kreisverstärkungsdifferenzmatrix

$$D_\varepsilon(s) = D_\psi^T(s) \quad .$$

Da die Singularwerte einer Matrix und ihrer Transponierten identisch sind, erhalten wir schliesslich die folgenden, zu den Gleichungen (1)–(3) in Kap. 3.2.2 dualen Robustheitsresultate für das LG-Filter:

Für die Kreisverstärkungsdifferenz:

$$\underline{\sigma}\{D_\varepsilon(j\omega)\} = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu} \underline{\sigma}^2 \{ C [j\omega I - A]^{-1} \Xi^{1/2} \}} \geq 1 \quad \text{für alle } \omega \in [0, \infty), \quad (1')$$

für die Empfindlichkeit:

$$\bar{\sigma}\{S_\varepsilon(j\omega)\} \leq 1 \quad \text{für alle } \omega \in [0, \infty) \quad (2')$$

und für die komplementäre Empfindlichkeit:

$$\bar{\sigma}\{T_\varepsilon(j\omega)\} \leq 2 \quad \text{für alle } \omega \in [0, \infty) \quad . \quad (3')$$

Alle in den Kap. 3.2.2 und 3.2.3 angebrachten Bemerkungen zum LQ-Regulator gelten hier sinngemäss für das LG-Filter. Insbesondere kann die Robustheit auch wieder mit der β -Methode weiter erhöht werden.

3.3.3 Robustheit des Regelsystems?

Wenn wir den im Bild 3.5 skizzierten Zustandsregler mit vollständigem Zustands-Beobachter im Folgeregelsystem gemäss Bild 3.1 einsetzen, erhalten wir das im Bild 3.9 dargestellte detaillierte Signalfussbild des Regelsystems.

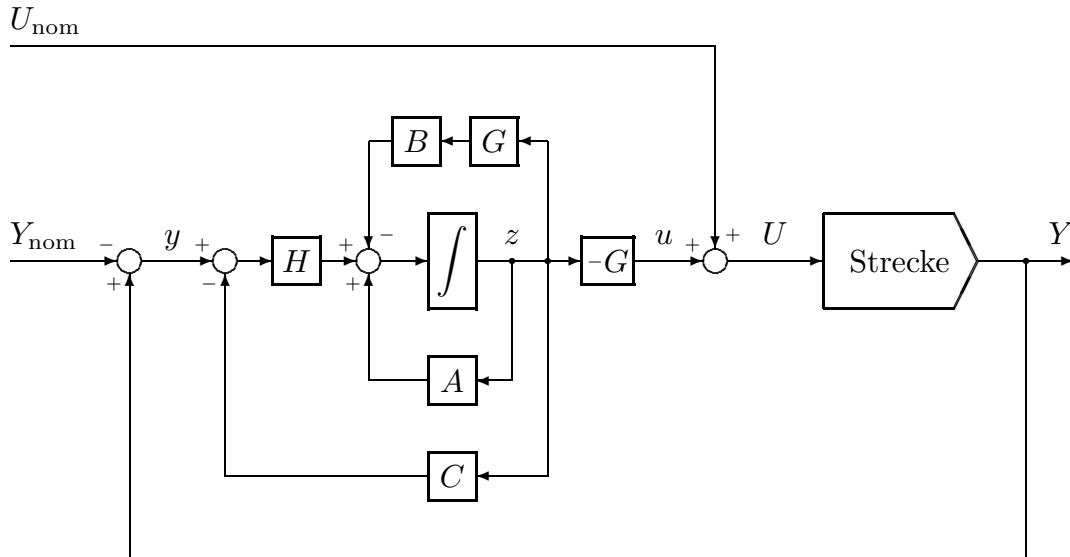


Bild 3.9: Folgeregelungssystem mit Vorsteuerung und LQG-Regler.

Falls wir uns nur für das um die Nominaltrajektorie herum linearisierte Regelsystem interessieren, erhalten wir das detaillierte Signalfussbild gemäss Bild 3.10. Dabei ist w eine allfällige Führungsgrösse für y . (Im Bild 3.9 ist $w(t) \equiv 0$.)

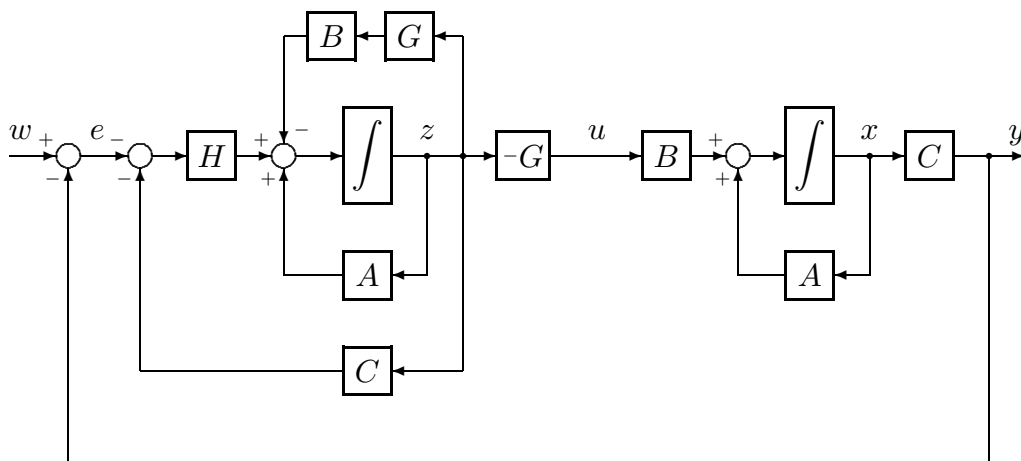


Bild 3.10: Linearisiertes Regelsystem mit LQG-Regler.

Wenn wir als vollständigen Zustands-Beobachter ein LQ-Filter und als Zustandsregler einen LQ-Regler verwenden, wie robust ist dann das im Bild 3.10 darge-

stellte Regelsystem? — Das folgende Beispiel zeigt, dass das Regelsystem nicht automatisch sehr robust ist, obwohl sowohl das LG-Filter, als auch der LQ-Regulator sehr attraktive Robustheitseigenschaften haben!

Beispiel:

Regelstrecke:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

mit den Systemmatrizen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -0.2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0] .$$

Entwurfsparameter für den LQ-Regler:

$$Q = C^T C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rho = 10^{-4} .$$

Resultierende Zustandsvektor-Rückführmatrix:

$$G = [96.08 \quad 13.66] .$$

Entwurfsparameter für das LG-Filter:

$$\Xi = BB^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mu = 10^{-4} .$$

Resultierende Beobachter-Verstärkungsmatrix:

$$H = \begin{bmatrix} 13.66 \\ 93.35 \end{bmatrix} .$$

In den Bildern 3.11 und 3.12 sind die Nyquistkurven

$$L_u(j\omega) = G[j\omega I - A]^{-1} B$$

des LQ-Regelsystems bzw.

$$L_\varepsilon(j\omega) = C[j\omega I - A]^{-1} H$$

des LG-Filters dargestellt.

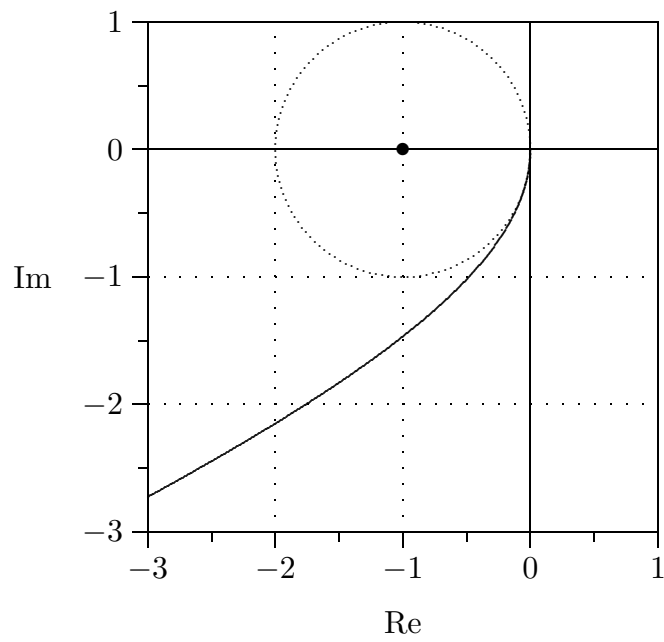


Bild 3.11: Nyquist-Kurve des LQ-Regelsystems.

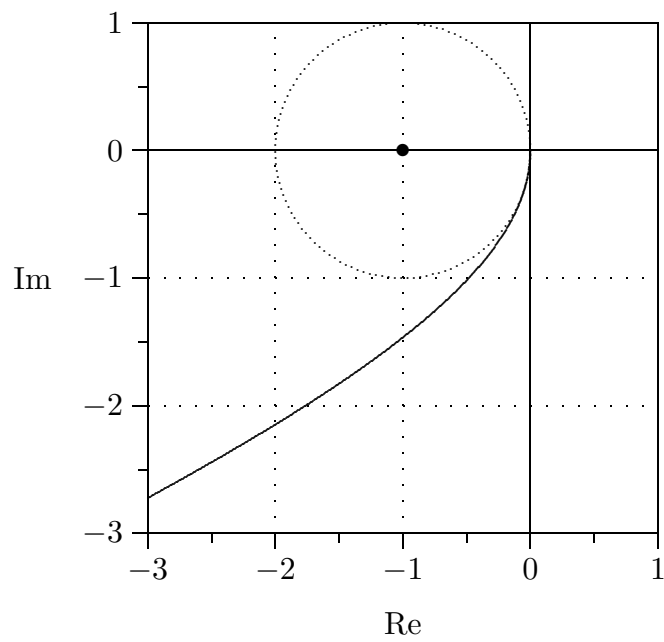


Bild 3.12: Nyquist-Kurve des LG-Filters.

Das Bild 3.13 zeigt die Nyquistkurve

$$L(j\omega) = C[j\omega I - A]^{-1}BG[j\omega I - A + BG + HC]^{-1}H$$

des LQG-Regelsystems mit Zustandsrückführung und vollständigem Zustandsbeobachter. — Offenbar hat dieses Regelsystem nur noch eine unbefriedigende Phasenreserve von etwa 35° und nur noch eine Verstärkungsreserve von etwa $K \in (0, 3)$!

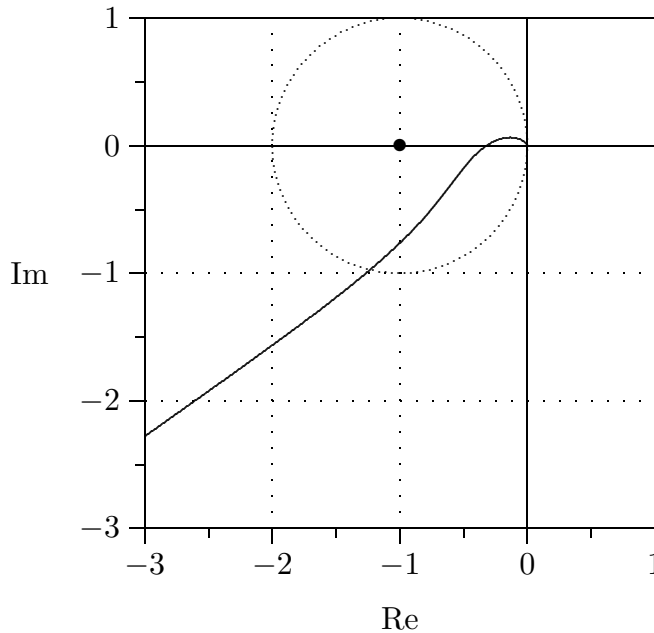


Bild 3.13: Nyquist-Kurve des LQG-Regelsystems.

Noch krassere Beispiele sind in den folgenden Publikationen aufgezeigt worden:

- J. C. Doyle, “Guaranteed Margins for LQG Regulators”¹³, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-23(1978), S. 756–757.
- J. C. Doyle, G. Stein, “Robustness with Observers”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-24(1979), S. 607–611.

Ganz so schlimm ist die Situation allerdings nicht. — Im Kapitel 4 werden wir die sogenannte *LQG/LTR-Methode* behandeln, welche es erlaubt, auf *systematische* Weise LQG-Regelsysteme zu entwerfen, die immer noch sehr gute Robustheitseigenschaften haben und dabei *quantitative* Spezifikationen für die Singularwertverläufe der Kreisverstärkung und der Kreisverstärkungsdifferenz erfüllen.

¹³ Zitat: “Abstract—There are none.”

4 Die LQG/LTR-Methode für den Entwurf robuster Mehrgrößen-Regler

In diesem Kapitel behandeln wir hauptsächlich das folgende “echte” Folgeregelungsproblem (Bild 4.1): Für die lineare zeitinvariante Regelstrecke mit m nicht-redundanten Stellsignalen und mit p voneinander linear unabhängigen, messbaren und zu regelnden Ausgangssignalen und mit der bekannten Übertragungsmatrix $G_p(s)$ wird ein linearer zeitinvarianter Regler mit der Übertragungsmatrix $K_p(s)$ gesucht, so dass das Regelsystem asymptotisch stabil ist und gewisse *quantitative* Spezifikationen erfüllt sind. — Wir bezeichnen das Problem als “echtes” Folgeregelungsproblem¹, wenn die Anzahl m der zur Verfügung stehenden Stellgrößen mindestens so gross ist, wie die Anzahl p der zu regelnden Ausgangssignale: $m \geq p$.

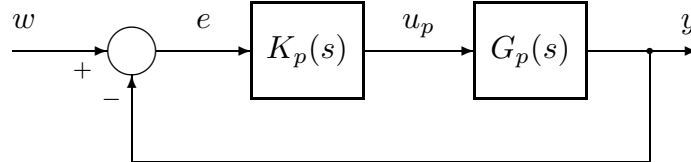


Bild 4.1: Lineares zeitinvariante Regelsystem.

Unsere Regelstrecke wird somit durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u(t) \quad x_p(t) \in R^{n_p}, \quad u(t) \in R^m$$

$$y(t) = C_p x_p(t) \quad y(t) \in R^p$$

$$G_p(s) = C_p [sI - A_p]^{-1} B_p$$

$$\text{Rang}(C_p) = p$$

$$\text{Rang}(B_p) = m$$

$$m \geq p ;$$

$[A_p, B_p, C_p]$: vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar

$[A_p, B_p, C_p]$: minimalphasig.

¹ Das “unechte” Folgeregelungsproblem mit $p > m$ wird im Kap. 4.1.9 diskutiert.

Die Regelstrecke ist vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar, wenn wir ein Zustandsraummodell minimaler Ordnung gewählt haben, um die Übertragungsmatrix $G(s)$ der Regelstrecke korrekt wiederzugeben. Die Annahme der Minimalphasigkeit der Regelstrecke ist eine realistische Bequemlichkeitsannahme, da nicht-minimalphasige Systeme nicht mit beliebig hoher Bandbreite geregelt werden können.²

Als Regler suchen wir ein lineares zeitinvariantes System mit einer geeigneten Ordnung n_c und den zu bestimmenden Systemmatrizen A_c , B_c , C_c und der Übertragungsmatrix $K(s)$ gemäss den folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c e(t) & x_c(t) &\in R^{n_c} \\ u(t) &= C_c x_c(t) \\ K_p(s) &= C_c [sI - A_c]^{-1} B_c \quad .\end{aligned}$$

4.1 Problemlösungstechnik LQG/LTR

Das folgende Schema gibt eine grobe Übersicht über den Arbeitsablauf beim Entwerfen und Berechnen eines robusten Mehrgrössen-Reglers:

Primale Methode für das echte Folgeregelungs-Problem ($m \geq p$):

- 1) Modellbildung
 - Wahl der Stellgrössen u und der Regelgrössen y .
 - A_p , B_p , C_p : minimale Ordnung, n_p .
 - Skalierung.
 - "Kennen lernen".
- 2) Systemerweiterungen $\rightarrow A$, B , C .
- 3) Spezifikation der Singularwertverläufe von $L_e(j\omega)$ und $D_e(j\omega)$.
- 4) *Loop shaping*: Entwurf eines LG-Filters.
- 5) *Loop transfer recovery*: Entwurf eines LQ-Regulators.
- 6) Vereinfachungen.
- 7) Umsetzung auf digitale Regelung.
- 8) Anti-Reset-Windup-Massnahmen.

Duale Methode für das unechte Folgeregelungs-Problem ($m \leq p$):

- 3') Spezifikation der Singularwertverläufe von $L_u(j\omega)$ und $D_u(j\omega)$.
- 4') *Loop shaping*: Entwurf eines LQ-Regulators.
- 5') *Loop transfer recovery*: Entwurf eines LG-Filters.

² Vergleiche Kap. 4.1.3.

Die einzelnen Schritte werden in den nachfolgenden Abschnitten erläutert und kommentiert. Dabei konzentrieren wir uns auf die primale Methode. Die duale Methode wird im Kap. 4.2 beleuchtet.

4.1.1 Modellbildung

Da wir uns hauptsächlich für das Eingangs/Ausgangs-Verhalten der Regelstrecke interessieren, beschrieben durch $y(s) = G(s)u(s)$, werden wir die Regelstrecke im allgemeinen mit einem Zustandsraummodell minimaler Ordnung beschreiben. Es ist somit vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar.

Im Weiteren werden wir die Eingangssignale u_i des Modells der Regelstrecke so wählen, dass sie untereinander nicht redundant sind. Die Eingangsmatrix B_p hat somit vollen Rang: $\text{Rang}(B_p) = m$. — Am Ausgang der Regelstrecke gilt sinngemäss: $\text{Rang}(C_p) = p$, d.h. die zu regelnden Ausgangssignale y_j sind linear unabhängig.

Schliesslich ist zu berücksichtigen dass mit m Freiheitsgraden am Eingang der Regelstrecke höchstens m Freiheitsgrade am Ausgang der Regelstrecke zeitkontinuierlich im Sinne einer Folgeregelung beeinflusst werden können. Für ein echtes Folgeregelungs-Problem gilt deshalb $m \geq p$.

Skalieren der Regelstrecke: siehe Anhang 3.

Das Stichwort “kennen lernen” im Kap. 4.1 bedeutet, dass wir mindestens die folgenden Kenngrössen der Regelstrecke berechnen und beurteilen sollten: Lage der Pole und der Nullstellen³ der Übertragungsmatrix $G(s)$, Singularwertverläufe (der Frequenzgangsmatrix $G(j\omega)$) der Regelstrecke, $\sigma_i\{G(j\omega)\}$, insbesondere $\bar{\sigma}\{G(j\omega)\}$ und $\underline{\sigma}\{G(j\omega)\}$.

Bereits bei der mechanischen Konstruktion der Regelstrecke sollten wir darauf achten, dass die resultierende Regelstrecke minimalphasig ist. Falls dies aus Kostengründen nicht möglich ist, sind die Spezifikationen für das Regelsystem so festzulegen, dass die nicht-minimalphasigen Nullstellen möglichst tief im Sperrband liegen (vgl. Kap. 4.1.3).

4.1.2 Systemerweiterung

In Analogie zur klassischen PI- oder PID-Regelung wollen wir oft für die Singularwertverläufe der Kreisverstärkungsmatrix L , $\sigma_i\{L(j\omega)\}$, nach unendlich strebende Werte für $\omega \downarrow 0$ verlangen. Falls die Regelstrecke kein integrierendes

³ Unter den diskutierten Voraussetzungen ist die komplexe Zahl s eine Nullstelle der Regelstrecke, wenn die Übertragungsmatrix $G(s)$ an dieser Stelle einen Rangabfall hat: $\text{Rang}[G(s)] < p$. — Eine nicht-minimalphasige Nullstelle hat $\text{Re}(s) > 0$, eine differenzierende Nullstelle liegt bei $s = 0$.

Verhalten aufweist, d.h. keine Pole bei $s=0$ hat, ist dies nur möglich, wenn der Regler Pole bei $s=0$ hat.

Um dies mit der LQG/LTR-Methode zu erreichen, werden wir bei jedem der Eingangssignale u_i ein I- oder PI-Element einfügen. Die mit diesen I- oder PI-Elementen ergänzte Regelstrecke nennen wir *erweiterte Regelstrecke* oder *Entwurfs-Regelstrecke*.

Allgemein gesprochen besteht die erweiterte Regelstrecke mit der Übertragungsmatrix $G(s)$ aus der Serieschaltung der Systemerweiterung mit der Übertragungsmatrix $G_e(s)$ und der Regelstrecke mit der Übertragungsmatrix $G_p(s)$ (Bild 4.2).

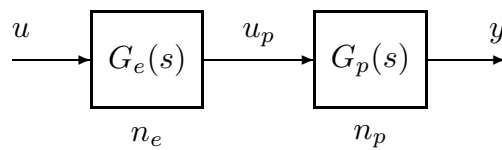


Bild 4.2: Erweiterte Regelstrecke.

Aus den Zustandsraummodellen der Regelstrecke mit den Systemmatrizen A_p , B_p , C_p und der Ordnung n_p und der Systemerweiterung mit den Systemmatrizen A_e , B_e , C_e , D_e und der Ordnung n_e erhalten wir das folgende Zustandsraummodell der erweiterten Regelstrecke der Ordnung n_p+n_e :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{x}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_p & B_p C_e \\ 0 & A_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p D_e \\ B_e \end{bmatrix} u(t) ,$$

$$y(t) = Cx(t) = [C_p \quad 0] \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} .$$

Im interessantesten Fall mit identischen PI-Elementen bei jedem Eingangssignal der Regelstrecke mit den Verstärkungen $K_p = 1$ und den Nachstellzeiten T_N resultieren die folgenden m mal m Systemmatrizen der Systemerweiterung mit Ordnung $n_e = m$:

$$A_e = 0 , \quad B_e = \frac{1}{T_N} I , \quad C_e = I , \quad D_e = I .$$

Die Entwurfs-Regelstrecke hat die Ordnung $n+n_e$. Für diese werden wir einen *Entwurfs-Regler* mit Zustands-Regler und vollständigem Zustands-Beobachter entwerfen. Der Entwurfsregler hat somit auch die Ordnung $n+n_e$. Er hat eine m mal p Übertragungsmatrix $K(s)$ und kann durch ein Zustandsraummodell mit den folgenden Gleichungen beschrieben werden:

$$\dot{z}(t) = A_{dc}z(t) + B_{dc}e(t)$$

$$u(t) = C_{dc}z(t)$$

$$K(s) = C_{dc}[sI - A_{dc}]^{-1}B_{dc} .$$

Aus dem Bild 3.10 können wir die folgenden Systemmatrizen A_{dc} , B_{dc} und C_{dc} des Entwurfs-Reglers heraus lesen:

$$\begin{aligned} A_{dc} &= A - BG - HC \\ B_{dc} &= -H \\ C_{dc} &= -G \quad . \end{aligned}$$

Die Beobachter-Verstärkungsmatrix H und die Regler-Verstärkungsmatrix G wollen wir so berechnen, dass die gemäss Kap. 4.1.3 festgelegten Spezifikationen für das Regelsystem erfüllt werden.

Der zu realisierende Regler mit der m mal p Übertragungsmatrix $K_p(s)$ (Bild 4.1) besteht aus der Serieschaltung des Entwurfs-Reglers und der Systemerweiterung, wie im Bild 4.3 dargestellt.

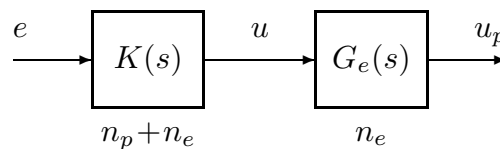


Bild 4.3: Der zu realisierende Regler.

Als Zustandsraummodell für den zu realisierenden Regler erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c e(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_e & B_e C_{dc} \\ 0 & A_{dc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{dc} \end{bmatrix} e(t) \quad , \\ u_p(t) = C_c x_c(t) &= [C_e \quad D_e C_{dc}] \begin{bmatrix} x_e(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Er hat die Ordnung $n_p + 2n_e$.

Rückskalierung des Reglers: siehe Anhang 3.

4.1.3 Spezifikation von Singularwertverläufen

Die Ausführungen in diesem Unterkapitel werden im Bild 4.4 für einen einschleifigen Regelkreis (SISO) und im Bild 4.5 für ein Mehrgrößen-Regelsystem (MIMO) illustriert.

Als Mass für die Bandbreite eines Regelsystems ziehen wir die klassische und am direktesten beeinflussbare Durchtrittsfrequenz⁴ ω_c im SISO-Fall bzw. den Bereich der Durchtrittsfrequenzen $[\underline{\omega}_c, \bar{\omega}_c]$ im MIMO-Fall heran.

⁴ Schnittpunkt der Nyquist-Kurve $L(j\omega)$ mit dem Einheitskreis (mit Zentrum im Koordinatenursprung der Gaußschen Zahlenebene) und Durchtrittspunkt des Amplitudengangs $|L(j\omega)|$ der Kreisverstärkung durch die 0-dB-Linie

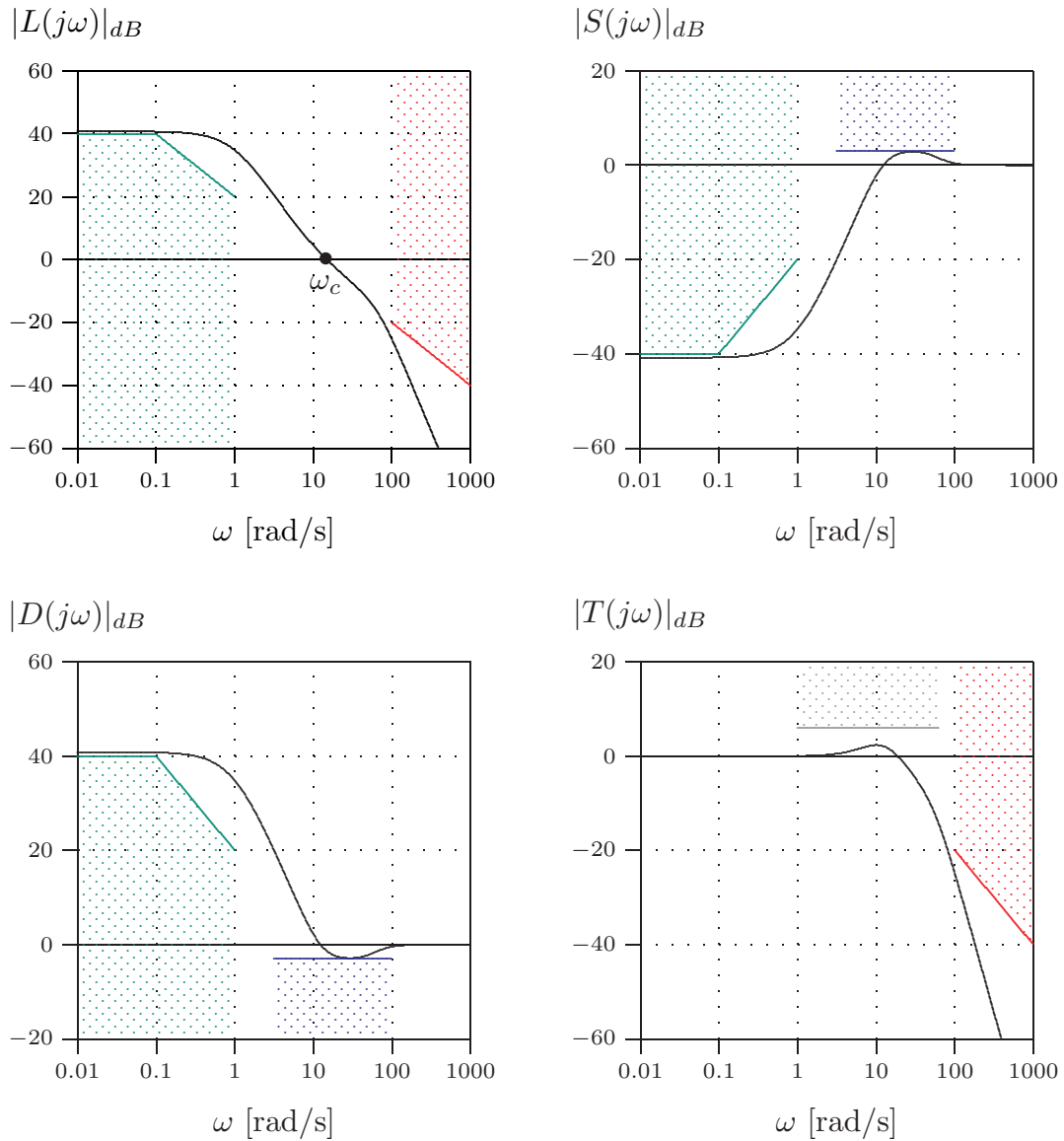


Bild 4.4: Amplitudengänge eines ziemlich robusten Regelsystems:

$|L(j\omega)|$: Kreisverstärkung,

$|D(j\omega)| = |1+L(j\omega)|$: Kreisverstärkungsdifferenz,

$|S(j\omega)| = |D^{-1}(j\omega)|$: Empfindlichkeit und

$|T(j\omega)| = |1-S(j\omega)|$: komplementäre Empfindlichkeit.

Als erstes spezifizieren wir die Durchtrittsfrequenz w_c bzw. den *Bereich der Durchtrittsfrequenzen* $[\underline{\omega}_c, \bar{\omega}_c]$. Die Bandbreite des Regelsystems muss so gewählt werden, dass allfällige nicht-minimalphasige Nullstellen der Regelstrecke deutlich ins Sperrband zu liegen kommen.

Passband: Als Passband bezeichnen wir das Frequenzband $[0, 0.1\omega_c]$, wo die Kreisverstärkung $L_e(j\omega)$ gross und die Empfindlichkeit $S_e(j\omega)$ klein sein soll, damit die komplementäre Empfindlichkeit $T_e(j\omega)$ möglichst nahe bei I_p liegt.

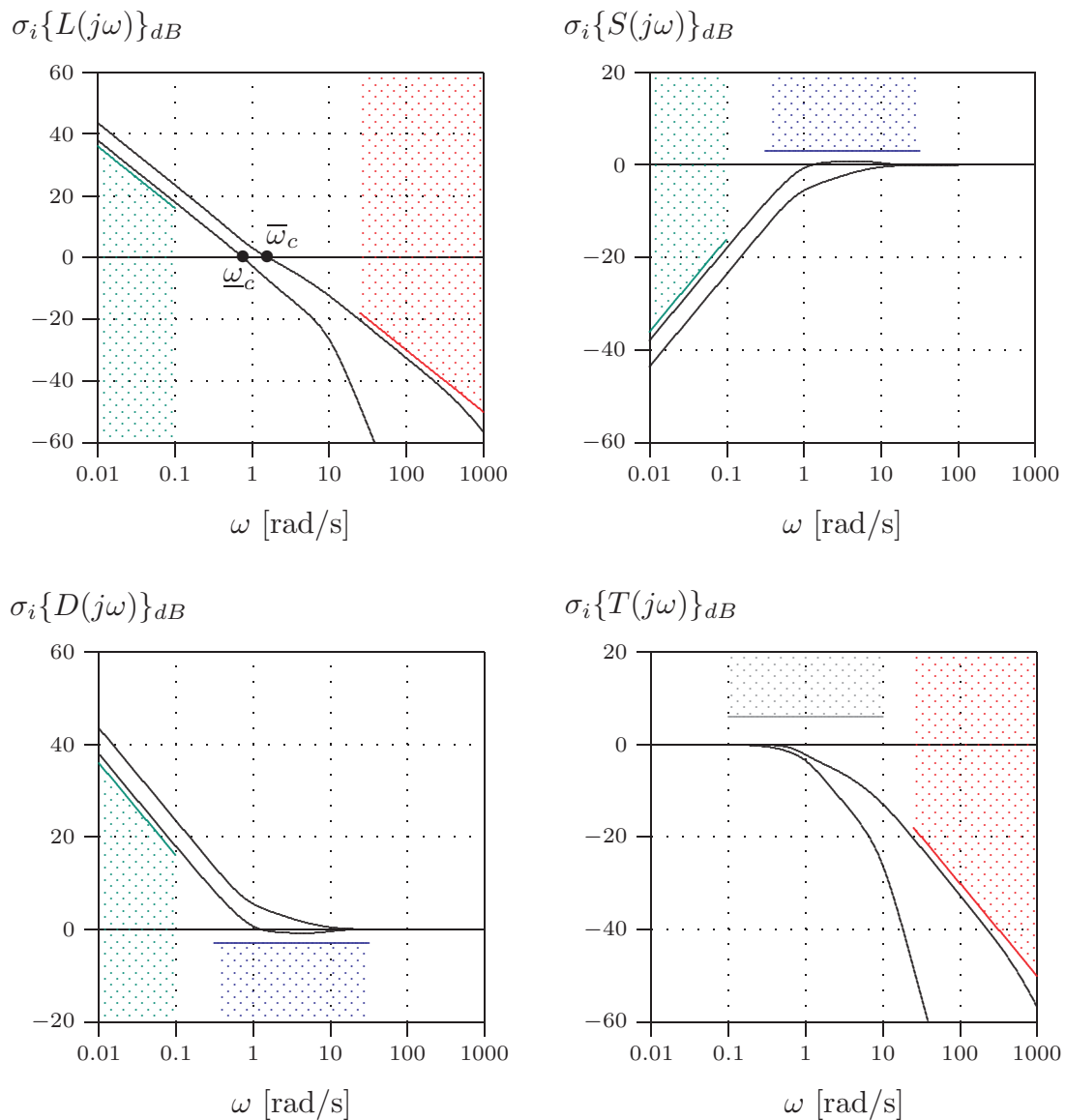


Bild 4.5: Singularwertverläufe eines ziemlich robusten Regelsystems:

- $\sigma_i\{L(j\omega)\}$ der Kreisverstärkung,
- $\sigma_i\{D(j\omega)\}$ der Kreisverstärkungsdifferenz,
- $\sigma_i\{S(j\omega)\}$ der Empfindlichkeit und
- $\sigma_i\{T(j\omega)\}$ der komplementäre Empfindlichkeit.

Im Passband spezifizieren wir die (allenfalls frequenzabhängige) minimale Kreisverstärkung. Äquivalent dazu können wir auch die minimale Kreisverstärkungsdifferenz oder die maximale Empfindlichkeit spezifizieren (siehe Bilder 4.4 und 4.5).

Sperrband: Als Sperrband bezeichnen wir das Frequenzband $[10\omega_c, \infty)$, wo die Kreisverstärkung $L_e(j\omega)$ klein sein soll, damit eine gute Robustheit des Regelsystems gegen nicht-modellierte hochfrequente Dynamik der Regelstrecke resultiert.

Im Sperrband spezifizieren wir die frequenzabhängige maximale Kreisverstärkung. Äquivalent dazu können wir auch die maximale komplementäre Empfindlichkeit spezifizieren (siehe Bilder 4.4 und 4.5).

Durchtrittsbereich: Als Durchtrittsbereich bezeichnen wir das Frequenzband $(0.1\omega_c, 10\omega_c)$. Hier soll ebenfalls eine gute Robustheit gegenüber Fehlern im Modell $G(s)$ der Regelstrecke erreicht werden. In diesem Frequenzband sind insbesondere durch falsch modellierte Totzeiten verursachte Phasenfehler, sowie Verstärkungsfehler relevant.

Im Durchtrittsbereich spezifizieren wir die minimale Kreisverstärkungsdifferenz (“Abstand der Nyquist-Kurve vom Nyquist-Punkt”). Äquivalent dazu können wir auch die maximale Empfindlichkeit spezifizieren (siehe Bilder 4.4 und 4.5).

Im Durchtrittsbereich können wir auch die maximale komplementäre Empfindlichkeit (“Resonanz-Überhöhung”) spezifizieren. Allerdings können wir diese mit der LQG/LTR-Methode nur indirekt via die β -Methode beim “loop shaping” beeinflussen.

4.1.4 Loop Shaping

Im echten Folgeregelungsproblem ($m \geq p$) interessiert uns das Übertragungsverhalten von den im Prinzip beliebig vorgebbaren Führungsgrößen $w = y_{\text{soll}}$ zu den Regelgrößen y . Es wird durch die komplementäre Empfindlichkeit $T_e(s)$ beschrieben:

$$y(s) = T_e(s)w(s) \quad .$$

Da die Kreisverstärkungsmatrix $L_e(s) = G(s)K(s)$ (bei geeigneter Wahl des Reglers $K(s)$) fast für alle komplexen Zahlen $s \in C$ vollen Rang p hat, kann die komplementäre Empfindlichkeit $T_e(s)$ theoretisch fast beliebig gestaltet werden. Wir beziehen deshalb unsere Spezifikationen für das Regelsystem auf L_e , D_e , S_e und T_e , wie in den Bildern 4.4 (SISO) und 4.5 (MIMO) dargestellt.

Wenn wir die Signalflussbilder des Regelsystems und des Zustandsbeobachters miteinander vergleichen (Bild 4.6), fällt auf, dass es offensichtlich Sinn macht, zunächst ein LG-Filter als Zustands-Beobachter auszulegen, dessen Kreisverstärkungsmatrix L_e die Spezifikationen für die Kreisverstärkung L_e (mit etwas Reserve) erfüllt.

Aufgrund der sehr guten Robustheitseigenschaften eines LG-Filters wird dieser Beobachter automatisch die Spezifikationen für D_e und S_e erfüllen. Bei Verwendung der β -Methode kann der Beobachter auch eine beliebige Spezifikation für die Resonanzüberhöhung der komplementären Empfindlichkeit T_e erfüllen.

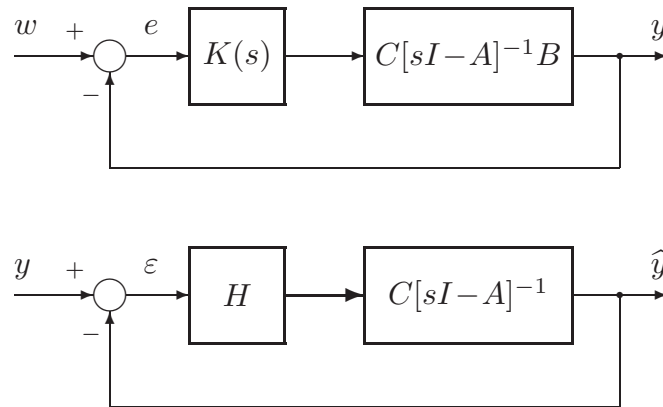


Bild 4.6: Oben: Regelsystem,
unten: vollständiger Zustands-Beobachter.

Als Beobachter-Verstärkungsmatrix H erhalten wir somit (vgl. Kap. 3.3.2):

$$H = \Sigma C^T \mu^{-1} \text{ ,}$$

wobei Σ die einzige stabilisierende Lösung der folgenden algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung ist:

$$A\Sigma + \Sigma A^T - \frac{1}{\beta} \Sigma C^T \mu^{-1} C \Sigma + B_\xi B_\xi^T = 0 \text{ .}$$

Dabei haben wir die Matrix Ξ der leichteren Leserlichkeit halber in der Form $B_\xi B_\xi^T$ statt $\Xi^{1/2} \Xi^{T/2}$ angeschrieben.

Die Parameter für den Entwurf des LG-Filters sind hauptsächlich die positive Zahl μ , mit der wir direkt die Bandbreite des LG-Filters beeinflussen, die positive Zahl $\beta \geq 1$, mit der wir die Resonanzüberhöhung der komplementären Empfindlichkeit T_ε beeinflussen, sowie die fiktive Eingangsmatrix B_ξ .

Die Voraussetzungen für die Existenz einer stabilisierenden Lösung der algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung lauten:

$[A, C]$: detektierbar

$[A, B_\xi]$: hat keinen nicht-steuerbaren Pol auf der imaginären Achse.

Die erste Voraussetzung ist automatisch erfüllt: $[A, C]$ ist vollständig beobachtbar, wenn wir für die Regelstrecke und für die Systemerweiterung je ein Zustandsraummodell minimaler Ordnung verwenden und wenn zwischen diesen beiden Subsystemen der Entwurfs-Regelstrecke keine Pol-Nullstellen-Aufhebung stattfindet.

Die zweite Voraussetzung ist somit ebenfalls automatisch erfüllt, wenn wir routinemässig $B_\xi = B$ wählen. — Mit einer ausgeklügelteren Wahl der Matrix B_ξ ist es möglich, den Abstand zwischen dem maximalen und dem minimalen Singularwert der Kreisverstärkungsmatrix L_ε bei sehr tiefen oder bei sehr hohen Frequenzen beliebig klein zu machen, falls dies erwünscht und sinnvoll ist.

Wenn wir die definitiven Werte der Entwurfsparameter μ , β und B_ξ festgelegt, die algebraische Matrix-Riccati-Gleichung gelöst und die Beobachter-Verstärkungsmatrix H berechnet haben, hat das in unteren Teil des Bilds 4.6 dargestellte LG-Filter die Kreisverstärkungsmatrix

$$L_\varepsilon(s) = C[sI - A]^{-1}H \quad .$$

Sie erfüllt die Spezifikationen für die Kreisverstärkungsmatrix $L_e(s)$ des Regelsystems gemäss Bild 4.4 bzw. Bild 4.5 im Passband mit etwas Reserve. Die Kreisverstärkungsdifferenzmatrix $D_e(s) = I + L_e(s)$ und die Empfindlichkeitsmatrix $S_e(s) = D_e^{-1}(s)$ erfüllen die Spezifikationen für die entsprechenden Matrizen $D_e(s)$ bzw. $S_e(s)$ des Regelsystems automatisch (siehe Gleichungen (1') und (2') im Kap. 3.3.2).

Die komplementäre Empfindlichkeitsmatrix $T_e(s)$ erfüllt die Spezifikation für $T_e(s)$ im Durchtrittsbereich ebenfalls, wenn der Parameter β genügend gross gewählt worden ist. (Siehe Gleichung (3') im Kap. 3.3.2 und Kommentare zur β -Methode.) — Empfohlener Wertebereich für β : 1 bis 5, maximal 10.

4.1.5 Loop Transfer Recovery

Das LQG-Regelsystem mit Zustandsvektor-Rückführung und dem obigen LG-Filter als vollständigem Zustandsbeobachter wird durch die folgenden Gleichungen beschrieben (vgl. Bild 3.10):

$$\begin{aligned} e(t) &= w(t) - y(t) \\ \dot{z}(t) &= A_{dc}z(t) + B_{dc}e(t) = [A - BG - HC]z(t) - He(t) \\ u(t) &= C_{dc}z(t) = -Gz(t) \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) - BGz(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} G(s) &= C[sI - A]^{-1}B \\ K(s) &= C_{dc}[sI - A_{dc}]^{-1}B_{dc} = G[sI - A + BG + HC]^{-1}H \\ L_e(s) &= G(s)K(s) \\ &= C[sI - A]^{-1}BC_{dc}[sI - A_{dc}]^{-1}B_{dc} \\ &= C[sI - A]^{-1}BG[sI - A + BG + HC]^{-1}H \\ D_e(s) &= I + L_e(s) \quad . \end{aligned}$$

Wenn wir die Reglerverstärkungsmatrix G separat aufgrund reiner Zustandsregelungsüberlegungen berechnen (z.B. Polvorgabemethode, LQ-Regelung etc.), werden die Singularwertverläufe der Kreisverstärkungsmatrix $L_e(j\omega)$ und der Kreisverstärkungsdifferenzmatrix $D_e(j\omega)$ sehr häufig viel tiefer liegen als die Singularwertverläufe der entsprechenden Matrizen $L_\varepsilon(j\omega)$ bzw. $D_\varepsilon(j\omega)$ des Loop-shaping-Filters. In anderen Worten: Das resultierende Mehrgrößen-Folgeregel-system erreicht weder die aufgrund des Loop-shaping-Filters erwartete Folge-regelungsqualität noch dessen Robustheit (siehe Beispiel im Kap 3.3.3).

Um wieder die guten Eigenschaften des Loop-shaping-Filters “zurück” zu erhalten, verwenden wir die sogenannte

Loop-Transfer-Recovery-Methode:

Wir bestimmen die Reglerverstärkungsmatrix G aufgrund eines speziellen LQ-Regulator-Problems mit Hilfe der folgenden Formel

$$G = (\rho R_1)^{-1} B^T K ,$$

wobei K die einzige symmetrische, stabilisierende Lösung der algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung

$$0 = A^T K + K A - K B (\rho R_1)^{-1} B^T K + C^T Q_y C$$

ist.

Als Entwurfparameter für die Loop-Transfer-Recovery haben wir hauptsächlich die positive Zahl ρ , welche “genügend klein” gewählt werden muss, sowie die beiden symmetrischen, positiv-definiten Matrizen R_1 ($m \times m$) und Q_y ($p \times p$).

Meistens wählen wir $R_1 = I_m$ und $Q_y = I_p$, so dass nur noch der $\rho > 0$ als Parameter für die Bandbreite der Loop-Transfer-Recovery übrig bleibt. — Nun ist ρ so lange zu verkleinern, bis sich die Singularwertverläufe der Kreisverstärkungsmatrix $L_e(j\omega)$ bis zu genügend hohen Kreisfrequenzen ω genügend nahe an die Singularwertverläufe der Kreisverstärkungsmatrix $L_\varepsilon(j\omega)$ des Loop-shaping-Filters anschmiegen und dadurch alle Spezifikationen für das Regelsystem gemäss Bild 4.4 oder 4.5 auch für das LQG-Regelsystem erfüllt sind.

Dass die Loop-Transfer-Recovery-Methode unter recht milden Voraussetzungen funktioniert ergibt sich aus dem nachfolgenden Theorem.

Theorem 1:

Wenn die Entwurfs-Regelstrecke $[A, B, C]$ minimal-phasig und quadratisch⁵ ist, gelten für alle Kreisfrequenzen ω die folgenden Grenzübergänge⁶:

$$\lim_{\rho \downarrow 0} K(j\omega) = [C[j\omega I - A]^{-1}B]^{-1}C[j\omega I - A]^{-1}H \quad ,$$

$$\lim_{\rho \downarrow 0} L_e(j\omega) = L_e(j\omega) \quad .$$

Beweis: Zum Beweis des Theorems 1 werden die beiden folgenden Lemmata herangezogen:

Lemma 1: Wenn die Voraussetzungen des Theorems 1 erfüllt sind, gilt für die relevante Lösung K der algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung der Grenzübergang

$$\lim_{\rho \downarrow 0} K = 0 \quad .$$

Beweis von Lemma 1: Siehe H. Kwakernaak, R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*, Wiley, New York, NY, 1972, S. 306–312. Beachte: die Minimalphasigkeit des Systems $[A, B, C]$ wird hier benötigt.

Lemma 2: Wenn die Voraussetzungen des Theorems 1 erfüllt sind, gilt für die Reglerverstärkungsmatrix G der Grenzübergang

$$\lim_{\rho \downarrow 0} \sqrt{\rho}G = WC$$

mit $W = R_1^{-1/2}VQ_y^{1/2} \in R^{p \times p}$, wobei $V \in R^{p \times p}$ eine beliebige orthogonale⁷ Matrix ist und $Q_y^{1/2}$ und $R_1^{1/2}$ Quadratwurzeln von Q_y bzw. R_1 sind⁸.

Beweis von Lemma 2: Dies folgt direkt aus dem Lemma 1 und der algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung.

Beweis des Theorems 1:

Mit der Substitution

$$X(s) = sI - A + HC$$

⁵ d.h.: $m = p$

⁶ punktweise, aber nicht gleichmässige Konvergenz

⁷ d.h.: $V^T V = I_p$

⁸ d.h.: $R_1 = R_1^{T/2} R_1^{1/2}$ und $Q_y = Q_y^{T/2} Q_y^{1/2}$

können wir die Übertragungsmatrix des Kompensators wie folgt anschreiben:

$$K(s) = G[X(s) + BG]^{-1}H \quad .$$

Mit der sogenannten Matrizen-Identität⁹ formen wir $K(s)$ nun um:

$$\begin{aligned} K(s) &= G\{X^{-1}(s) - X^{-1}(s)B(I + GX^{-1}(s)B)^{-1}GX^{-1}(s)\}H \\ &= \{I - GX^{-1}(s)B(I + GX^{-1}(s)B)^{-1}\}GX^{-1}(s)H \\ &= \left\{ (I + GX^{-1}(s)B)(I + GX^{-1}(s)B)^{-1} \right. \\ &\quad \left. - GX^{-1}(s)B(I + GX^{-1}(s)B)^{-1} \right\}GX^{-1}(s)H \\ &= \{I + GX^{-1}(s)B - GX^{-1}(s)B\}(I + GX^{-1}(s)B)^{-1}GX^{-1}(s)H \\ &= (I + GX^{-1}(s)B)^{-1}GX^{-1}(s)H \\ &= (\sqrt{\rho}I + \sqrt{\rho}GX^{-1}(s)B)^{-1}\sqrt{\rho}GX^{-1}(s)H \quad . \end{aligned}$$

Für $\rho \downarrow 0$ geht der Term $\sqrt{\rho}I$ gegen die Nullmatrix, und auf den Faktor $\sqrt{\rho}G$ können wir das Lemma 2 anwenden. Für $s = j\omega$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \downarrow 0} K(j\omega) &= (WCX^{-1}(j\omega)B)^{-1}WCX^{-1}(j\omega)H \\ &= (CX^{-1}(j\omega)B)^{-1}CX^{-1}(j\omega)H \quad . \end{aligned}$$

Die beiden hier auftretenden Faktoren $CX^{-1}(j\omega)B$ und $CX^{-1}(j\omega)H$ verarbeiten wir in analoger Weise weiter. Aufgrund der Definition von $X(s)$ gilt

$$CX^{-1}(s)B = C(sI - A + HC)^{-1}B \quad .$$

Mit Hilfe der Matrizen-Identität können wir ihn wie folgt weiter umformen:

$$\begin{aligned} CX^{-1}(s)B &= C\{[sI - A]^{-1} - [sI - A]^{-1}H(I + C[sI - A]^{-1}H)^{-1}C[sI - A]^{-1}\}B \\ &= \{I - C[sI - A]^{-1}H(I + C[sI - A]^{-1}H)^{-1}\}C[sI - A]^{-1}B \\ &= \left\{ (I + C[sI - A]^{-1}H)(I + C[sI - A]^{-1}H)^{-1} \right. \\ &\quad \left. - C[sI - A]^{-1}H(I + C[sI - A]^{-1}H)^{-1} \right\}C[sI - A]^{-1}B \\ &= \{I + C[sI - A]^{-1}H - C[sI - A]^{-1}H\} \\ &\quad \times (I + C[sI - A]^{-1}H)^{-1}C[sI - A]^{-1}B \\ &= (I + C[sI - A]^{-1}H)^{-1}C[sI - A]^{-1}B \quad . \end{aligned}$$

⁹ Seien M und N zwei quadratische, invertierbare Matrizen mit möglicherweise unterschiedlichen Dimensionen, und seien L und R zwei Rechteckmatrizen mit passenden Dimensionen. Dann gilt die folgende Matrizen-Identität:

$$[M + LNR]^{-1} = M^{-1} - M^{-1}L[RM^{-1}L + N^{-1}]^{-1}RM^{-1} \quad ,$$

sofern die Matrizen in den eckigen Klammern invertierbar sind.

In analoger Weise erhalten wir

$$CX^{-1}(s)H = (I + C[sI - A]^{-1}H)^{-1}C[sI - A]^{-1}H \quad .$$

Durch Einsetzen erhalten wir schliesslich das erste Resultat des Theorems 1:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \downarrow 0} K(j\omega) &= (CX^{-1}(j\omega)B)^{-1}CX^{-1}(j\omega)H \\ &= \left((I + C[j\omega I - A]^{-1}H)^{-1}C[j\omega I - A]^{-1}B \right)^{-1} \\ &\quad \times \left((I + C[j\omega I - A]^{-1}H)^{-1}C[j\omega I - A]^{-1}H \right) \\ &= [C[j\omega I - A]^{-1}B]^{-1}C[j\omega I - A]^{-1}H \quad . \end{aligned}$$

Das zweite Resultat des Theorems 1 folgt nun trivialerweise aufgrund der asymptotischen “Inversion der Regelstrecke” am Ausgang des Kompensators:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \downarrow 0} L_e(j\omega) &= G(j\omega) \lim_{\rho \downarrow 0} K(j\omega) \\ &= C[j\omega I - A]^{-1}B[C[j\omega I - A]^{-1}B]^{-1}C[j\omega I - A]^{-1}H \\ &= C[j\omega I - A]^{-1}H \quad . \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Für das Theorem 1 haben wir nicht vorausgesetzt, dass das Loop-shaping-Filter mit der Kreisverstärkungsmatrix $L_\varepsilon(s)$ ein LG-Filter sei. Mit der Loop-Transfer-Recovery-Methode werden für $\rho \downarrow 0$ asymptotisch die Eigenschaften irgendeines Loop-shaping-Filters erreicht, insbesondere dessen Robustheitseigenschaften.
- Im Theorem 1 haben wir vorausgesetzt, dass die Entwurfs-Regelstrecke minimalphasig ist. — Für die Praxis bedeutet dies, dass die Bandbreite des Regelsystems so spezifiziert werden muss, dass allfällige Nicht-Minimalphasen-Nullstellen deutlich ins Sperrband zu liegen kommen.
- Die Singularwertverläufe der Kreisverstärkungsdifferenzmatrix

$$D_u(j\omega) = I_m + L_u(j\omega) = I_m + K(j\omega)G(j\omega)$$

müssen zusätzlich überprüft und beurteilt werden.

- Im Theorem 1 haben wir $m=p$ vorausgesetzt. Intuitiv ist klar, dass mit mehr Steuerfreiheitsgraden, $m > p$, Loop-Transfer-Recovery erst recht möglich ist. Auf einen Beweis dieser Aussage wird hier verzichtet.

4.1.6 Ordnungs-Reduktion

In den beiden Reglerentwurfsschritten “loop shaping” und “loop transfer recovery” sind die Beobachter-Verstärkungsmatrix H und die Regler-Verstärkungsmatrix G bestimmt worden. Die Gleichungen des Entwurfs-Reglers lauten:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= A_{dc}z(t) + B_{dc}e(t) = [A - BG - HC]z(t) - He(t) \\ u(t) &= C_{dc}z(t) = -Gz(t) \\ K(s) &= C_{dc}[sI - A_{dc}]^{-1}B_{dc} = G[sI - A + BG + HC]^{-1}H \quad .\end{aligned}$$

Manchmal ist es möglich, den Regler durch Ordnungs-Reduktion zu vereinfachen. Dabei resultiert ein Regler niedrigerer Ordnung, $n_{\text{red}} < n + n_e$.

Der Algorithmus für die Reduktion der Ordnung des Entwurfs-Reglers ist im Anhang 5 im Detail dargestellt. Er enthält als Vorbereitungsschritt einen Algorithmus zur Balancierung des Entwurfs-Reglers. — Die Balancierung des Reglers kann auch interessant sein, wenn anschliessend die Ordnung des Entwurfs-Reglers nicht reduziert wird, da sich durch die Balancierung die Konditionierung der Systemmatrizen verbessert.

Um die Notation nicht unnötig zu verkomplizieren, verwenden wir an dieser Stelle für die Systemmatrizen und die Übertragungsmatrix des balancierten oder balancierten und ordnungs-reduzierten Entwurfs-Reglers die unveränderten Symbole¹⁰ A_{dc} , B_{dc} , C_{dc} und D_{dc} , bzw. $K(s)$.

Der zu realisierende Regler besteht aus der Serieschaltung dieses Entwurfs-Reglers und der Systemerweiterung (vgl. Bild 4.3). Er wird durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c e(t) = \begin{bmatrix} A_e & B_e C_{dc} \\ 0 & A_{dc} \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} B_e D_{cd} \\ B_{dc} \end{bmatrix} e(t) \quad , \\ u_p(t) &= C_c x_c(t) + D_c e(t) = [C_e \quad D_e C_{dc}] x_c(t) + D_e D_{cd} e(t) \quad .\end{aligned}$$

Er hat die Ordnung $n_{\text{red}} + n_e$ mit $n_{\text{red}} \leq n_p + n_e$.

¹⁰ Die LQG/LTR-Methode nach Kap. 4.1.5 und 4.1.6 liefert einen Regler ohne feedthrough, d.h. $D_{dc} = 0$. — Beim Reduzieren der Ordnung des Reglers nach Kap. 4.1.6 kann aber ein reduzierter Regler mit feedthrough resultieren; siehe Anhang 5.

4.1.7 Umsetzung auf digitale Regelung

Der zu realisierende zeitkontinuierliche Regler wird durch die folgenden Gleichungen beschrieben (vgl. Bild 4.1):

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c e(t) \\ u_p(t) &= C_c x_c(t) + D_c e(t) \\ K_p(s) &= C_c [sI - A_c]^{-1} B_c + D_c \quad .\end{aligned}$$

Er hat die Ordnung $n_c \leq n_p + 2n_e$.

Selbstverständlich werden wir mit Hilfe eines Mikrorechners eine digitale Regelung realisieren. Deshalb ist der obige zeitkontinuierliche Regler in einen "äquivalenten" zeitdiskreten Regler umzusetzen, der periodisch, entsprechend der Abtastperiode T , neue Abtastwerte e_k des Regelfehlers e entgegennimmt und dann neue Stützwerte u_k für den Stellvektor u liefert.

Der zeitkontinuierliche Stellvektor $u(t)$ wird für die Regelstrecke in einem Zero-Order-Hold-Glied aufbereitet, welches den zeitkontinuierlichen Stellvektor jeweils konstant hält, bis der digitale Regler einen neuen Stützwert liefert:

$$u(t) \equiv u_k \quad \text{für } t_k + \Delta t \leq t < t_{k+1} + \Delta t \quad .$$

Dabei ist Δt der Rechenzeitbedarf des Mikrorechners zur Abarbeitung des Regelalgorithmus zwischen dem Eintreffen der neuesten Regelabweichung e_k zur Zeit $t = kT$ und der (verzögerten) Ausgabe des neuesten Stützwertes u_k für die Stellgröße zur Zeit $t = kT + \Delta t$.

Der zeitliche Ablauf der Kommunikation der Signale e_k und u_k zwischen dem zeitdiskreten Regler und der zeitkontinuierlichen realen Welt (Regelstrecke und Zero-Order-Hold-Glied) ist im Bild 4.7 dargestellt:

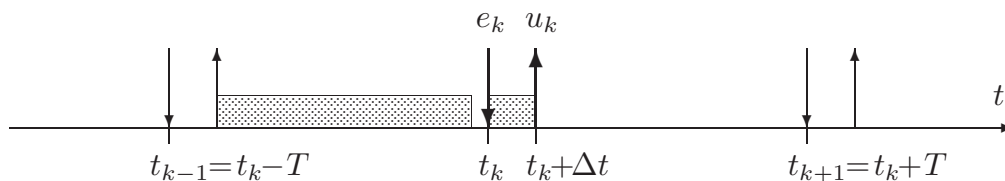


Bild 4.7: Zeitlicher Ablauf bei digitaler Regelung.

Zur Zeit $t = t_k$ erhält der Regler den neuesten Abtastwert e_k des Regelfehlers. Aufgrund des Rechenzeitbedarfs des Mikrorechners erfolgt die Ausgabe des entsprechenden neuesten Stützwertes u_k für die Stellgröße mit einer Verzögerung Δt zur Zeit $t = t_k + \Delta t$. — Die grau markierten Zeitintervalle zeigen, wann der Algorithmus zur Berechnung von u_k abgearbeitet wird. (Die gesamte Rechenzeit dafür muss natürlich kleiner als die Abtastperiode T sein!)

Die Tatsache, dass die zeitkontinuierliche Stellgröße $u(t)$ zur Ansteuerung der Regelstrecke im Zero-Order-Hold-Glied im Zeitintervall $[t_k + \Delta t, t_{k+1} + \Delta t)$ konstant auf dem Wert u_k gehalten wird, entspricht dynamisch etwa einer zusätzlichen Totzeit der Länge $\frac{T}{2}$ im Regelkreis.¹¹

Durch den Übergang von zeitkontinuierlicher Regelung auf zeitdiskrete Regelung ist also eine Totzeit mit der Übertragungsfunktion $e^{-s\tau}$ in den Regelkreis eingefügt worden, mit

$$\tau \approx \frac{T}{2} + \Delta t \quad .$$

Dadurch reduziert sich die Phasenreserve φ des Regelsystems um

$$\Delta\varphi = \omega_c \tau \approx \omega_c \left(\frac{T}{2} + \Delta t \right) \quad .$$

Daraus folgt, dass die Abtastperiode T möglichst klein gewählt werden sollte. Mit der Minimierung der Totzeit Δt befassen wir uns im Nachfolgenden.

Für den Algorithmus des digitalen Reglers machen wir den folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} \xi_k &= M\xi_{k-1} + N_1 e_k + N_2 e_{k-1} \\ u_k &= P\xi_k + Qe_k \end{aligned}$$

Verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung der Matrizen $M \in R^{n_c \times n_c}$, N_1 und $N_2 \in R^{n_c \times p}$, $P \in R^{m \times n_c}$ und $Q \in R^{m \times p}$ sind im Anhang 6 dargelegt.

Empfehlung: Zur Diskretisierung des Reglers ist die totzeitoptimale Variante der bilinearen Transformation zu benutzen (Anhang 6, Abschn. 3). — Dann ist $N_1 = 0$.

Um die Totzeit Δt möglichst klein zu halten, werden im Zeitintervall $[t_k, t_k + \Delta t]$ nur diejenigen Rechenoperationen ausgeführt, welche die neueste Information e_k tatsächlich benötigen. Der totzeitoptimierte Algorithmus (mit $N_1 = 0$) könnte etwa wie folgt codiert werden:¹²

```
% interrupt
input e
u=u+Q*e
output u
xi=M*xi+N2*e
u=P*xi
return
% Freigabe des Prozessors an das Betriebssystem
```

¹¹ Eine exakte Analyse der Dynamik des Zero-Order-Hold-Gliedes ist in den Kap. 12.2 und 12.3 in H. P. Geering, *Regelungstechnik*, 6. Aufl., Springer-Verlag, 2003, enthalten.

¹² Initialisierung mit $\mathbf{xi}=0$ und $\mathbf{u}=0$. — In der zweiten Hälfte wird bereits für die Berechnung von u_{k+1} vorgearbeitet.

4.1.8 Anti-Reset-Windup-Massnahmen

Wenn die Stellgrößen komponentenweise hart amplitudenbeschränkt sind,

$$u_{i,\min} \leq u_i(t) \leq u_{i,\max} \quad (i = 1 \dots, m) ,$$

kann in einem dynamischen Kompensator mit der Übertragungsmatrix $K(s)$, insbesondere wenn es sich um einen Regler mit I-Anteil handelt, das sogenannte “reset-windup”-Problem auftreten: Der Regler kann sich “aufwickeln”, d.h. die Differenz zwischen der eigentlich verlangten Stellgröße $u_i(t)$ und der realisierbaren Stellgröße $u_{i,\max}$ bzw. $u_{i,\min}$ wird immer grösser. — Es ist erstrebenswert, dass sich der Regler in einem solchen Fall nicht wieder “abwickeln” muss, bis die Stellgröße den Anschlag verlässt, sondern dass die Stellgröße die Sättigung sofort verlässt, sobald die Differenz zwischen der verlangten Stellgröße und der realisierbaren Stellgröße wieder abnimmt!

Eine Methode, die dies bewerkstelligt wird Anti-Reset-Windup-Massnahme genannt. Der totzeitoptimierte Algorithmus für die digitale Regelung (mit $N_1 = 0$) mit Anti-Reset-Windup könnte etwa wie folgt codiert werden:¹²

```
% interrupt
input e
u0=u0+Q*e
u=sat(u0-arw)
output u
arw=u0-u
xi=M*xi+N2*e
u0=P*xi
return
% Freigabe des Prozessors an das Betriebssystem
```

Wenn wir eine Systemerweiterung (vgl. Bilder 4.2 und 4.3) mit der Ausgangsmatrix $C_e = I_m$ verwenden, können wir auf den Vektor `arw` verzichten und direkt das Aufwickeln des Zustandsvektors x_e der Systemerweiterung bekämpfen. Der obige Algorithmus könnte dann etwa wie folgt codiert werden:

```
% interrupt
input e
u0=u0+Q*e
u=sat(u0)
output u
% Im "main": declare xi=[xe;xdc]
xe=xe+u-u0
xi=M*xi+N2*e
u0=P*xi
return
% Freigabe des Prozessors an das Betriebssystem
```

¹² Initialisierung mit `xi=0`, `u0=0` und `arw=0`.

Dabei ist \mathbf{x}_e derjenige Teilvektor des Vektors \mathbf{x}_i , welcher dem Zustandsvektor x_e der Systemerweiterung entspricht. (In unserer Notation als der obere Teil von \mathbf{x}_i ; vgl. Schluss des Abschnitts 4.1.6.)

4.1.9 Die duale LQG/LTR-Methode

Es ist klar, dass das unechte Folgeregelungsproblem mit $p > m$ nicht auftreten kann, weil wir allen Ernstes versuchen, mit bloss m Freiheitsgraden am Eingang der Regelstrecke eine grössere Anzahl $p > m$ von Freiheitsgrade am Ausgang der Regelstrecke zu regeln, sondern weil mehr Sensoren zur Verfügung stehen als unbedingt nötig.

Dementsprechend sind für die überzähligen Ausgangssignale sinnvolle, kompakte Führungsgrössen aufzubereiten (vgl. Kap. 3, Fussnote 2).

In diesem Fall ist die Kreisverstärkungsmatrix $L_e(s)$ a priori singulär. Es ist deshalb sinnvoller, den Loop-breaking-Point u zu betrachten:

- 3') Wir formulieren die Spezifikationen im Sinne von Bild 4.5 für die Frequenzgangs-Matrizen $L_u(j\omega)$, $D_u(j\omega)$, $S_u(j\omega)$ und $T_u(j\omega)$.
- 4') Wir entwerfen zuerst einen Loop-shaping-LQ-Regulator, welcher die Spezifikationen mit einer kleinen Reserve im Passband erfüllt.
- 5') Dann entwerfen wir ein Loop-Transfer-Recovery-LG-Filter, so dass die Spezifikationen für das Regelsystem erfüllt sind.

Die Problemlösungstechnik ist völlig "dual" zur "primalen" Methode, die in den Abschnitten 4.1.4 und 4.1.5 beschrieben worden ist. Deshalb können wir uns hier sehr kurz fassen.

Loop shaping (LQ-Regulator):

Algebraische Matrix-Riccati-Gleichung:

$$A^T K + K A - \frac{1}{\beta} K B \rho^{-1} B^T K + C_\eta^T C_\eta = 0$$

Regler-Verstärkungsmatrix:

$$G = \rho^{-1} B^T K$$

Voraussetzungen für die Existenz einer stabilisierenden Lösung:

$[A, B]$: stabilisierbar

$[A, C_\eta]$: hat keinen nicht-beobachtbaren Pol auf der imaginären Achse

Entwurfs-Parameter:

$$\beta \geq 1, \quad \rho > 0 \quad \text{und} \quad C_\eta.$$

Loop Transfer Recovery (LG-Filter):

Algebraische Matrix-Riccati-Gleichung:

$$A\Sigma + \Sigma A^T - \Sigma C^T(\mu\Theta_1)^{-1}C\Sigma + B\Psi B^T = 0$$

Beobachter-Verstärkungsmatrix:

$$H = \Sigma C^T(\mu\Theta_1)^{-1}$$

Voraussetzungen für Loop Transfer Recovery:

$[A, B, C]$ minimalphasig

Entwurfs-Parameter:

$$\mu > 0, \quad \Theta_1 = \Theta_1^T > 0 \quad \text{und} \quad \Psi = \Psi^T > 0 .$$

Meistens wählen wir $C_\eta = C$, $\Theta_1 = I_p$, $\Psi = I_m$, so dass im Wesentlichen die beiden Bandbreite-Parameter ρ für das Loop-shaping und μ für die Loop-Transfer-Recovery, sowie der Robustheits-Parameter $\beta \geq 1$ verbleiben.

4.2 Beispiele

4.2.1 SISO-Beispiel

Als erstes Beispiel betrachten wir noch einmal die am Schluss des Kapitels 3 untersuchte Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 4}$$

und dem Zustandsraum-Modell

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} .$$

Ihr Amplitudengang ist im Bild 4.8 dargestellt.

Um die Bandbreite des Regelsystems zu spezifizieren, können wir die folgenden Punkte in Erwägung ziehen:

- Bei $\omega \approx 7$ rad/s liegt der Amplitudengang $|G_p(j\omega)|$ eine Dekade tiefer als der statische Übertragungsfaktor $G_p(0)$.
- Das Zehnfache der Eckfrequenz der Regelstrecke ist $\omega = 20$ rad/s.
- Bei der Modellierung der unterkritisch gedämpften Regelstrecke ist realistischerweise mit einer grossen Ungewissheit bezüglich der Resonanzfrequenz ($\omega_0 \approx 2$ rad/s) und der relativen Dämpfung ($\zeta \approx 0.05$) zu rechnen. Die Resonanz der Regelstrecke sollte deshalb entweder klar ins Passband oder deutlich ins Sperrband des Regelsystems gelegt werden.

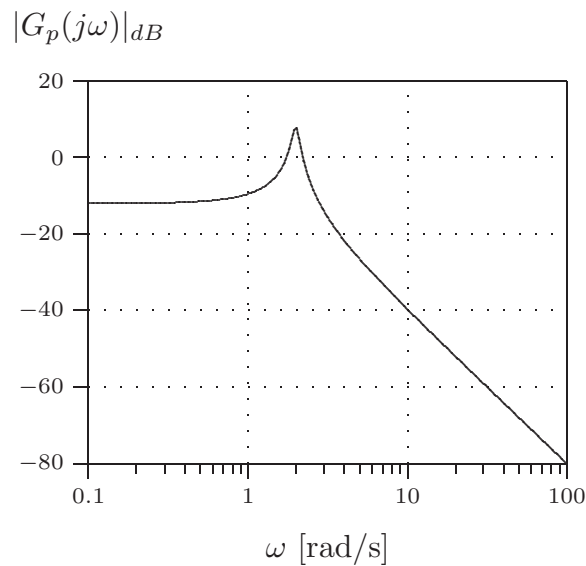


Bild 4.8: Amplitudengang der Regelstrecke.

Wir legen nun die folgenden Spezifikationen für das Regelsystem fest:

- Durchtrittsfrequenz $\omega_c = 20$ rad/s.
- Perfekt verschwindender stationärer Nachlauffehler bei konstanter Führungsgrösse.
- Minimale Kreisverstärkung im Passband: $|L(j\omega)| \geq \frac{20}{\omega}$.
- Robustheit: $|D(j\omega)| \geq 0.7$ (entsprechend -3 dB).
- Resonanzüberhöhung: $|T(j\omega)| \leq 2$ (entsprechend 6 dB).
- Überschwingen der Einheitssprungantwort $< 10\%$.
- Anschliessendes Unterschwingen der Einheitssprungantwort $< 5\%$.

Die Forderung nach perfekt verschwindendem stationären Nachlauffehler bei konstanter Führungsgrösse bedingt eine Systemerweiterung mit einem I-Element oder einem PI-Element. Wir bevorzugen ein PI-Element mit der Übertragungsfunktion

$$1 + \frac{1}{T_N s} ,$$

da es bei höheren Frequenzen keine nacheilende Phasendrehung im Regelkreis verursacht und da wir mit der Nachstellzeit T_N einen zusätzlichen Entwurfparameter erhalten.

Die obigen Spezifikationen können mit der folgenden Werten der zur Verfügung stehenden Regler-Entwurfparameter erfüllt werden:

$$\begin{array}{lll} T_N = 0.4 \text{ [s]} & & \\ \beta = 5 & B_\xi = B & \mu = 2 \cdot 10^{-3} \\ R_1 = 1 & Q_y = 1 & \rho = 10^{-8} . \end{array}$$

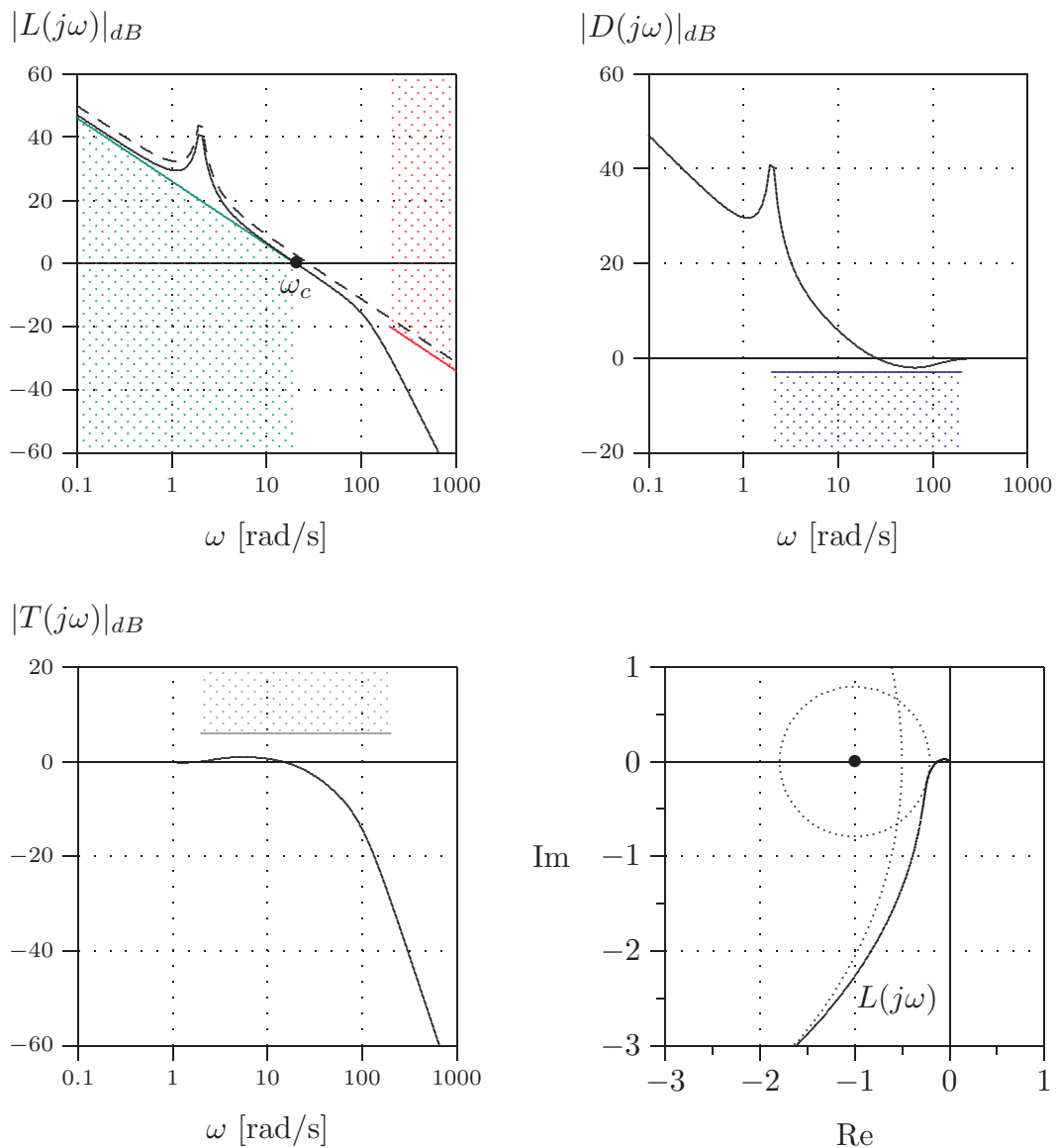


Bild 4.9: Frequenzkennlinien des robusten SISO-Regelsystems: $\omega_c = 20.5$ rad/s,
 $|D(j\omega)|_{\min} = |1+L(j\omega)|_{\min} = 0.792$ (-2.025 dB),
 $|\beta+L(j\omega)|_{\min} = 4.5$, $|T(j\omega)|_{\max} = 1.116$ (0.953 dB).

Im Bild 4.9 sind die Amplitudengänge der Kreisverstärkungen L_ε und L , der Kreisverstärkungsdifferenz D und der komplementären Empfindlichkeit T , sowie die Nyquist-Kurve des robusten SISO-Regelsystems dargestellt. — Im Nyquist-Plot sind auch die beiden Kreise mit Radius 0.792 und Zentrum im Punkt $(-1, j \cdot 0)$ und mit Radius 4.5 und Zentrum im Punkt $(-5, j \cdot 0)$ eingezeichnet, welche die Nyquist-Kurve berühren.

Das nachfolgende Bild 4.10 zeigt die Einheits-Sprungantwort dieses robusten Regelsystems.

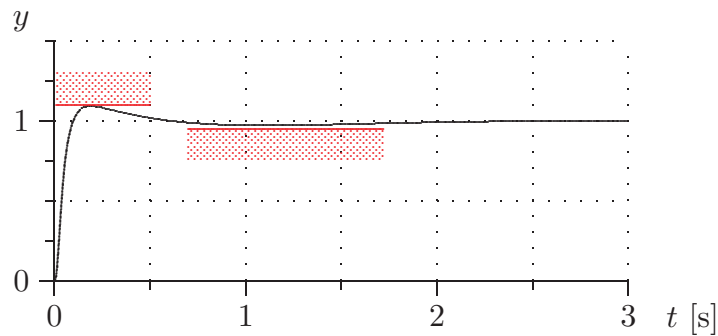


Bild 4.10: Einheits-Sprungantwort des robusten SISO-Regelsystems:
Erstes Überschwingen 9.3%, erstes Unterschwingen 2.7%.

4.2.2 MIMO-Beispiel: Drehzahl-Lambda-Regelung eines Ottomotors

In diesem Beispiel betrachten wir einen BMW Ottomotor (1.8 Liter, 4 Zylinder, 16 Ventile) auf dem Motorprüfstand des Instituts für Mess- und Regeltechnik der ETH Zürich bei geregelter Lastdrehmoment der elektrischen Bremse (Gleichstrommaschine).

Die zu regelnden Größen sind die Motordrehzahl $n(t)$ und die von der Lambda-Sonde gemessene relative Luftüberschusszahl $\lambda(t)$.

Als Stellgrößen stehen die Stellung $\alpha_{DK, \text{sol}}(t)$ der elektromotorisch angesteuerten Drosselklappe, die (relative) Einspritzmenge $F_\lambda(t)$ und der Zündzeitpunkt $\alpha_z(t)$ zur Verfügung. — Wenn wir die Drosselklappe mehr öffnen, erhält der Motor pro Zylinder mehr Frischgas und kann damit ein höheres Drehmoment erzeugen. Die Einspritzmenge sollte so gesteuert werden, dass das Gemisch jederzeit stöchiometrisch ist, entsprechend $\lambda(t) \equiv 1$. Durch Anfeuchten des Gemisches ($F_\lambda(t) > 1$, $\lambda(t) < 1$) wird das Drehmoment erhöht. Der Zündzeitpunkt sollte stets so gewählt werden, dass der Wirkungsgrad des Motors maximal ist. Eine Verstellung des Zündzeitpunkts nach früh erhöht das Motordrehmoment.

Als Test für die Tauglichkeit des Reglers werden wir das Lastdrehmoment der Bremse bei stationärem Betrieb des Motors bei tiefer Drehzahl und niedriger Last sprunghaft um 20 Nm erhöhen. — Bei diesem Lastsprung würde der unregelte Motor ausgehen.

Betriebspunkt für den Reglerentwurf:

Drosselklappenstellung	$\alpha_{DK} = 10.3 \text{ Grad}$
Saugrohrdruck	$p_s = 0.48 \text{ bar}$
Motordrehzahl	$n = 860 \text{ U/min}$
Lambda-Messwert	$\lambda = 1.000$
Relativer Wandfilminhalt	$\nu = 1$
Lastdrehmoment	$M_L = 16 \text{ Nm}$

Eingangs-, Stör-, Zustands- und Ausgangssignale des Modells:

$U_1(t)$ = Sollsignal für die Drosselklappenstellung [Grad]

$U_2(t)$ = relative Einspritzmenge [-]

$U_3(t)$ = Zündzeitpunkt [Grad KW]

$M_L(t)$ = Lastdrehmoment [Nm]

$X_1(t)$ = Drosselklappenstellung [Grad]

$X_2(t)$ = Saugrohrdruck [bar]

$X_3(t)$ = Motordrehzahl [U/min]

$X_4(t)$ = λ -Information der Lambda-Sonde [-]

$X_5(t)$ = Relativer Wandfilminhalt [-]

$Y_1(t)$ = Motordrehzahl [U/min]

$Y_2(t)$ = λ -Messwert [-]

Anmerkung: Im linearisierten Modell sind diese Signale die Abweichungen der entsprechenden Signale des nichtlinearen Systems von den obengenannten Betriebspunktwerten bzw. von den nominalen stationären Kennfeldwerten für die Einspritzung und die Zündung.

Linearisiertes Modell (ohne Totzeiten, nicht skaliert):

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= A_{pu}X(t) + B_{pu}U(t) + B_{dpu}M_L(t) \\ Y(t) &= C_{pu}X(t)\end{aligned}$$

mit den (unskalierten) Systemmatrizen

$$A_{pu} = \begin{bmatrix} -40.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1683 & -2.9471 & -0.0016 & 0 & 0 \\ 26.6088 & 920.3932 & -0.1756 & 0 & 259.1700 \\ -0.5852 & 14.1941 & 0.0061 & -5.7000 & -5.7000 \\ 0.6600 & -1.1732 & -0.0052 & 0 & -15.0000 \end{bmatrix}$$

$$B_{pu} = \begin{bmatrix} 40.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 181.4190 & 1.5646 \\ 0 & -3.9900 & 0 \\ 0 & 4.5000 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{dpu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -15.9000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{pu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Die physikalischen Einheiten der einzelnen Matrizenelemente ergeben sich aus denjenigen der involvierten Signale.

Für die Skalierung der Signale sind die folgenden Bezugswerte sinnvoll:

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= \bar{X}_1 = 1 \text{ Grad} \\ \bar{U}_2 &= \bar{X}_4 = \bar{X}_5 = \bar{Y}_2 = 0.05 \\ \bar{U}_3 &= 1.6 \text{ Grad KW} \\ \bar{M}_L &= 20 \text{ Nm} \\ \bar{X}_2 &= 0.05 \text{ bar} \\ \bar{X}_3 &= \bar{Y}_1 = 200 \text{ U/min} .\end{aligned}$$

Für die dimensionslosen skalierten Signale

$$\begin{aligned}x_i(t) &= X_i(t)/\bar{X}_i(t) & i = 1, \dots, n \\ u_i(t) &= U_i(t)/\bar{U}_i & i = 1, \dots, m \\ d(t) &= M_L(t)/\bar{M}_L \\ y_i(t) &= Y_i(t)/\bar{Y}_i(t) & i = 1, \dots, p\end{aligned}$$

gilt das skalierte Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_p x(t) + B_p u(t) + B_{dp} d(t) \\ y(t) &= C_p x(t)\end{aligned}$$

mit den transformierten Matrizen

$$\begin{aligned}A_p &= \begin{bmatrix} -40.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3.3659 & -2.9471 & -6.5157 & 0 & 0 \\ 0.1330 & 0.2301 & -0.1756 & 0 & 0.0648 \\ -11.7043 & 14.1941 & 24.3930 & -5.7000 & -5.7000 \\ 13.2003 & -1.1732 & -20.9844 & 0 & -15.0000 \end{bmatrix} \\ B_p &= \begin{bmatrix} 40.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0454 & 0.0125 \\ 0 & -3.9900 & 0 \\ 0 & 4.5000 & 0 \end{bmatrix} & B_{dp} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.5900 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_p &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .\end{aligned}$$

Für den Entwurf des robusten Mehrgrößen-Motorreglers legen wir die folgenden *Spezifikationen* fest:

- Wir haben die Totzeiten im Motor aufgrund seiner getakteten Arbeitsweise im Modell vernachlässigt. Da die Totzeit von der Ausgabe des Einspritzbefehls bis zum Erfassen des Abgases in der Lambda-Sonde in diesem Betriebspunkt beträchtlich ist (vgl. Bild 4.12), bescheiden wir uns mit der Forderung $\omega_c \approx 1 \text{ rad/s}$.

- Verschwindender stationärer Nachlauffehler der Motordrehzahl.
- Verschwindender stationärer Nachlauffehler von λ .
- Stationär verschwindende Zündzeitpunkt Korrektur.
- Robustheit wie üblich.

Für den stationären Fall wird gefordert, dass keine Nachlauffehler der Drehzahl oder des Lambda-Werts auftreten und dass eine allfällige dynamische Zündzeitpunkt Korrektur wieder verschwindet.

Dies wird strukturell durch die *Erweiterung der Regelstrecke* mit je einem PI-Element für die Stellgrößen Drosselklappenstellung und relative Einspritzmenge erreicht.

Für die beiden PI-Elemente mit den Übertragungsfunktionen

$$K_{P,i} + \frac{K_{I,i}}{s}$$

wählen wir je die identischen Verstärkungen

$$\begin{aligned} K_{P,1} &= K_{P,2} = 1 \\ K_{I,1} &= K_{I,2} = 3 [\text{sec}^{-1}] . \end{aligned}$$

Die Singularwertverläufe der (skalierten) Regelstrecke und der erweiterten Regelstrecke sind im Bild 4.11 oben links geplottet.

Beim *Loop-Shaping* wählen wir die folgenden Werte für die Parameter des LG-Filters:

$$\begin{aligned} \beta &= 2 \\ B_\xi &= B \\ \mu &= 10 . \end{aligned}$$

Beim *Loop-Transfer-Recovery* gehen wir etwas weiter, als dies die übliche -3 dB-Vorgabe für die Kreisverstärkungs-Differenz suggeriert, um noch mehr Robustheit gegenüber den nicht-modellierten Totzeiten zu erhalten. Wir wählen deshalb die folgenden Werte für die Parameter des LG-Reglers:

$$\begin{aligned} Q_y &= I_2 \\ R_1 &= I_3 \\ \rho &= 10^{-5} . \end{aligned}$$

Die Singularwertverläufe der Kreisverstärkungs-Matrix $L_e(j\omega)$, der Kreisverstärkungsdifferenz-Matrix $D_e(j\omega)$ und der komplementären Empfindlichkeits-Matrix $T_e(j\omega)$ sind ebenfalls im Bild 4.11 dargestellt.

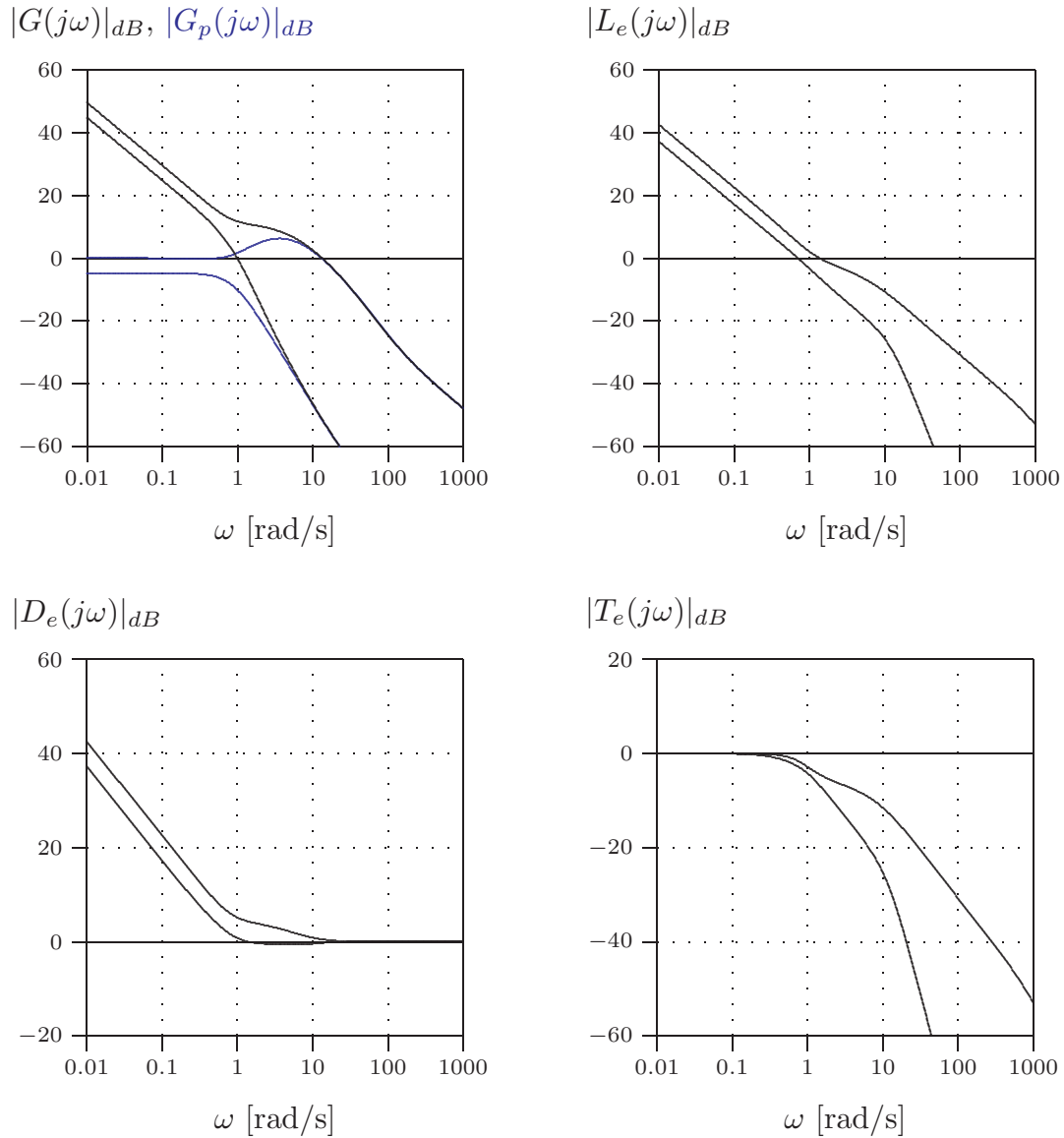
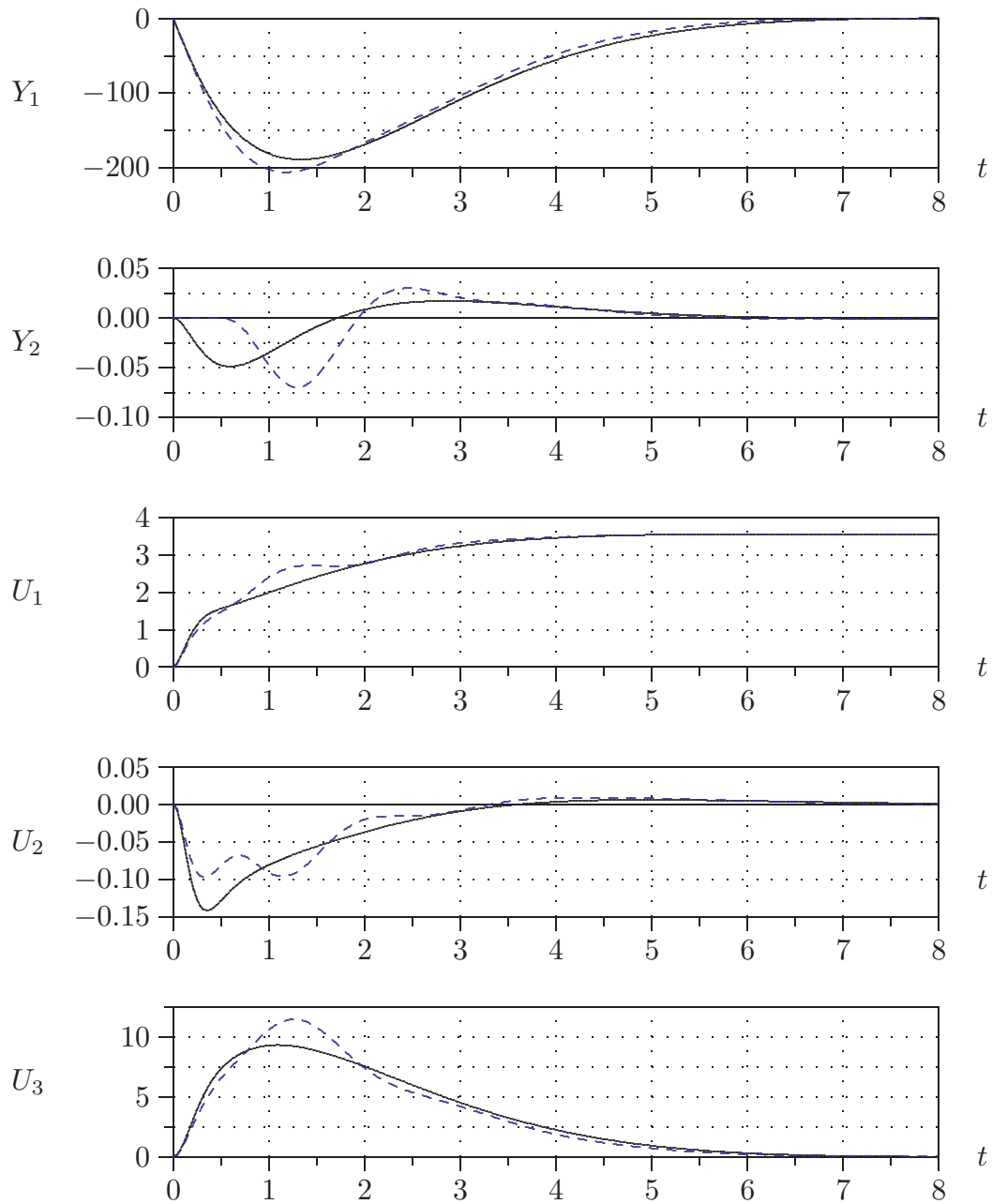


Bild 4.11: Singularwertverläufe der skalierten Regelstrecke, der erweiterten Regelstrecke und des robusten MIMO-Regelsystems. $D_{\min} = -0.6\text{dB}$.

Unsere obigen Spezifikationen sind erfüllt. — Allenfalls kann man beanstanden, dass der maximale Singularwert von $T_e(j\omega)$ im nahen Sperrband zu langsam abfällt. Dies könnte z.B. durch eine ausgeklügeltere Wahl der Matrix B_ξ korrigiert werden.

Im Bild 4.12 sind schliesslich die simulierten Antworten des Ottomotors auf einen Drehmoment-Lastsprung von 20Nm für den zeitkontinuierlichen Fall (—) und den digital geregelten Fall (- - -) unter Berücksichtigung der Totzeiten dieses Viertakt-Motors und der damaligen Implementation seiner digitalen Regelung dargestellt.



*Bild 4.12: Robuste Drehzahl-Lambda-Regelung eines Ottomotors:
 Antwort auf einen Drehmoment-Lastsprung von 20Nm:
 t : Zeit von 0 bis 8 Sekunden,
 Y_1 : Drehzahlabfall von 200 bis 0 U/min,
 Y_2 : Signal der Lambda-Sonde von 10% fett bis 5% mager,
 U_1 : Drosselklappe von 0 bis 4 Grad weiter öffnen,
 U_2 : Einspritzfaktor von 15% weniger bis 5% mehr einspritzen,
 U_3 : Zündzeitpunkt von 0 bis 12.5 Grad KW nach früh verstellen.*

Anhang 1:

Gleichungen für lineare MIMO-Systeme

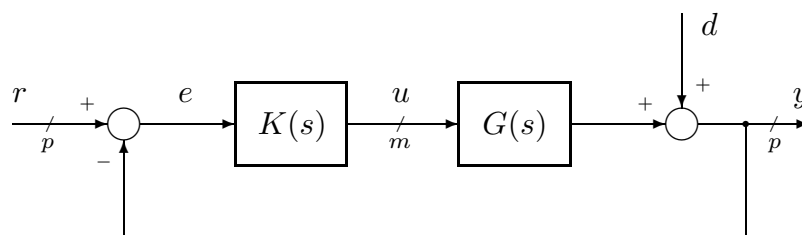


Bild A1.1: Signalflussbild des Regelsystems mit Führungsgrösse r , Stellgrösse u , “worst case” Störgrösse d und Ausgangssignal y .

1 Gleichungen des Regelsystems

Für “loop breaking point” bei e :

$$y(s) = G(s)K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1}r(s) + [I + G(s)K(s)]^{-1}d(s)$$

Für “loop breaking point” bei u :

$$y(s) = G(s)[I + K(s)G(s)]^{-1}K(s)r(s) + [I - G(s)[I + K(s)G(s)]^{-1}K(s)]d(s)$$

Für “loop breaking point” bei y :

$$y(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1}G(s)K(s)r(s) + [I + G(s)K(s)]^{-1}d(s)$$

2 Herleitungen

Die Systemgleichungen bezogen auf den “loop breaking point” bei e lauten:

$$\begin{aligned} e &= r - GKe - d \\ y &= GKe + d \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir die Regelabweichung

$$e = [I + GK]^{-1}(r - d) \quad .$$

Diese setzen wir in die zweite Gleichung ein:

$$\begin{aligned} y &= GKe + d \\ &= GK[I + GK]^{-1}(r - d) + d \\ &= GK[I + GK]^{-1}r - GK[I + GK]^{-1}d + [I + GK][I + GK]^{-1}d \\ &= GK[I + GK]^{-1}r + [I + GK]^{-1}d \quad . \end{aligned}$$

Die Systemgleichungen bezogen auf den “loop breaking point” bei u lauten:

$$\begin{aligned} u &= K(r - d) - KG u \\ y &= Gu + d \quad . \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung erhalten wir die Stellgrösse

$$u = [I + KG]^{-1}K(r - d) \quad .$$

Diese setzen wir in die zweite Gleichung ein:

$$\begin{aligned} y &= Gu + d \\ &= G[I + KG]^{-1}K(r - d) + d \\ &= G[I + KG]^{-1}Kr + [I - G[I + KG]^{-1}K]d \quad . \end{aligned}$$

Die Systemgleichung bezogen auf den “loop breaking point” bei y lautet:

$$y = GKr - GK y + d \quad .$$

Wir lösen nach y auf und erhalten:

$$y = [I + GK]^{-1}GKr + [I + GK]^{-1}d \quad .$$

3 Bezeichnungen

Kreisverstärkungsmatrizen (*loop gain*):

$$\begin{aligned} L_e(s) &= G(s)K(s) \\ L_u(s) &= K(s)G(s) \end{aligned}$$

Kreisverstärkungsdifferenzmatrizen (*return difference*):

$$\begin{aligned} D_e(s) &= I + L_e(s) = I + G(s)K(s) \\ D_u(s) &= I + L_u(s) = I + K(s)G(s) \end{aligned}$$

Für ein System n -ter Ordnung sind die Kreisverstärkungsdifferenzmatrizen $D_e(s) \in C^{p \times p}$ und $D_u(s) \in C^{m \times m}$ für alle $s \in C$ invertierbar, ausser für die n Pole s_1, \dots, s_n , d.h.

$$\det(D(s)) \begin{cases} = 0 & \text{für } s \in \{s_1, \dots, s_n\} \\ \neq 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Empfindlichkeitsmatrizen (*sensitivity*):

$$\begin{aligned} S_e(s) &= D_e^{-1}(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1} \\ S_u(s) &= D_u^{-1}(s) = [I + K(s)G(s)]^{-1} \end{aligned}$$

Komplementäre Empfindlichkeitsmatrizen (*complementary sensitivity*):

$$\begin{aligned} T_e(s) &= G(s)K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1} \\ &= G(s)[I + K(s)G(s)]^{-1}K(s) \\ &= [I + G(s)K(s)]^{-1}G(s)K(s) \\ T_u(s) &= K(s)G(s)[I + K(s)G(s)]^{-1} \\ &= K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1}G(s) \\ &= [I + K(s)G(s)]^{-1}K(s)G(s) \end{aligned}$$

Serie-Kompensator (*open-loop compensator*) für $T_e(s) = G(s)R(s)$ und $T_u(s) = R(s)G(s)$:

$$\begin{aligned} R(s) &= K(s)[I + G(s)K(s)]^{-1} = K(s)S_e(s) \\ &= [I + K(s)G(s)]^{-1}K(s) = S_u(s)K(s) \end{aligned}$$

4 Fundamentaler Zusammenhang

$$\begin{aligned} T_e(s) + S_e(s) &= I_p \\ T_u(s) + S_u(s) &= I_m \end{aligned}$$

Anhang 2:

Singularwerte einer Matrix

Die Singularwerte einer reellen oder komplexen, quadratischen oder rechteckigen Matrix sind die Verallgemeinerung des Betrages einer reellen oder komplexen Zahl.

Die Singularwertverläufe einer komplexen Frequenzgangs-Matrix sind die Verallgemeinerung des Amplitudengangs eines komplexen Frequenzgangs.

Die Singularwerte einer Matrix werden im Abschnitt 4.1 definiert und im Abschnitt 4.2 geometrisch interpretiert.

Die meisten der im Abschnitt 4.4 aufgeführten Eigenschaften der Singularwerte einer Matrix lassen sich mit Hilfe der geometrischen Interpretation herleiten. Sie lassen sich aber auch rein analytisch herleiten, wobei insbesondere die im Abschnitt 4.3 definierte Singularwertzerlegung einer Matrix nützlich ist.

1 Notation

Komplexe Vektoren:

$$u \in C^q \quad w \in C^p \quad x, z \in C^r$$

Komplexe Matrizen:

$$\begin{array}{ll} M \in C^{r \times r} & \text{quadratische Matrix} \\ N \in C^{p \times q} & \text{Rechteck-Matrix} \end{array}$$

Konjugierte Vektoren und Matrizen:

$$u^*, \dots, M^*, N^* \quad (\text{Imaginärteile negiert})$$

Konjugiert-transponierte Vektoren und Matrizen:

$$\begin{array}{ll} u^H = (u^*)^T, \dots & (\text{Zeilenvektoren}) \\ M^H = (M^*)^T \in C^{r \times r} & \\ N^H = (N^*)^T \in C^{q \times p} & \end{array}$$

2 Normen

Vektoren:

$$\|u\| = \|u\|_2 = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + \dots + |u_q|^2} = \sqrt{u^H u}$$

Matrizen:

$$\begin{aligned} \|N\|_2^2 &= \max_{\substack{u \in C^q \\ u \neq 0}} \frac{(Nu)^H (Nu)}{u^H u} = \max_{\substack{u \in C^q \\ u \neq 0}} \frac{u^H N^H N u}{u^H u} = \lambda_{max}(N^H N) \\ &= \text{grösster Eigenwert der Hermiteschen Matrix } N^H N \\ \|N\| &= \|N\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(N^H N)} \end{aligned}$$

3 Eigenwerte, Eigenvektoren

Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ und Eigenvektoren z_1, \dots, z_r der Matrix M :

$$\begin{aligned} M z_i &= \lambda_i z_i & (i = 1, \dots, r) \\ [\lambda_i I - M] z_i &= 0 & (i = 1, \dots, r) \end{aligned}$$

Wichtigste Fakten:

- M regulär $\iff |\lambda_i| \neq 0$ für $i = 1, \dots, r$
- $\text{Rang}(M) = \text{Anzahl nicht verschwindender Eigenwerte}$
- M singulär $\iff \text{Rang}(M) < r \iff$ mindestens ein Eigenwert verschwindet
- Hermitesche Matrix, $M^H = M$: alle Eigenwerte sind reell.
- Orthogonale Matrix, $M^H = M^{-1}$: alle Eigenwerte haben Betrag eins.

4 Singularwerte

4.1 Definition

Bezeichnung: $N \in C^{p \times q}$; $k = \min(p, q)$

Definition: Die Singularwerte $\sigma_i(N)$, $i = 1, \dots, k$, der Matrix N sind die positiven Quadratwurzeln der k grössten Eigenwerte $\lambda_i(N^H N)$ der Hermiteschen Matrix $N^H N$,

$$\sigma_i(N) = \sqrt{\lambda_i(N^H N)} \quad i = 1, \dots, k .$$

Üblicherweise werden die Singularwerte geordnet, so dass $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$. Meistens interessieren wir uns nur für den grössten und den kleinsten Singularwert und bezeichnen sie mit

$$\bar{\sigma}(M) = \sigma_{\max}(M) = \|M\| \quad \text{bzw.} \quad \underline{\sigma}(M) = \sigma_{\min}(M) .$$

Aus der Definition folgen sofort die folgenden Zusammenhänge:

- a) Die Anzahl der positiven Singularwerte entspricht dem Rang von N . Die übrigen Singularwerte verschwinden.

Für eine quadratische Matrix $M \in C^{r \times r}$:

- b) M regulär $\iff \sigma_i > 0$ für $i = 1, \dots, r$

4.2 Geometrische Deutung

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$w = Nu \quad (N \in C^{p \times q}, u \in C^q, w \in C^p)$$

vom q -dimensionalen komplexen Vektorraum in den p -dimensionalen komplexen Vektorraum. Als richtungsabhängigen Streckungsfaktor definieren wir

$$s(u) = \frac{\|w\|}{\|u\|} = \frac{\|Nu\|}{\|u\|} .$$

Zusammenhänge zwischen dem Streckungsfaktor s und den Singularwerten σ_i der Matrix N :

$$\begin{aligned} s^2(u) &= \frac{\|Nu\|^2}{\|u\|^2} = \frac{u^H N^H N u}{u^H u} \\ s_{\max}^2 &= \lambda_{\max}(N^H N) \\ s_{\min}^2 &= \lambda_{\min}(N^H N) \\ s_{\max} &= \bar{\sigma}(N) = \|N\| \\ s_{\min} &= \underline{\sigma}(N) \quad (= 0, \text{ wenn } \text{Rang}(N) < q) \end{aligned}$$

$s(u) = \sigma_i(N)$, wenn u ein Eigenvektor der Hermiteschen Matrix $N^H N$ ist, welcher zum Eigenwert $\lambda_i = \sigma_i^2$ gehört.

Aus dieser geometrischen Deutung ist klar ersichtlich, dass die Singularwerte der Matrix N von der Skalierung aller Komponenten des Input-Vektors u und des Ausgangs-Vektors w sind. Eine Skalierung ist im allgemeinen dann gut, wenn die Singularwerte "nahe" beieinander liegen (siehe Anhang 3).

4.3 Singularwertzerlegung

Für eine Singularwertzerlegung (U, Σ, V) der komplexen $p \times q$ Matrix N gilt:

$$\begin{aligned}
 N &= U\Sigma V^H && \text{mit} \\
 U &\in \mathbb{C}^{p \times p} && \text{orthogonal} \\
 V &\in \mathbb{C}^{q \times q} && \text{orthogonal} \\
 \Sigma &\in \mathbb{R}^{p \times q} && \text{“Diagonalmatrix” mit den Singularwerten} \\
 &&& \text{auf der Hauptdiagonalen.}
 \end{aligned}$$

Die Matrizen U , V und Σ haben die folgende Struktur:

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_p \\ | & & | \end{bmatrix} && \text{normierte Eigenvektoren von } NN^H \\
 V &= \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_q \\ | & & | \end{bmatrix} && \text{normierte Eigenvektoren von } N^H N \\
 \Sigma &= \begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_q \\ \cdots & & \\ & & 0 \end{bmatrix} && \text{für } p > q \\ \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 & \vdots \\ & \ddots & & \\ 0 & & \sigma_p & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix} && \text{für } p < q \end{cases}
 \end{aligned}$$

Die Indizes der Eigenvektoren u_i und v_i und der Singularwerte $\sigma_i(N)$ werden normalerweise entsprechend abnehmender Reihenfolge der Singularwerte geordnet.

4.4 Wichtigste Eigenschaften

Für beliebige Rechteckmatrizen (passender Dimensionen):

$$\sigma_i(N) = \sigma_i(N^H) \quad \text{für } i = 1, \dots, \min(p, q) \quad (1)$$

$$\bar{\sigma}(N_1 N_2) \leq \bar{\sigma}(N_1) \bar{\sigma}(N_2) \quad (2)$$

$$\underline{\sigma}(N_1 N_2) \geq \underline{\sigma}(N_1) \underline{\sigma}(N_2) \quad (3)$$

$$\bar{\sigma}(N_1 + N_2) \leq \bar{\sigma}(N_1) + \bar{\sigma}(N_2) \quad (4)$$

$$\bar{\sigma}(N_1 + N_2) \geq |\bar{\sigma}(N_1) - \bar{\sigma}(N_2)| \quad (5)$$

$$\underline{\sigma}(N_1 + N_2) \geq \begin{cases} \underline{\sigma}(N_1) - \bar{\sigma}(N_2) \\ \underline{\sigma}(N_2) - \bar{\sigma}(N_1) \\ 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\max\{\bar{\sigma}(N_1), \bar{\sigma}(N_2)\} \leq \bar{\sigma}([N_1, N_2]) \leq \sqrt{2} \max\{\bar{\sigma}(N_1), \bar{\sigma}(N_2)\} \quad (7)$$

Für quadratische Matrizen:

$$\bar{\sigma}(M) - 1 \leq \bar{\sigma}(I + M) \leq \bar{\sigma}(M) + 1 \quad (8)$$

$$\underline{\sigma}(M) - 1 \leq \underline{\sigma}(I + M) \leq \underline{\sigma}(M) + 1 \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}(M_1) < \underline{\sigma}(M_2) \Rightarrow \underline{\sigma}(M_1 + M_2) > 0 \quad (10)$$

$$\bar{\sigma}(M) < 1 \Rightarrow \underline{\sigma}(I + M) \geq 1 - \bar{\sigma}(M) \quad (11)$$

Für quadratische, invertierbare Matrizen:

$$\bar{\sigma}(M^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(M)} \quad (12)$$

$$\underline{\sigma}(M^{-1}) = \frac{1}{\bar{\sigma}(M)} \quad (13)$$

$$(I + M)^{-1} + (I + M^{-1})^{-1} = I \quad (14)$$

$$\underline{\sigma}^{-1}(I + M) + \underline{\sigma}^{-1}(I + M^{-1}) \geq 1 \quad (15)$$

$$\underline{\sigma}^{-1}(I + M) + 1 \geq \underline{\sigma}^{-1}(I + M^{-1}) \quad (16)$$

$$\underline{\sigma}^{-1}(I + M^{-1}) + 1 \geq \underline{\sigma}^{-1}(I + M) \quad (17)$$

$$\underline{\sigma}(M) \leq \frac{\underline{\sigma}(I + M)}{\underline{\sigma}(I + M^{-1})} \leq \bar{\sigma}(M) \quad (18)$$

Anhang 3:

Skalierung von Zustandsraum-Modellen

1 Skalierung der Signale

Physikalisches Modell:

$$\dot{X}(t) = \mathcal{A}X(t) + \mathcal{B}U(t)$$

$$Y(t) = \mathcal{C}X(t) + \mathcal{D}U(t)$$

$$X(t) \in R^n$$

$$U(t) \in R^m$$

$$Y(t) \in R^p$$

Bezugswerte (“Einheiten”):

$$\text{Zustandsvariable } \bar{X}_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\text{Steuergrösse } \bar{U}_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$\text{Ausgangsgrösse } \bar{Y}_i \quad (i = 1, \dots, p)$$

Skalierte, dimensionslose Signale:

$$\text{Zustandsvariable } x_i = \frac{X_i}{\bar{X}_i}$$

$$\text{Steuergrösse } u_i = \frac{U_i}{\bar{U}_i}$$

$$\text{Ausgangsgrösse } y_i = \frac{Y_i}{\bar{Y}_i}$$

Transformationsmatrizen:

$$T_x = \text{diag}(\overline{X}_i) = \begin{bmatrix} \overline{X}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{X}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \overline{X}_n \end{bmatrix} \in R^{n \times n}$$

$$T_u = \text{diag}(\overline{U}_i) \in R^{m \times m}$$

$$T_y = \text{diag}(\overline{Y}_i) \in R^{p \times p}$$

Skaliertes Modell:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ &= T_x^{-1} \mathcal{A} T_x x(t) + T_x^{-1} \mathcal{B} T_u u(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ &= T_y^{-1} \mathcal{C} T_x x(t) + T_y^{-1} \mathcal{D} T_u u(t) \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Alle Elemente der Matrizen A und B haben die physikalische Einheit $\frac{1}{\text{sec}}$. Alle Elemente der Matrizen C und D sind dimensionslos.
- Die Diagonalelemente und die Eigenwerte der Matrizen A und \mathcal{A} sind identisch.
- Im allgemeinen ist die Matrix A besser konditioniert als die Matrix \mathcal{A} .
- Im allgemeinen liegen die Singularwertverläufe des skalierten Streckenmodells $G(j\omega) = C[sI - A]^{-1}B + D = T_y^{-1} \mathcal{G}(j\omega) T_u$ näher beieinander als diejenigen des unskalierten Streckenmodells $\mathcal{G}(j\omega) = \mathcal{C}[sI - \mathcal{A}]^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$.
- Bei Verwendung eines skalierten Streckenmodells ist es leichter zu beurteilen, ob ein Signalwert "gross" oder "klein" ist. Beispiel: $x_i(t) > 1$ entspricht $X_i(t) > \overline{X}_i$.
- Die physikalische Ausgangsgrösse $Y_i(t)$ und die entsprechende Führungsgrösse $R_i(t)$ werden mit dem gleichen Bezugswert \overline{Y}_i skaliert.
- Bei Verwendung eines skalierten Streckenmodells ist es leichter zu beurteilen, ob ein gewisses Matrixelement "gross" oder "klein" ist, d.h. einen "wesentlichen" oder "unwesentlichen" Einfluss hat. Dies trifft sowohl für die Systemmatrizen A , B , C und D der Strecke, als auch für die Systemmatrizen A_c , B_c , C_c und D_c des Kompensators zu (siehe unten).

2 Rückskalierung des Kompensators

Skalierter, modellbasierter Kompensator:

Aufgrund eines skalierten Modells der (allenfalls erweiterten) Regelstrecke wird ein (skalierter) Kompensator mit der Übertragungsmatrix $K(s)$ und den Systemmatrizen A_c , B_c , C_c und D_c entwickelt. Seine Gleichungen lauten:

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + B_c e(t)$$

$$u(t) = C_c z(t) + D_c e(t)$$

$$u(s) = K(s)e(s) = \{C_c[sI - A_c]^{-1}B_c + D_c\} e(s) .$$

Physikalisch zu realisierender Kompensator:

$$E(t) = R(t) - Y(t)$$

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + B_c T_y^{-1} E(t)$$

$$U(t) = T_u C_c z(t) + T_u D_c T_y^{-1} E(t)$$

$$U(s) = \mathcal{K}(s)E(s)$$

$$= T_u K(s) T_y^{-1} E(s)$$

$$= T_u \{C_c[sI - A_c]^{-1}B_c + D_c\} T_y^{-1} E(s) .$$

3 Skalierung der Zeit und der Kreisfrequenz

Wenn wir z.B. die Dynamik der Welt¹ von heute bis zum Weltuntergang modellieren und simulieren wollen, ist es vermutlich vernünftiger, als Einheit der Zeit ein Jahrhundert [Jh] zu verwenden anstelle von Sekunden [sec].

Wenn wir ein vorliegendes Zustandsraum-Modell mit der Zeit t (z.B.) in [sec] in ein Zustandsraum-Modell mit der Zeit t' (z.B.) in [Jh] umskalieren wollen, gelten die folgenden Korrespondenzen:

Umrechnungskonstante für die Zeiteinheiten:

$$\tau = 3155692700 \text{ [sec/Jh]}$$

¹ à la J. W. Forrester, D. Meadows, Club of Rome, ...

Zeiten:

$$t \text{ [sec]} \longrightarrow t' = \frac{t}{\tau} \text{ [Jh]}$$

Frequenzen:

$$\omega \text{ [rad/sec]} \longrightarrow \omega' = \tau\omega \text{ [rad/Jh]}$$

$$s \text{ [rad/sec]} \longrightarrow s' = \tau\omega \text{ [rad/Jh]}$$

Signale:

$$u(t) \longrightarrow u(t')$$

$$x(t) \longrightarrow x(t')$$

$$y(t) \longrightarrow y(t')$$

Ableitungen nach der Zeit:

$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow \frac{dx(t')}{dt'} = \frac{dx(t')}{dt} \frac{dt}{dt'} = \tau \frac{dx(t')}{dt}$$

Das neue Zustandsraum-Modell

$$\frac{dx(t')}{dt'} = A'x(t') + B'u(t')$$

$$y(t') = C'x(t') + D'u(t')$$

$$G'(s') = C'[s'I' - A']^{-1}B' + D'$$

hat somit die Systemmatrizen

$$A' = \tau A$$

$$B' = \tau B$$

$$C' = C$$

$$D' = D \text{ .}$$

Anhang 4:

Qualitativer Einfluss der Pol-Nullstellen-Konstellation auf die Sprungantwort

System: Wir betrachten ein lineares, zeitinvariantes, asymptotisch stabiles System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$, welche n einfache reelle Pole $p_n < p_{n-1} < \dots < p_2 < p_1 < 0$ und m reelle Nullstellen $z_m \leq z_{m-1} \leq \dots \leq z_1$ ($m < n$) und einen nicht verschwindenden statischen Übertragungsfaktor hat, d.h. $G(0) \neq 0$.

Frage: Welchen qualitativen Einfluss haben die Nullstellen und die Konstellation der Lage der Pole und der Nullstellen auf das transiente Verhalten der Sprungantwort des Systems? (Anzahl lokaler Extrema, “undershoots”, “overshoots”, Monotonie der Sprungantwort.)

Bezeichnungen:

m_1 = Anzahl Nullstellen z_i mit positivem Realteil, $z_i > 0$
(“Nichtminimalphasen”-Nullstellen)

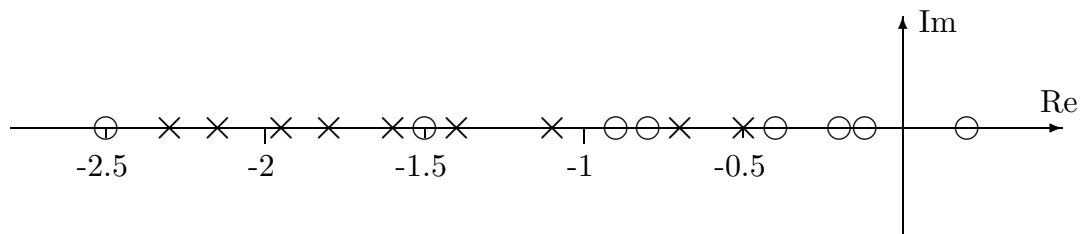
m_2 = Anzahl Nullstellen zwischen p_1 und 0, $p_1 < z_i < 0$

m_3 = Anzahl Nullstellen z_i zwischen p_n und p_1 , $p_n < z_i < p_1$

m_4 = Anzahl Nullstellen z_i links von p_n , $z_i < p_n$

Somit: $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$

p = Anzahl Intervalle zwischen zwei benachbarten Polen, in welchen eine *ungerade* Anzahl von Nullstellen liegen



Beispiel: $n = 9$, $m = 8$, $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $m_3 = 3$, $m_4 = 1$, $p = 1$;
Pole: $-0.5 / -0.7 / -1.1 / -1.4 / -1.6 / -1.8 / -1.95 / -2.15 / -2.3$;
Nullstellen: $+0.2 / -0.12 / -0.2 / -0.4 / -0.8 / -0.9 / -1.5 / -2.5$;
Statischer Übertragungsfaktor: $G(0) = 1$.

Resultate:**Anzahl η_e der lokalen Extrema:**

untere Schranke: $\eta_e \geq m_1 + m_2$

obere Schranke: $\eta_e \leq m_1 + m_2 + m_3 - p$

mögliche Werte: $\eta_e = m_1 + m_2 + 2\ell$ mit $\ell = 0, 1, \dots, \frac{m_3 - p}{2}$

Im Beispiel: $\eta_e = 4$ oder 6 (effektiv: 4)

Anzahl η_u der “undershoots”:

$$\eta_u \geq \left\lfloor \frac{m_1 + 1}{2} \right\rfloor$$

Für m_1 ungerade: Die Sprungantwort bewegt sich am Anfang in die “falsche” Richtung. Das erste Extremum ist ein “undershoot”.

Für m_1 gerade: Die Sprungantwort bewegt sich am Anfang in die “richtige” Richtung. Das erste Extremum ist kein “undershoot”.

Im Beispiel: $\eta_u \geq 1$; erstes Extremum ein “undershoot”; (effektiv: $\eta_u = 2$).

Anzahl η_o der “overshoots”:

$$\eta_o \geq \left\lfloor \frac{m_2 + 1}{2} \right\rfloor$$

Für m_2 ungerade: Das letzte Extremum ist ein “overshoot”.

Für m_2 gerade: Das letzte Extremum ist kein “overshoot”.

Im Beispiel: $\eta_o \geq 2$; letztes Extremum ein “overshoot”; (effektiv: $\eta_o = 2$).

Hinreichende Bedingungen für eine monotone Sprungantwort:

a) $m = 0$

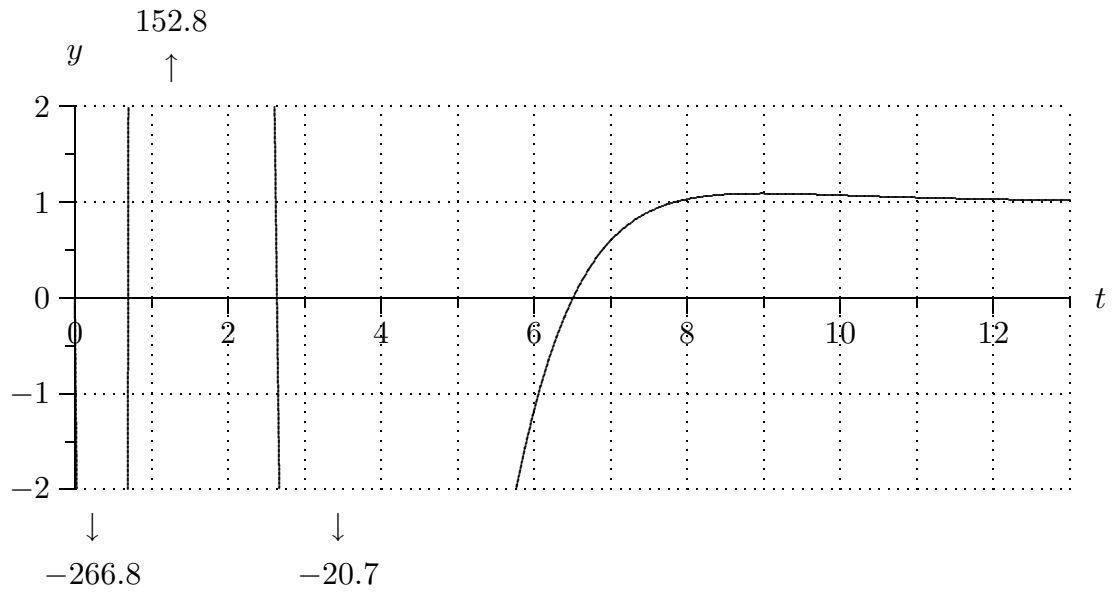
b) $m_1 = m_2 = 0$

c) $z_i < p_i$ für $i = 1, \dots, m$

d) $\sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} > \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$

Im Beispiel: Keine der Bedingungen erfüllt.

Das nachfolgende Bild zeigt die Einheitssprungantwort dieses lustigen Systems.



Literaturangabe:

M. El-Khoury, *Influence des zéros d'une fonction de transfert sur le comportement dynamique d'un système linéaire et application au réglage polynomial*, Dissertation Nr. 981, ETHL, Ecublens, Dezember 1991.

Anhang 5:

Balancierung und Ordnungs-Reduktion

In diesem Anhang befassen wir uns generell mit der folgenden Problemstellung:
Gegeben sei ein zeitinvariantes, asymptotisch stabiles System mit dem folgenden Zustandsraummodell:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= Az(t) + Be(t) & z(t) &\in R^n, e(t) \in R^p \\ u(t) &= Cz(t) + De(t) & u(t) &\in R^m\end{aligned}$$

und der Übertragungsmatrix

$$K(s) = C[sI - A]^{-1}B + D .$$

Gesucht wird ein Zustandsraummodell niedrigerer Ordnung, das “im Wesentlichen” die gleiche Übertragungsmatrix hat wie das gegebene System.

Es werden Pole eliminiert, die fast nicht steuerbar und/oder fast nicht beobachtbar sind. Dabei werden die übrigen Pole verschoben. Als Nebenprodukt fallen balancierte Zustandsraummodelle an (bessere Konditionierung).

Anmerkung: Die Wahl der Symbole z , e , u , p , m und K deutet darauf hin, dass wir hier vor allem das Problem der Ordnungsreduktion für einen Regler¹ betrachten.

1 Grundlagen

Steuerbarkeitsmatrix:

$$W_c = \lim_{t_1 \rightarrow \infty} \int_0^{t_1} \Phi(t_1, t) B B^T \Phi^T(t_1, t) dt$$

Beobachtbarkeitsmatrix:

$$W_o = \int_0^{\infty} \Phi^T(t, 0) C^T C \Phi(t, 0) dt$$

¹ insbesondere den Entwurfs-Regler von Kap. 4.1.2

mit

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$$

Die Steuerbarkeitsmatrix W_c ist positiv-definit, wenn das System vollständig steuerbar ist; andernfalls ist sie positiv-semidefinit, aber nicht positiv-definit. Die Beobachtbarkeitsmatrix W_o ist positiv-definit, wenn das System vollständig beobachtbar ist; andernfalls ist sie positiv-semidefinit, aber nicht positiv-definit.

Wenn A eine Stabilitätsmatrix ist, konvergieren die beiden obigen Integrale, und die Matrizen W_c und W_o können als Lösungen der beiden folgenden Lyapunov-Gleichungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} W_c A^T + A W_c + B B^T &= 0 \\ W_o A + A^T W_o + C^T C &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Die Eigenwerte des Matrizenprodukts $W_c W_o$ sind Masse für die Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit des Kompensators. Sie sind unabhängig von Koordinatentransformationen für den Zustandsvektor z !

2 Balancierung eines asymptotisch stabilen Systems minimaler Ordnung

2.1 Balancierungs-Algorithmus

Ziel des Balancierungs-Algorithmus: $W_o = W_c$ und diagonal.

Balancierungsalgorithmus nach Moore [1]:

- 1) Lyapunov-Gleichung $W_c A^T + A W_c + B B^T = 0$ lösen.
- 2) Erste Singularwertzerlegung: $W_c = U_1 \Sigma_1 U_1^T$.
- 3) Erste Koordinatentransformation:

Mit der Transformationsmatrix $T_1 = U_1 \Sigma_1^{\frac{1}{2}}$ und ihrer Inversen $T_1^{-1} = \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} U_1^T$ erhalten wir das erste transformierte System mit den Systemmatrizen:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= T_1^{-1} A T_1 & \bar{B} &= T_1^{-1} B \\ \bar{C} &= C T_1 & \bar{D} &= D \quad . \end{aligned}$$

- 4) Lyapunov-Gleichung $\bar{W}_o \bar{A} + \bar{A}^T \bar{W}_o + \bar{C}^T \bar{C} = 0$ lösen.²
- 5) Zweite Singularwertzerlegung: $\bar{W}_o = U_2 \Sigma_2 U_2^T$.

² Alternative: 4') Lyapunov-Gleichung $W_o A + A^T W_o + C^T C = 0$ lösen und $\bar{W}_o = T_1^T W_o T_1$ berechnen.

6) Zweite Koordinatentransformation:

Mit der zweiten Transformationsmatrix $T_2 = U_2 \Sigma_2^{-\frac{1}{4}}$ und ihrer Inversen $T_2^{-1} = \Sigma_2^{\frac{1}{4}} U_2^T$ erhalten wir das folgende balancierte System:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{z}}(t) &= \tilde{A}\tilde{z}(t) + \tilde{B}e(t) \\ u(t) &= \tilde{C}\tilde{z}(t) + \tilde{D}e(t)\end{aligned}$$

mit den Systemmatrizen

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= T_2^{-1} \bar{A} T_2 & \tilde{B} &= T_2^{-1} \bar{B} \\ \tilde{C} &= \bar{C} T_2 & \tilde{D} &= D\end{aligned}$$

und dem neuen Zustandsvektor

$$\tilde{z}(t) = T_2^{-1} T_1^{-1} z(t) .$$

Für die Steuerbarkeitsmatrix und die Beobachtbarkeitsmatrix des transformierten Systems gilt

$$\widetilde{W}_c = \widetilde{W}_o = \Lambda = \text{diag}(\lambda_i) .$$

Dabei sind die Singular- und Eigenwerte λ_i der transformierten Matrizen \widetilde{W}_c und \widetilde{W}_o in absteigender Reihenfolge sortiert. Ihre Quadrate, λ_i^2 , sind die Eigenwerte der Matrizenprodukte $\widetilde{W}_c \widetilde{W}_o$ und $W_c W_o$.

2.2 Herleitung des Balancierungs-Algorithmus

Für eine beliebige Koordinatentransformation mit der Transformationsmatrix T gelten allgemein die folgenden Zusammenhänge:

Zustand:

$$z \rightarrow \tilde{z} = T^{-1} z$$

Systemmatrizen:

$$A \rightarrow T^{-1} A T \quad B \rightarrow T^{-1} B \quad C \rightarrow C T$$

Transitionsmatrix:

$$\Phi(t, \tau) \rightarrow T^{-1} \Phi(t, \tau) T$$

Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrizen:

$$W_c \rightarrow T^{-1} W_c T^{-T} \quad W_o \rightarrow T^T W_o T \quad W_c W_o \rightarrow T^{-1} W_c W_o T .$$

Daraus ergeben sich im Algorithmus die folgenden Verhältnisse:

- vor der ersten Transformation:

$$W_c = U_1 \Sigma_1 U_1^T ,$$

- nach der ersten Transformation mit $T_1 = U_1 \Sigma_1^{\frac{1}{2}}$:

$$\bar{W}_c = \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} U_1^T W_c U_1 \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} = I \quad \bar{W}_o = \Sigma_1^{\frac{1}{2}} U_1^T W_o U_1 \Sigma_1^{\frac{1}{2}} = U_2 \Sigma_2 U_2^T ,$$

- nach der zweiten Transformation mit $T_2 = U_2 \Sigma_2^{-\frac{1}{4}}$:

$$\widetilde{W}_c = \Sigma_2^{\frac{1}{4}} U_2^T U_2 \Sigma_2^{\frac{1}{4}} = \Sigma_2^{\frac{1}{2}} \quad \widetilde{W}_o = \Sigma_2^{-\frac{1}{4}} U_2^T U_2 \Sigma_2 U_2^T U_2 \Sigma_2^{-\frac{1}{4}} = \Sigma_2^{\frac{1}{2}} = \widetilde{W}_c .$$

Die beiden Matrizen \widetilde{W}_c und \widetilde{W}_o sind identisch und diagonal. Ihre Diagonalelemente sind positiv und in absteigender Reihenfolge sortiert.

3 Ordnungsreduktion

Um die Ordnung des asymptotisch stabilen, balancierten Systems um N von \tilde{n} auf $\tilde{n} - N$ zu reduzieren, werden nur noch die ersten $\tilde{n} - N$ Komponenten von $\tilde{z}(t)$ berücksichtigt.

Mit den entsprechenden Vektor- und Matrizenpartitionierungen lauten die Gleichungen des balancierten Systems wie folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}(t) &= \tilde{A} \tilde{z}(t) + \tilde{B} e(t) = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{z}}_r(t) \\ \dot{\tilde{z}}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_r(t) \\ \tilde{z}_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} e(t) \\ u(t) &= \tilde{C} \tilde{z}(t) + \tilde{D} e(t) = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_r(t) \\ \tilde{z}_e(t) \end{bmatrix} + \tilde{D} e(t) . \end{aligned}$$

3.1 Matching bei der Frequenz $\omega = \infty$

Wenn wir postulieren, dass die letzten N Komponenten des Zustandsvektors \tilde{z} vernachlässigbar klein sind (quasi: $\tilde{z}_e(t) \equiv 0$), erhalten wir die folgenden Systemmatrizen des reduzierten Systems:

$$\begin{aligned} A_{\text{red}} &= \tilde{A}_{11} \\ B_{\text{red}} &= \tilde{B}_1 \\ C_{\text{red}} &= \tilde{C}_1 \\ D_{\text{red}} &= \tilde{D} = D , \end{aligned}$$

d.h. in der Matrix \tilde{A} werden die letzten N Zeilen und Kolonnen, in der Matrix \tilde{B} die letzten N Zeilen und in der Matrix \tilde{C} die letzten N Kolonnen gestrichen.

Die Feedthrough-Matrix D bleibt völlig unverändert. Dementsprechend stimmen die Frequenzgangmatrizen $K(j\omega)$ des ursprünglichen Systems und $K_{\text{red}}(j\omega)$ des reduzierten Systems bei der Frequenz $\omega = \infty$ überein.

3.2 Matching bei der Frequenz $\omega = 0$

Im allgemeinen ist es aber günstiger, eine Übereinstimmung der beiden Frequenzgangmatrizen $K(j\omega)$ des ursprünglichen Systems und $K_{\text{red}}(j\omega)$ des reduzierten Systems bei der Frequenz $\omega = 0$ zu haben (unverändertes statisches Übertragungsverhalten).

Am besten bewerkstelligen wir dies mit einer quasistatischen Betrachtung (quasi: $\tilde{z}_e = 0$). Daraus erhalten wir zunächst die quasistatische Beziehung

$$\tilde{z}_e = -\tilde{A}_{22}^{-1} (\tilde{A}_{21}\tilde{z}_r + \tilde{B}_2 e)$$

und schliesslich die folgenden Systemmatrizen des reduzierten Systems:

$$\begin{aligned} A_{\text{red}} &= \tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21} \\ B_{\text{red}} &= \tilde{B}_1 - \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2 \\ C_{\text{red}} &= \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{A}_{21} \\ D_{\text{red}} &= D - \tilde{C}_2\tilde{A}_{22}^{-1}\tilde{B}_2 \quad . \end{aligned}$$

3.3 Approximationsfehlerschranke

Bei Balancierung eines asymptotisch stabilen Systems nach Abschn. 2 gilt für das resultierende reduzierte System mit der Übertragungsmatrix $K_{\text{red}}(s) = C_{\text{red}}[sI - A_{\text{red}}]^{-1}B_{\text{red}} + D_{\text{red}}$, bei beiden obigen Ordnungsreduktionsmethoden, die folgende Approximationsfehlerschranke [2]:

$$\|K - K_{\text{red}}\|_{\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}\{K(j\omega) - K_{\text{red}}(j\omega)\} \leq 2 \sum_{i=n-N+1}^n \lambda_i \quad .$$

4 Literaturangaben

1. B. C. Moore, "Principle component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1981), S. 17–32.
2. D. F. Enns, "Model reduction with balanced realizations: an error bound and a frequency weighted generalization", *Proc. 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, NV, Dez. 1984, S. 127–132.
3. U. Christen, *Engineering Aspects of H_∞ Control*, Diss. ETH Nr. 11433, Zürich, 1996, Appendix A.2.
4. C. A. Roduner, *H_∞ -Regelung linearer Systeme mit Totzeit*, Diss. ETH Nr. 12337, Zürich, 1997, Kap. 6.4.

Anhang 6:

Diskretisierung eines zeitkontinuierlichen Reglers

1 Problemstellung

Gegeben:

Zeitkontinuierlicher Kompensator:¹

$$\dot{\xi}(t) = A_c \xi(t) + B_c e(t)$$

$$\xi(0) = \alpha$$

$$u(t) = C_c \xi(t) + D_c e(t)$$

$$K(s) = C_c [sI - A_c]^{-1} B_c + D_c$$

Dimensionen:

$$n_c = \dim(\xi(t)) \quad p = \dim(e(t)) \quad m = \dim(u(t))$$

Gesucht:

Zeitdiskreter Kompensator:

$$\xi_k = M \xi_{k-1} + N_1 e_k + N_2 e_{k-1}$$

$$M \xi_{-1} = \alpha$$

$$e_{-1} = 0$$

$$u_k = P \xi_k + Q e_k$$

$$\mathcal{K}(z) = P [zI - M]^{-1} (zN_1 + N_2) + Q$$

Abtastperiode: T

Abtastzeiten: $t = kT, k = 0, 1, 2, \dots$

¹ Um Verwechslungsgefahren zu vermeiden, bezeichnen wir hier den Zustandsvektor des Reglers mit $\xi(t)$ statt mit $z(t)$. — Hier ist z die komplexe Frequenzvariable der \mathcal{Z} -Transformation.

Bemerkungen:

- Wenn die neueste Information e_k sowohl im Beobachterzustand ξ_k als auch in der Stellgrösse u_k berücksichtigt sein soll, muss $N_1 \neq 0$ sein. Der Vektor ξ_k kann in diesem Fall erst nach dem Eintreffen von e_k berechnet werden, da erst dann das Produkt $N_1 e_k$ gebildet werden kann.
- Der Echtzeit-Rechenzeitbedarf zwischen dem Eintreffen von e_k und der Ausgabe von u_k ist minimal, wenn $N_1 = 0$ ist, da der Vektor ξ_k und das Produkt $P\xi_k$ in diesem Fall vor dem Eintreffen von e_k berechnet werden können. Solche Algorithmen nennen wir *totzeitoptimal*.
- Ein Algorithmus mit $N_1 \neq 0$ kann ohne weiteres in einen äquivalenten totzeitoptimierten umgeformt werden, wie die folgende Analyse im Frequenzbereich zeigt:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(z) &= P[zI - M]^{-1}(zN_1 + N_2) + Q \\ &= P[zI - M]^{-1}(zN_1 - MN_1 + MN_1 + N_2) + Q \\ &= P[zI - M]^{-1}(MN_1 + N_2) + (PN_1 + Q) \ .\end{aligned}$$

Der totzeitoptimierte Algorithmus lautet somit:

$$\begin{aligned}\xi_k &= M\xi_{k-1} + (MN_1 + N_2)e_{k-1} \\ \xi_{-1} &= \alpha \\ e_{-1} &= 0 \\ u_k &= P\xi_k + (PN_1 + Q)e_k \ .\end{aligned}$$

2 Zero Order Hold Equivalence

Hypothese: $e(t) \equiv e_k$ für $t_{k-1} < t \leq t_k$

Direkte Methode:

$$\begin{aligned}M &= e^{A_c T} = \sum_{k=0}^{\infty} A_c^k \frac{T^k}{k!} \\ N_1 &= \int_0^T e^{A_c(T-\tau)} B_c d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} A_c^{k-1} \frac{T^k}{k!} B_c \\ N_2 &= 0 \\ P &= C_c \\ Q &= D_c\end{aligned}$$

Totzeitoptimierte Methode:

$$M = e^{A_c T}$$

$$N_1 = 0$$

$$N_2 = e^{A_c T} \int_0^T e^{A_c(T-\tau)} B_c d\tau$$

$$P = C_c$$

$$Q = C_c \int_0^T e^{A_c(T-\tau)} B_c d\tau + D_c$$

3 Frequenzgang-Äquivalenz; bilineare Transformation

Forderung: $\mathcal{K}(e^{sT}) \approx K(s)$, da der Zusammenhang $z = e^{sT}$ gilt.

Padé-Approximation 1. Ordnung:

$$z = e^{sT} = \frac{e^{\frac{sT}{2}}}{e^{-\frac{sT}{2}}} \approx \frac{1 + s\frac{T}{2}}{1 - s\frac{T}{2}}$$

Die Umkehrung dieser bilinearen Transformation ergibt

$$s = \frac{2z - 1}{Tz + 1} .$$

Direkte Methode:

Kompensator:

$$\begin{aligned} K(s) &= C_c [sI - A_c]^{-1} B_c + D_c = C_c \left[\frac{2z - 1}{Tz + 1} I - A_c \right]^{-1} B_c + D_c \\ &= C_c \left[(z - 1)I - \frac{T}{2}(z + 1)A_c \right]^{-1} \frac{T}{2}(z + 1)B_c + D_c \\ &= C_c \left[z \left[I - \frac{T}{2}A_c \right] - \left[I + \frac{T}{2}A_c \right] \right]^{-1} \frac{T}{2}(z + 1)B_c + D_c \\ &= C_c \left[zI - \left[I - \frac{T}{2}A_c \right]^{-1} \left[I + \frac{T}{2}A_c \right] \right]^{-1} \frac{T}{2} \left[I - \frac{T}{2}A_c \right]^{-1} (z + 1)B_c + D_c \end{aligned}$$

Somit:

$$M = \left[I - \frac{T}{2}A_c \right]^{-1} \left[I + \frac{T}{2}A_c \right]$$

$$N_1 = N_2 = \frac{T}{2} \left[I - \frac{T}{2}A_c \right]^{-1} B_c$$

$$P = C_c$$

$$Q = D_c .$$

Beachte: Dieser Algorithmus kann als Integration der Differentialgleichung des Kompensators mit der Trapezmethode interpretiert werden.

Totzeitoptimierte Methode:

$$\begin{aligned} M &= \left[I - \frac{T}{2} A_c \right]^{-1} \left[I + \frac{T}{2} A_c \right] \\ N_1 &= 0 \\ N_2 &= T \left[I - \frac{T}{2} A_c \right]^{-2} B_c \\ P &= C_c \\ Q &= \frac{T}{2} C_c \left[I - \frac{T}{2} A_c \right]^{-1} B_c + D_c \end{aligned}$$

4 First Order Hold Equivalence

Hypothese: $e(t) = e_{k-1} + \frac{t-t_{k-1}}{T}(e_k - e_{k-1})$ für $t_{k-1} \leq t \leq t_k$

Direkte Methode:

$$\begin{aligned} M &= e^{A_c T} = \sum_{k=0}^{\infty} A_c^k \frac{T^k}{k!} \\ N_1 &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{A_c(T-\tau)} \tau d\tau B_c = \frac{1}{T} \sum_{k=2}^{\infty} A_c^{k-2} \frac{T^k}{k!} B_c \\ N_2 &= \int_0^T e^{A_c(T-\tau)} d\tau B_c - \frac{1}{T} \int_0^T e^{A_c(T-\tau)} \tau d\tau B_c \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_c^{k-1} \frac{T^k}{k!} B_c - \frac{1}{T} \sum_{k=2}^{\infty} A_c^{k-2} \frac{T^k}{k!} B_c \\ P &= C_c \\ Q &= D_c \end{aligned}$$

Wenn die Matrix A_c invertierbar ist, gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{A_c(T-\tau)} d\tau &= A_c^{-1} [e^{A_c T} - I] \\ \frac{1}{T} \int_0^T e^{A_c(T-\tau)} \tau d\tau &= \frac{1}{T} A_c^{-2} [e^{A_c T} - (I + A_c T)] \end{aligned}$$

Totzeitoptimierte Methode:

Anstelle der Matrizen M , N_1 , N_2 , P und Q verwenden wir wiederum die Matrizen M , 0 , $MN_1 + N_2$, P und $PN_1 + Q$ (vgl. Abschn. 1).

Anhang 7: Padé-Approximation für eine Totzeit

Ansatz:

$$e^{-sT} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-sT)^k}{k!} \approx \frac{\sum_{k=0}^M b_k (-sT)^k}{1 + \sum_{k=1}^N a_k (sT)^k}$$

mit den $N + M + 1$ unbekanntem Koeffizienten b_M, \dots, b_0 und a_N, \dots, a_1 .

Wir bestimmen die Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich in der folgenden Polynom-Gleichung für die Potenzen $s^0, s^1, s^2, \dots, s^{N+M}$:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-sT)^k}{k!} \right) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k (sT)^k \right) \approx \sum_{k=0}^M b_k (-sT)^k .$$

Resultat in expliziter Form:

$$b_k = \frac{(M+N-k)!M!}{k!(M-k)!(M+N)!} \quad \text{für } k = 0, \dots, M$$
$$a_k = \frac{(M+N-k)!N!}{k!(N-k)!(M+N)!} \quad \text{für } k = 1, \dots, N$$

Resultat in rekursiver Form:

Rekursionsformeln:

$$b_k = \frac{M-k+1}{k(M+N-k+1)} b_{k-1}$$
$$a_k = \frac{N-k+1}{k(M+N-k+1)} a_{k-1}$$

Initialisierung:

$$b_0 = 1$$

$$a_0 = 1$$

Stabilität und Realisierbarkeit:

Für alle Werte von M und N mit $0 \leq N - M \leq 2$ gilt:

- Die Approximation ist asymptotisch stabil.
- Sie lässt sich mit einem Zustandsraummodell realisieren.

Die Approximation mit $N = M$ nennen wir Allpass-Padé-Approximation, weil der Amplitudengang in diesem Fall perfekt identisch Eins ist.

Wahl der Ordnung:

Damit eine Allpass-Padé-Approximation bei einer gewissen Kreisfrequenz ω_1 erst einen Phasen-Approximationsfehler von etwa $\frac{\pi}{6}$ hat, ist die Ordnung wie folgt zu wählen:

$$N = M = \left\lceil \frac{\omega_1 T}{2} \right\rceil .$$

Empfehlung:

Um einen modellbasierten Regler unter Berücksichtigung einer Totzeit T zu entwerfen, wird zweckmässigerweise

$$\omega_1 \approx 10\omega_c$$

gewählt, wenn das Regelsystem die Bandbreite ω_c haben soll.

Literaturangaben:

1. C. A. Roduner, *H_∞-Regelung linearer Systeme mit Totzeiten*, Diss. ETH 12337, Zürich, 1997; Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 708, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, 1998, ISBN Nr. 3-18-370808-6.
2. H. P. Geering, C. A. Roduner, "Entwurf robuster Regler mit der H_∞-Methode", *Bulletin SEV/VSE 3(1999)*, S. 55–58;
www.imrt.mavt.ethz.ch/~geering/BullSEV99.pdf.

Literaturhinweise

1. K. J. Åström, T. Hägglund, *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*, 2nd ed., Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC, 1995.
2. U. Christen, *Engineering Aspects of H_∞ Control*, Diss. ETH Nr. 11433, Zürich, 1996, Appendix A.2.
3. J. C. Doyle, “Guaranteed Margins for LQG Regulators”¹³, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-23(1978), S. 756–757.
4. J. C. Doyle, G. Stein, “Robustness with Observers”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-24(1979), S. 607–611.
5. M. El-Khoury, *Influence des zéros d’une fonction de transfert sur le comportement dynamique d’un système linéaire et application au réglage polynomial*, Dissertation Nr. 981, ETHL, Ecublens, Dezember 1991.
6. D. F. Enns, “Model reduction with balanced realizations: an error bound and a frequency weighted generalization”, *Proc. 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, NV, Dez. 1984, S. 127–132.
7. H. P. Geering, *Regelungstechnik*, 6. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, 2004.
8. H. P. Geering, C. A. Roduner, “Entwurf robuster Regler mit der H_∞ -Methode”, *Bulletin SEV/VSE 3(1999)*, S. 55–58;
www.imrt.mavt.ethz.ch/~geering/BullSEV99.pdf.
9. H. P. Geering, *Robuste Regelung*, 3. Aufl., IMRT-Press, ETH Zürich, 2004.
10. B. C. Moore, “Principle component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1981), S. 17–32.
11. C. A. Roduner, *H_∞ -Regelung linearer Systeme mit Totzeiten*, Diss. ETH 12337, Zürich, 1997; Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 708, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf, 1998, ISBN Nr. 3-18-370808-6.
12. S. Skogestad, I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, Wiley, New York, NY, 1996.
13. J. M. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

