DISS. ETH NO. 22093

QUANTUM INVARIANTS AND LAGRANGIAN TOPOLOGY

A thesis submitted to attain the degree of

Doctor of Sciences of ETH Zurich

(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

Cedric Membrez
MSc ETH Math., ETH Zurich
born March 10, 1984
citizen of
Courtételle JU, Switzerland

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Paul Biran, examiner
Prof. Dr. Dietmar Salamon, co-examiner
Prof. Dr. Felix Schlenk, co-examiner

2014

Abstract

Let (M, ω) be a symplectic manifold and $L \subset M$ a Lagrangian submanifold. In this thesis we construct invariants of embedded closed monotone Lagrangian submanifolds, termed quantum invariants, and study their properties and relations to other existing invariants in symplectic topology. These are invariant under symplectomorphisms and are derived from the Lagrangian quantum homology of L. The thesis consists of two parts.

The Lagrangian quantum homology $QH(L)$ of L has rich algebraic structures compatible with the ring structure on the ambient quantum homology $QH(M)$. In certain situations $QH(L)$ is isomorphic (non canonically) to the singular homology $H(L)$ and the algebraic structures of $QH(L)$ correspond to a class of deformations of the classical algebraic structures on $H(L)$. In the first part we develop a deformation theory of the quantum algebraic structures in Lagrangian quantum homology. We then construct invariants associated to the classes of deformations. We obtain cohomological invariants which arise from the quantum product, the quantum module action and the quantum inclusion on $QH(L)$.

The second part presents joint work with Paul Biran. This part is concerned with the study of a specific invariant of the quantum product, termed the discriminant, and describes the implications and properties in the ambient quantum homology and under Lagrangian cobordisms. Under certain assumptions we prove that the homology class of L satisfies a cubic equation in the ambient quantum homology $QH(M)$. Furthermore, using the coefficients of this cubic equation we can compute the discriminant of the Lagrangian L. We also study the relation between this invariant and Lagrangian cobordisms. We pay special attention to the case of Lagrangian spheres and provide several examples of computations of the invariant.

Zusammenfassung

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $L \subset M$ eine Lagrange-Untermannigfaltigkeit. In dieser Dissertation konstruieren wir Invarianten von eingebetteten, kompakten und monotonen Lagrange-Untermannigfaltigkeiten, genannt Quanteninvarianten, und erforschen ihre Eigenschaften und die Zusammenhänge zu anderen bestehenden Invarianten der symplektischen Topologie. Diese Quanteninvarianten sind invariant unter Symplektomorphismen und werden mithilfe der Lagrange-Quantenhomologie von L konstruiert. Die Arbeit besteht aus zwei Teilen.

Die Lagrange-Quantenhomologie $QH(L)$ von L besitzt vielfältige algebraische Strukturen, die mit der Ring-Struktur der Quantenhomologie $QH(M)$ kompatibel sind. In bestimmten Situationen entsprechen die algebraischen Strukturen von $QH(L)$ einer Klasse von Deformationen der klassischen Strukturen auf der singulären Homologie $H(L)$. Im ersten Teil der Arbeit entwickeln wir eine Theorie der Deformationen von algebraischen Strukturen in der Lagrange-Quantenhomologie und konstruieren daraus Invarianten. Wir erhalten Invarianten kohomologischer Natur, welche vom Quantenprodukt, von der Quantenmodulstruktur und von der Quanteninklusion in $QH(L)$ abstammen.

Der zweite Teil der Arbeit stellt ein Projekt mit Paul Biran vor. In diesem Teil untersuchen wir eine Invariante des Quantenprodukts, die sogenannte Diskriminante, und beschreiben ihre Eigenschaften im Zusammenhang mit der Quantenhomologie und mit Lagrange-Kobordismen. Unter gewissen Annahmen erfüllt die Homologie-Klasse von L eine kubische Gleichung in $QH(M)$. Zudem können wir mit den Koeffizienten dieser Gleichung die Diskriminante von L berechnen. Den Fall einer Lagrange-Sphäre betrachten wir besonders und berechnen die Diskriminante in verschiedenen Beispielen.