Dissertation ETH Zürich No. 18371

Algebraic Moments

– Real Root Finding and Related Topics –

A dissertation submitted to the
ETH Zurich

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by

PHILIPP ROSTALSKI

Dipl. Ing. Elektrotechnik, TU Hamburg-Harburg
born 06.10.1978
citizen of Germany

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Manfred Morari, examiner
Dr. Jean Bernard Lasserre, co-examiner
Dr. Monique Laurent, co-examiner

2009

Abstract

Polynomial root finding is a classical and well studied problem in mathematics with practical applications in many areas. Various relevant questions can be reformulated into the task of finding all common roots of a given system of polynomials in several variables, the so-called algebraic variety or zero set.

Traditionally, root finding algorithms are implemented in exact arithmetics over algebraically closed fields and fall into the area of computational algebraic geometry. However, in practical applications data is often uncertain and only known up to a certain finite precision. Algorithms in the new and promising area of numerical polynomial algebra or numerical algebraic geometry reflect this issue. Just like in linear algebra, the use of numerical methods has the potential of reducing the complexity and storage requirements and thus allows to treat problems of larger size. Almost all existing numerical algebraic methods perform computations over the field of complex numbers, while in practical problems the variables are mostly real valued.

In this thesis we address the need for numerical software in real algebraic geometry by proposing two algorithms for computing real roots or even roots in certain semialgebraic sets. A novel semi-definite representation of the real radical ideal allows a unified treatment for the computation of real and complex roots as well as the construction of border and Gröbner bases of the ideal or its real radical ideal respectively. We address the issue of augmenting existing symbolic-numeric algorithms with real algebraic features and provide a first step towards efficient algebraic algorithms for computations over the real numbers.

After recalling some basic concepts from commutative algebra and algebraic geometry, two existing root finding methods are discussed. Nonlinear parametric programming is introduced as an example, which can be tackled using polynomial algebra for presolving. The precomputation, based on solving first order optimality conditions, is particularly useful in time critical applications of parametric programming. Model predictive control, where an optimal control problem with changing initial state is solved in real time, demonstrates an important example.

The first approach uses symbolic computation and proceeds by precomputing Gröbner basis and so-called generalized companion matrices. The online algorithm reduces to the evaluation of the parameters in these matrices, a few numerical eigenvalue computations and a finite search among all real and feasible candidate solutions (appearing as eigenvalues of the precomputed matrices).

The second approach utilizes the structure of the parametric equations within the KKT equations. By solving a single generic instance of these equations, homotopy continuation over the complex numbers can be used to efficiently trace the solutions to a solution for any other value of the parameter.

Motivated by the drawbacks of existing symbolic algorithms, such as the effect of blow-up in the integer coefficients of Gröbner bases, its representation instability or the potentially large number of redundant complex solutions, we focus on the development of numerical algorithms for computations over the real numbers. Based on existing semidefinite programming relaxations for global optimization, the matrix of moments (or moment matrix) and semidefinite programming are considered as natural candidates. We start by recalling basic concepts from real algebraic geometry and review well known results about moment matrices and their kernels.

A careful analysis of the structure of moment matrices leads to a novel algorithm for computing roots of a system of polynomials as well as other interesting algebraic objects such as border or Gröbner bases of the real radical ideal. A single generic linear form is used to represent the algebraic variety or more precisely a certain set of polynomials whose zero set is the desired variety. Depending on the structure and properties of the linear form, this set of polynomials is an ideal or even a radical ideal with the properties that its roots are precisely the considered subset (all complex roots, all real roots or even a subset described by additional inequalities).

All steps in the algorithm can be performed using numerical linear algebra and, for the computation over the real numbers, semidefinite programming. Termination of the algorithm is proven under the condition that the number of roots we want to compute is finite. Extensions to zero-dimensional subsets of all roots as well as a first attempt towards positive dimensional solution sets are illustrated. In certain cases the algorithm can also be used to obtain exact certificates for the nonexistence of roots, despite the use of floating point arithmetics.

The enabling tool for the real version of the algorithm is the representation of the real radical ideal using moment matrices. We show how this representation can be embedded into existing numerical algebraic algorithms to enable real algebraic computations. The approach is illustrated on a particularly simple instance, namely a basic prolongation-projection method. Different implementation options are discussed and we demonstrate its applicability on a large sample of examples. Even though the current implementation of the algorithm is not yet fully competitive with other available solvers, it shows exemplarily how real algebraic features maybe added to this class of algorithms.

Zusammenfassung

Die Berechnung aller Lösungen eines polynomialen Gleichungssystems ist ein klassisches Problem der Mathematik mit vielen relevanten Anwendungen in den verschiedensten Bereichen. In zahlreichen Einsatzgebieten ergibt sich die Notwendigkeit zur Berechnung aller gemeinsamen Lösungen mehrerer multivariater Polynome.

Während in der linearen Algebra vorrangig numerische Verfahren Anwendung finden, basieren die meisten algebraischen Algorithmen auf exakter Arithmetik. Erst in den letzten Jahren ist das Interesse an numerischen Verfahren auch in diesem Bereich gewachsen. Das noch junge Gebiet der numerischen polynomialen Algebra bzw. numerischen algebraischen Geometrie befasst sich mit diesen Verfahren sowie mit der Stabilität von Lösungen unter Parameterunsicherheiten. Die meisten verfügbaren Methoden arbeiten über dem Körper der komplexen Zahlen, berechnen also die Menge aller reellen und komplexen Lösungen, während die Variablen in praktischen Anwendungen häufig nur reelle Werte annehmen können. Diese Arbeit befasst sich mit der numerischen Berechnung aller reellen Lösungen eines polynomialen Gleichungssystems, sowie mit der Charakterisierung des reellen Radikals, der Menge aller Polynome mit der gleichen reellen Lösungsmenge wie das ursprüngliche polynomiale Gleichungssystem (während die komplexe Lösungsmenge durchaus abweichen kann).

Nachdem im ersten Teil dieser Arbeit einige grundlegende Konzepte der kommutativen Algebra und der algebraischen Geometrie wiederholt werden, steht das Lösen polynomialer Gleichungssysteme im zweiten und dritten Teil im Vordergrund. Als erste Anwendung wird die nichtlineare, parametrische Programmierung vorgestellt und mit ihr die optimale und modellprädiktive Regelung diskutiert. Insbesondere letztere erfordert die Lösung eines parametrischen Optimierungsproblems für verschiedene Werte der Parameter in Echtzeit. Es werden zwei Methoden zur effizienten Lösung parametrischer Optimierungsprobleme mittels algebraischer Vorberechnung von Teillösungen vorgestellt.

Beide Methoden beruhen auf der Berechnung der Lösungensmenge von Optimalitätsbedingungen. Die erste Methode bestimmt eine parametrische Repräsentation von Multiplikationsmatrizen in einem geeigneten Restklassenring mittels Gröbnerbasen. Die Eigenwerte dieser Matrizen ergeben, nach der Spezialisierung der Werte für die Parameter, eine Übermenge aller möglichen lokalen Optima aus welcher sich das globale

Optimum bestimmen lässt. Die zweite vorgestellte Methode nutzt die Struktur der Optimalitätsbedingungen aus. Eine vorberechnete Lösung der Optimalitätsgleichungen für einen generischen Wert des Parameters erlaubt anschliessend die schnelle Berechnung der Lösung für alle anderen Parameterwerte mittels Homotopie.

Die Nachteile der verwendeten Gleichungslösungsverfahren, wie das Auftreten grosser, ganzzahliger Koeffizienten in den Multiplikationsmatrizen oder die grosse Anzahl redundanter, komplexer Lösungen, motiviert den dritten Teil dieser Arbeit: Algorithmen zur numerisch-algebraischen Lösung polynomialer Gleichungssysteme mittels Momentenmatrizen. Den Ausgangspunkt bilden existierende, semidefinite Relaxationen für globale Optimierungsprobleme.

Einer kurzen Übersicht wichtiger Konzepte der reellen algebraischen Geometrie und der Funktionalanalysis folgt die zusammenfassende Darstellung der Eigenschaften einer besonderen Matrix, der sogenannten Momentenmatrix. Basierend darauf wird eine neuartige semidefinite Darstellung des reellen Radikals vorgestellt. Diese Darstellung in Form einer Momentenmatrix eines einzelnen, linearen Funktionals erlaubt es nicht nur einen Algorithmus zur Berechnung aller reellen Lösungen zu entwerfen, sondern auch weitere interessante Objekte wie z.B. Border- oder Gröbnerbasen des reellen Radikals zu bestimmen. Je nach Wahl des Funktionals können entweder alle reellen und komplexen Lösungen gleichzeitig berechnet werden oder aber direkt alle reellen Lösungen.

Es wird gezeigt, dass der vorgestellte Algorithmus in endlich vielen Schritten terminiert, sofern die zu berechnende Lösungsmenge endlich ist. Die Erweiterung auf Wurzeln in einer von Ungleichungen bestimmten Untermenge sowie erste Schritte in Richtung positiv dimensionaler Lösungsmengen werden ebenfalls diskutiert. Es wird ausserdem gezeigt, wie die Ausgabe des vorgestellten Algorithmus, angewandt auf ein System ohne Nullstellen, zur Berechnung numerischer und exakter Zertifikate dieser Nichtexistenz von Lösungen verwendet werden kann. Die einzelnen Schritte des Algorithmus basieren im wesentlichen auf numerischer linearer Algebra und (für das Berechnen reeller Lösungen) auf semidefiniter Programmierung.

Die Spezialisierung einer ganzen Klasse von sogenannten generalisierten Normalform-Algorithmen auf das Berechnen reeller Lösungen stellt eine weitere Anwendung der semidefiniten Darstellung des reellen Radikals dar. Diese Erweiterung ist an einem einfachen Algorithmus exemplarisch dargestellt. Der Zusammenhang zu der vorher vorgestellten Methode der Momentenmatrix wird erörtert und dessen praktische Anwendung in einer ganzen Reihe von Beispielen demonstriert. Auch wenn die bisherigen Implementierungen der beiden vorgestellten Algorithmen noch nicht die Leistungsfähigkeit anderer Methoden zur Lösungen polynomialer Gleichungssysteme erreicht haben, so stellen sie doch einen ersten Schritt zur algebraisch-numerischen Berechnung reeller Lösungen dar.