



Doctoral Thesis

## Advice complexity of online graph problems

**Author(s):**

Steffen, Björn C.

**Publication Date:**

2014

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-010185054> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

DISS. ETH NO. 21833

# Advice Complexity of Online Graph Problems

Björn Steffen



DISS. ETH NO. 21833

# Advice Complexity of Online Graph Problems

A thesis submitted to attain the degree of

DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH

(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

BJÖRN CHRISTIAN STEFFEN

MSc ETH CS, ETH Zurich

born on August 11, 1979

citizen of Zurich and Trub (BE)

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Juraj Hromkovič, examiner

Prof. Dr. Peter Widmayer, co-examiner

PD Dr. Walter Unger, co-examiner

2014

# Abstract

Online problems are special kinds of algorithmic problems where the input is not fully known until the end, it rather is revealed piecewise over a finite number of rounds. The challenge of designing so-called online algorithms for these problems is that, whenever a further piece of the input is revealed, the algorithms need to react to the new information and compute a piece of the output without knowing the remaining part of the input. Moreover, the output computed so far cannot be changed afterwards. The output quality of online algorithms is measured using the established competitive analysis. It is based on determining the ratio of the quality of the output and the quality of an optimal solution.

Clearly, solving online problems is not an easy task for the online algorithms. Hence, the challenge when doing research on online algorithms is to devise algorithms that still operate reasonably well within these constraining limits. Various online problems have been studied over the years. Many of them are not only of theoretical interest, but also of huge relevance in practice.

What information about the future parts of the input are these online algorithms missing? Of course, if an algorithm knows the whole input in advance, it just has to solve a classical optimization problem. In advice complexity theory, we are interested in measuring the least amount of information about the upcoming input, the crucial information, that is necessary and/or sufficient to compute an optimal output, or one of reasonable quality. In order to measure the crucial information, we imagine a clairvoyant oracle that knows the complete input and can write advice onto an infinite advice tape for later use by a specifically prepared online algorithm. These augmented algorithms are called online algorithms with advice. The advice complexity of these algorithms is the number of advice bits that are read during their computation in the worst-case. Consequently, the advice complexity of an online problem is the number of advice bits that are necessary and sufficient to compute an optimal, or competitive, output for the problem.

Proving lower bounds on the advice complexity is an especially interesting aspect and requires novel approaches. One of these approaches uses partition trees. Although this approach has been used before, we formalize this technique in this dissertation to make it more accessible for future use. This technique is demonstrated by determining the advice complexity of the ski rental problem, the stock market problem, and the disjoint path allocation problem on paths.

Furthermore, we also discuss advice-preserving reductions as a basis for determining lower bounds via the string guessing problem and additionally explain how the concept of advice complexity can be used to prove lower bounds on the competitiveness of randomized algorithms.

This dissertation is dedicated to investigating the advice complexity of three online graph problems. These are online versions of graph problems where the input is given by an online graph, that is, a graph where the vertices are revealed vertex by vertex, together with the edges incident to already revealed vertices. We study the online vertex cover problem, the online graph coloring problem, and the online  $\lambda$ -coloring problem. For each of these online graph problems, we study online algorithms with and without advice for various graph classes.

The online vertex cover problem is an online version of the famous optimization problem of finding a minimum vertex cover in a graph. We analyze the advice complexity of this problem for paths, trees and connected graphs. For all three graph classes, we present linear lower bounds on the advice complexity. For paths and connected graphs, we have online algorithms with advice for which the amount of advice determined by the lower bound is almost sufficient. To compute a vertex cover for trees, we show a linear lower bound on the advice complexity of any  $c$ -competitive online algorithm using a reduction from the string guessing problem.

In online graph coloring, we are asked to color the vertices of a graph that is revealed vertex after vertex, such that adjacent vertices are not assigned the same color. For caterpillars and combs, we analyze a simple greedy strategy and show that four colors are necessary and sufficient. Regarding online algorithms with advice, we prove that a linear amount of advice bits are necessary and sufficient to color any caterpillar, comb or tree optimally. To color combs, caterpillars and trees with three colors, we show that still a linear amount of advice bits is necessary and sufficient.

Finally, we investigate the online  $\lambda$ -coloring problem. A variant of the graph coloring problem that arises in the context of assigning frequencies to radio transmitters. The goal is to assign frequency bands to the transmitters such that adjacent transmitters receive frequency bands that are sufficiently separated and transmitters at distance two must operate at different frequency bands. We analyze this problem for online paths, for which we present an optimal online algorithm with advice and a linear lower bound on the advice complexity. Additionally, we prove that no randomized online algorithm can be better than a certain competitive ratio.

# Zusammenfassung

Online-Probleme sind eine spezielle Art von algorithmischen Problemen, bei denen die gesamte Eingabe nicht von vornherein bekannt ist, sondern stückweise über eine endliche Anzahl von Runden erscheint. Die Herausforderung beim Entwerfen von sogenannten Online-Algorithmen für diese Probleme ist, dass, wann immer ein Teil der Eingabe erscheint, diese Algorithmen auf die neue Information reagieren und den entsprechenden Teil der Ausgabe berechnen müssen, ohne den restlichen Teil der Eingabe zu kennen. Zudem kann die bisherige Ausgabe nicht im Nachhinein geändert werden. Die Ausgabequalität der Algorithmen wird meist durch die etablierte kompetitive Analyse gemessen.

Offensichtlich ist das Lösen von Online-Problemen keine einfache Aufgabe für Online-Algorithmen. Die Herausforderung besteht darin, sich Online-Algorithmen auszudenken, welche innerhalb dieser Grenzen trotzdem vernünftig funktionieren. Verschiedene Online-Probleme wurden über die Jahre untersucht. Viele von ihnen sind nicht nur von theoretischem Interesse, sondern haben auch eine grosse Relevanz in der Praxis.

Welche Information über die zukünftigen Bestandteile der Eingabe fehlt diesen Online-Algorithmen? Ein Algorithmus, der die gesamte Eingabe im Voraus kennt, muss natürlich nur ein klassisches Optimierungsproblem lösen. In der Komplexitätstheorie bezüglich Advice sind wir daran interessiert, die kleinste Menge an Information zu bestimmen, die notwendig und/oder ausreichend ist, um eine optimale Ausgabe oder zumindest eine mit einer vernünftigen Qualität zu berechnen. Um diese essentielle Information zu messen, stellen wir uns ein hellseherisches Orakel vor, das die gesamte Eingabe kennt und einen sogenannten Advice auf ein unendliches Band schreibt, der später durch einen speziell vorbereiteten Online-Algorithmus genutzt werden kann. Diese erweiterten Algorithmen werden Online-Algorithmen mit Advice genannt. Die Advice-Komplexität dieser Algorithmen ist die Anzahl Advice-Bits, die während einer Berechnung im schlimmsten Fall gelesen werden. Folglich ist die Advice-Komplexität eines Online-Problems die Anzahl der Advice-Bits, die notwendig und ausreichend sind, um eine optimale oder eine kompetitive Ausgabe zu berechnen.

Untere Schranken auf die Advice-Komplexität zu beweisen ist ein besonders spannender Aspekt und benötigt neue Ansätze. Einer dieser Ansätze verwendet Partitions-Bäume. Obwohl dieser Ansatz bereits genutzt worden ist, werden

wir in dieser Dissertation diese Technik formalisieren, um sie für die zukünftige Nutzung zugänglicher zu machen. Diese Technik wird anhand der Bestimmung der Advice-Komplexität des Skivermietungsproblems, des Aktienmarktproblems und des Disjoint-Path-Allocation-Problems demonstriert. Ausserdem verwenden wir Advice-erhaltende Reduktionen als Grundlage, um untere Schranken mit Hilfe des String-Guessing-Problems zu bestimmen. Zusätzlich erläutern wir, wie das Konzept der Advice-Komplexität genutzt werden kann, um untere Schranken auf die Kompetitivität von randomisierten Algorithmen zu beweisen.

Diese Dissertation ist der Untersuchung der Advice-Komplexität von drei Online-Problemen auf Graphen gewidmet. Dies sind Online-Varianten von Graph-Problemen, bei denen die Eingabe durch Online-Graphen gegeben ist, das heisst durch Graphen welche knotenweise erscheinen, zusammen mit den Kanten, die zu bereits erschienenen Knoten inzident sind.

Wir studieren Online-Algorithmen mit und ohne Advice für das Online-Knotenüberdeckungsproblem, das Online-Graphfärbungsproblem und das Online- $\lambda$ -Färbungsproblem, jeweils auf verschiedenen Graphklassen.

Das Online-Knotenüberdeckungsproblem ist eine Online-Version des bekannten Optimierungsproblems, bei dem es darum geht, in einem Graphen eine minimale Knotenüberdeckung zu finden. Wir analysieren die Advice-Komplexität dieses Problems auf Pfaden, Bäumen und allgemeinen zusammenhängenden Graphen. Für alle drei Graphklassen präsentieren wir lineare untere Schranken auf die Advice-Komplexität. Für Pfade und zusammenhängende Graphen haben wir Online-Algorithmen mit Advice, für welche die durch die unteren Schranken bestimmte Menge an Advice fast ausreichend ist. Um eine Knotenüberdeckung für Bäume zu berechnen, zeigen wir eine untere Schranke für die Advice-Komplexität von jedem  $c$ -kompetitiven Online-Algorithmus mittels einer Reduktion vom String-Guessing-Problem.

Beim Online-Graphfärbungsproblem ist die Aufgabe, die Knoten eines Graphen zu färben, der knotenweise erscheint, so dass alle adjazenten Knoten nicht die gleiche Farbe erhalten. Für Caterpillar-Graphen und Kämmen analysieren wir eine einfache Greedy-Strategie und zeigen, dass vier Farben notwendig und ausreichend sind. Für Online-Algorithmen mit Advice beweisen wir, dass eine lineare Anzahl Advice-Bits nötig und ausreichend sind, um jeden Caterpillar, jeden Kamm bzw. jeden Baum optimal zu färben.

Schliesslich untersuchen wir das Online- $\lambda$ -Färbungsproblem. Dies ist eine Variante des Graphfärbungsproblems, die bei der Zuweisung von Frequenzen an Radiosender auftritt. Das Ziel ist es, den Sendern Frequenzen zuzuweisen, so dass benachbarte Sender Frequenzen erhalten, die genügend getrennt sind, und dass Sender im Abstand zwei mit unterschiedlichen Frequenzen arbeiten. Wir analysieren dieses Problem für Online-Pfade, für welche wir einen optimalen Online-Algorithmus mit Advice präsentieren und eine lineare untere Schranke auf die Advice-Komplexität. Ausserdem beweisen wir, dass kein randomisierter Online-Algorithmus besser sein kann als 1.25-kompetitiv.