Diss. ETH No. 21260

# Applications of algebraic geometry in economics

A dissertation submitted to

ETH ZURICH

for the degree of

Doctor of Sciences

presented by

PHILIPP JOHANNES RENNER

Diplom Mathematiker, Technische Universität Kaiserslautern
born 9 August 1984
citizen of Germany

Accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Robert Weismantel, examiner
Prof. Dr. Gerhard Pfister, co-examiner
Prof. Dr. Karl Schmedders, co-examiner

2013

# 2 Abstract

The overall aim of this thesis was to apply techniques from algebraic geometry to problems in economics. Algebraic geometry has found many applications in various areas of mathematics and in several other fields. We have encountered three major approaches to employing these tools to economics. First, there are the symbolic methods from computer algebra (Greuel and Pfister, 2002). One possible avenue of approach here is Gröbner bases, which have already been used to great effect in integer programming (Loera et al., 2006) and also in economics (Kubler and Schmedders, 2010). Second, there is the numerical algebraic geometry route. There one uses Berstein's or Bezout's theorem, which give information on the isolated solutions of a square system of polynomial equations (Sommese and Wampler, 2005). The basic idea is to construct a homotopy and trace the paths leading to those isolated solutions. It is a very active field of research and applications range from optimal control (Rostalski et al., 2011) to biology (Hao et al., 2011). Lastly there is the real algebraic geometry route. It was recently discovered (Parrilo, 2000; Lasserre, 2001b) that representation results for positive polynomials can be used to relax polynomial optimization problems into convex optimization problems. Since then it has been shown that this is a promising approach to solving various problems, for instance in combinatorial optimization (Lasserre, 2001a) and also game theory (Laraki and Lasserre, 2012).

Over recent years I have looked at the last two of these approaches. The results have been presented in the form of several papers, two of which have already been published and the last of which is being revised at the time of writing.

The first paper is entitled "Finding all pure-strategy equilibria in games with continuous strategies" (Judd et al., 2012). Static and dynamic games are widely used tools for policy experiments and estimation studies. The multiple Nash equilibria in such models can potentially invalidate the results thus obtained. This problem of multiplicity has been well known for decades and there are several easy models in which it occurs (Fudenberg and Tirole, 1983a). However, it has been largely ignored in most publications thus far. In this paper we want to illustrate how to address this problem by means of the all solutions homotopy optimization approach (Sommese and Wampler, 2005). To apply this approach we require our problem to be polynomial with isolated optimal solutions. We then reformulate the problem by using the Karush-Kuhn-Tucker conditions to obtain a square system of polynomial equations. The basic idea of the homotopy approach is to use an easier version of the model, where all solutions are known. This easy system is then transformed via a function called homotopy to KKT conditions. The resulting paths are traced by numerical methods. The same ideas can be used in all

situations in which a version of the implicit function theorem holds. But in general this approach cannot compute all solutions. However, in the polynomial case, if we perturb the homotopy path randomly and choose an appropriate starting system, then we can reach all isolated solutions. We use the software package Bertini (Bates et al., 2005), which implements the homotopy solution approach, to solve a Bertrand price game and a stochastic dynamic model of cost-reducing investment.

My contribution to this paper was to describe the mathematics behind this approach and also to compute the various examples.

The second paper is entitled “A polynomial optimization approach to principal agent problems” (Renner and Schmedders, 2013). In it we deal with a canonical model in economics, the principal agent problem. The principal hires an agent to, for instance, manage a company. She knows the agent’s preferences but cannot observe the agent’s actions in the subsequent period. So, to maximize her own utility, she has to set the right incentives for the agent. This leads to a bi-level optimization problem in which both players optimize their expected utilities. Unless we impose restrictive assumptions on the functions used, this leads in general to a non-convex lower-level problem. Thus usual methods from bi-level optimization do not apply. We assume that the lower-level problem is polynomial with a compact feasible set. Then we use ideas developed in Lasserre, 2001b; Parrilo, 2000 to, in some cases, reformulate, and in others relax the lower level into a convex optimization problem. We solve the resulting nonlinear program with a numerical optimization routine.

My part in this work was the idea of using the Positivstellensätze to replace the lower level problem. Thus I also wrote the mathematical part of this paper and again computed the examples.

The third and final paper is entitled “Computing Generalized Nash Equilibria by Polynomial Programming” (Couzoudis and Renner, 2013). The Generalized Nash equilibrium is a solution concept that extends the classical Nash equilibrium to situations in which the opponents decision influences the player’s constraints. To compute these equilibria the literature usually assumes convexity or quasi-convexity of the player’s problems. However, in many situations it is desirable to use non-convex objective functions. We adapted the method developed in the previous paper to be able to solve this problem for the non-convex case. Our assumptions are that the functions are polynomials with compact feasible sets. We then again use real algebraic geometry to relax these problems into convex optimization problems which then can be solved using standard methods. As an example we compute a model of the New Zealand electricity spot market using a real data set.

Again I proved the relevant theorems, wrote the overview for the relaxation methods, and computed the example.

# 3 Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war es die Techniken der algebraischen Geometrie und Computer Algebra auf Problem aus der Ökonomie anzuwenden. Algebraische Geometrie hat mittlerweile viele Anwendungen in verschieden Gebieten der Mathematik und anderen Forschungsrichtungen gefunden. Uns sind drei mögliche Ansätze begegnet, um dieses Ziel zu erreichen. Der erste Ansatz bedient sich der symbolischen Methoden, welche von der Computer Algebra kommen (Greuel und Pfister, 2002). Ein wichtiges Werkzeug dort sind die Gröbner Basen. Diese wurden bereits sowohl in ganzzahliger Optimierung (Loera u. a., 2006) und in den Wirtschaftswissenschaften benutzt (Kubler und Schmedders, 2010). Als weiter Möglichkeit gibt es die Methoden der numerischen algebraischen Geometrie. Mit Hilfe von den Sätzen von Bezout und Bernstein können alle isolierten Nullstellen von polynomialen Gleichungssystemen berechnet werden. Die grundlegende Idee ist eine Homotopie von einem einfachen System zu dem Ursprünglichen zu konstruieren (Sommese und Wampler, 2005). Dann folgt man mit numerischen Methoden den resultierenden Pfaden. Diese Methoden haben bereits viele Anwendungen, zum Beispiel in optimaler Steuerung (Rostalski u. a., 2011) und Biologie (Hao u. a., 2011), gefunden. Eine dritte Möglichkeit ist die reelle algebraische Geometrie (Parrilo, 2000; Lasserre, 2001b). Dabei werden die Repräsentationssätze für positive Polynome benutzt um ein polynomiales Optimierungsproblem zu einem konvexen Programm zu relaxieren. Dieser Ansatz hat sich als sehr vielversprechend erwiesen und hat bereits Anwendungen in zum Beispiel kombinatorischer Optimierung (Lasserre, 2001a) und Spieltheorie (Laraki und Lasserre, 2012) gefunden.

Meine Arbeit der letzten Jahre hat zu drei Artikel geführt, welche sich der letzten beiden Ansätzen bedienen. Zwei Papiere sind bereits veröffentlicht und das Dritte ist im Moment im Begutachtungsprozess.

Der erste Artikel ist “Finding all pure-strategy equilibria in games with continuous strategies” (Judd u. a., 2012). Statische und dynamische Spiele sind weit verbreitete Modelle für Strategie Experimente und Planspiele. Mehrere Nash Gleichgewichte in solchen Situationen können potentiell die Resultate verfälschen und sogar unbrauchbar machen. Diese Problematik ist seit Jahrzehnten bekannt und selbst in einfachen Modellen kann sie vorkommen (Fudenberg und Tirole, 1983a). Trotz den signifikanten Folgen wurde dies in der Literatur weitgehend ignoriert. In diesem Artikel wollen wir zeigen, wie, in gewissen Situationen, mehrfache Gleichgewichte gefunden werden können. Für das Optimierungsproblem setzen wir voraus, dass die Lösungen isoliert sind und die Funktionen Polynome. Die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen liefern dann ein quadratisches System von polynomialen Gleichungen. Dieses kann dann mit der Software Bertini (Bates

u. a., 2005) gelöst werden. Wir betrachten Bertrand-Wettbewerb und ein stochastisches dynamisches Modell mit Kosten reduzierendem Investment.

Mein Beitrag zu diesem Papier war die Beschreibung der zugrunde liegenden Mathematik und die Berechnung der Beispiele.

Das zweite Papier heisst "A polynomial optimization approach to principal agent problems" (Renner und Schmedders, 2013). Das Prinzipal-Agenten Modell ist eines der kanonischen Modelle der Wirtschaftswissenschaften. Der Prinzipal schliesst einen Vertrag mit einem Agenten ab, zum Beispiel ein Eigentümer stellt einen Manager ein. Das Spezielle an diesem Problem ist, dass der Prinzipal nicht die Aktion des Agenten in der folgenden Periode beobachten kann. Er kennt lediglich die Nutzenfunktion des Agenten, die möglichen Resultate und deren Wahrscheinlichkeiten. Dies führt zu einem zwei Ebenen Problem, wobei die optimale Aktion des Agenten teil der Restriktionen des Prinzipal sind. Beide Spieler optimieren hierbei ihren erwarteten Nutzen. Ausser unter starken Restriktionen, führt dies im Allgemeinen zu einer nicht konvexen unteren Ebene. Standardmethoden der Bilevel Optimierung greifen hier nicht mehr. Wir nehmen an, dass die untere Ebene eine Polynomiales Optimierungsproblem ist mit kompakter zulässiger Menge. Dann verwenden wir Ideen aus Lasserre, 2001b; Parrilo, 2000, um die untere Ebene im eindimensionalen Fall zu reformulieren und im Mehrdimensionalen zu relaxieren. Das resultierende nicht lineare Optimierungsproblem lösen wir mit numerischer Optimierungssoftware.

Mein Anteil war die Idee die Positivstellensätze zur Umformulierung der unteren Ebene zu benutzen. Somit habe ich auch den mathematischen Teil geschrieben und auch die Beispiele berechnet.

Der letzte Artikel hat den Titel "Computing Generalized Nash Equilibria by Polynomial Programming" (Couzoudis und Renner, 2013). Verallgemeinerte Nash Gleichgewichte sind ein Lösungskonzept, welches das klassische Konzept von Nash erweitert, indem die Entscheidung der Gegenspieler sich auch auf die eigenen Nebenbedingungen auswirkt. Der übliche Ansatz ist es Konvexität oder zumindest Quasi-Konvexität für die einzelnen Spielerprobleme anzunehmen. Es ist aber in gewissen Situationen interessant sich nicht konvexe Probleme anzusehen. Wir haben die Methodologie, welche im vorangegangenen Papier Anwendung gefunden hat, auf diese Situation angepasst. Wir nehmen an, dass die Funktionen Polynome sind und dass die zulässige Mengen der Spieler kompakt sind. Wir verwenden reelle algebraische Geometrie, um die einzelnen Spielerprobleme zu einem konvexen Optimierungsproblem zu relaxieren. Diese können dann wiederum mit Standardmethoden gelöst werden. Als ein Anwedungsbeispiel berechnen wir ein Modell des neuseeländischen Elektrizitätsmarktes.

Ich habe wieder die relevanten Sätze bewiesen, die Relaxierungsmethoden beschrieben und das Beispiel berechnet