ETH zürich

ETH Library

Starr-plastische Traglastberechnungen mittels der Methode der finiten Elemente

Working Paper

Author(s):
Anderheggen, Edoardo

Publication date:
1971

Permanent link:
https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-a-000747222

Rights / license:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Originally published in:
Bericht / Institut für Baustatik ETH Zürich 32

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection.
For more information, please consult the Terms of use.

Starr-plastische Traglastberechnungen mittels der Methode der Finiten Elemente

Edoardo Anderheggen

Mai 1971
Bericht Nr. 32

Institut für Baustatik ETH Zürich

Starr-plastische Traglastberechnungen mittels der Methode der Finiten Elemente

von

Dr. sc. techn. Edoardo Anderheggen

Institut für Baustatik
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Zürich
Mai 1971

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. EINLEITUNG	1
1.1 Zielsetzung und allgemeine Bemerkungen	1
1.2 Index- und Matrixschreibweise	2
1.3 Mathematische Problemstellung	3
2. AUFSTELLUNG VON LINEAREN PLASTIZITAETSBEDINGUNGEN UND BERECHNUNG DER INNEREN DISSIPATIONSLEISTUNG	7
2.1 Aufstellung von linearen Plastizitätsbedingungen	7
2.2 Berechnung der inneren Dissipationsleistung	9
2.3 Anderer Weg zur Aufstellung linearer Plastizitätsbedingungen	10
2.4 Entsprechende Berechnung der Dissipationsleistung	12
2.5 Beispiele	14
3. STARR-PLASTISCHE TRAGLASTBESTIMMUNG	18
3.1 Verschiebungs- und Spannungsansätze	18
3.2 Traglastbestimmung nach dem statischen Grenzwertsatz ($\lambda \rightarrow$ Maximum)	19
3.3 Zur Bestimmung der globalen Gleichgewichtsmatrix $[G]$ und des globalen Lastvektors $\{P\}$	24
3.4 Zur Wahl der Verschiebungs- und Spannungsansätze	25
3.5 Traglastbestimmung nach dem kinematischen Grenzwertsatz ($\lambda \rightarrow$ Minimum)	27
3.6 Dualität der beiden Verfahren	30
4. STARR-PLASTISCHE TRAGLASTBESTIMMUNG NACH DEM DEKOMPOSITIONSVERFAHREN	31
4.1 Einleitung	31
4.2 Traglastbestimmung nach dem statischen Grenzwertsatz ($\lambda \rightarrow$ Maximum)	33
4.3 Traglastbestimmung nach dem kinematischen Grenzwertsatz ($\lambda \rightarrow$ Minimum)	34
5. STARR-PLASTISCHE TRAGLASTBESTIMMUNG MIT HILFE VON SPANNUNGSFUNKTIONEN	39
5.1 Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen	39
5.2 Zur Herleitung der linearen Programme nach dem statischen und dem kinematischen Grenzwertsatz	41
5.3 Einige Bemerkungen zur Anwendung von Spannungsfunktionen	43
6. ZUR PRAKTISCHEN DURCHFUEHRUNG VON TRAGLASTBERECHNUNGEN	44
6.1 Einleitung	44
6.2 Elementweise lineare und konstante Ansatzfunktionen	44
6.3 Topologische Eigenschaften von Dreiecks- und Vierecksmaschen	47
6.4 Kontinuitätsbedingungen und Randbedingungen	47
6.5 Zur Lösung des linearen Programms	49
6.6 Zur Interpretation der Resultate	51
6.7 Einige Scheiben- und Plattenlösungen	52
LITERATUR	57
ZUSAMMENFASSUNG - SUMMARY	59

1. EINLEITUNG

1.1 Zielsetzung und allgemeine Bemerkungen

Ziel dieser Arbeit ist die Darlegung theoretischer Grundlagen für die numerische Bestimmung der statischen Tragfähigkeit von zwei- und dreidimensionalen Tragwerken unter der Annahme eines starr-ideal-plastischen Materialverhaltens. Entscheidend bei diesen Verfahren ist die Wahl eines geeigneten mathematischen Modells. Dieses soll mit einem angemessenen Rechenaufwand zur Bestimmung eines brauchbaren Näherungswertes für die Traglast führen und gleichzeitig genügende Informationen über den Spannungs- und Verschiebungszustand im Zeitpunkt des Kollapses liefern. Die zur elastischen Analyse mehrdimensionaler Kontinuen öfters verwendete Methode der "finiten Elemente" wird zur Bildung solcher starr-plastischen Modelle beigezogen. Bekanntlich eignet sich diese Methode vorzüglich zur Aufstellung allgemeiner Computer-Programme, bei denen nur problemabhängige Daten jeweils zu spezifizieren sind, und die somit für alltägliche Ingenieurprobleme eingesetzt werden können.

Zur Berücksichtigung des plastischen Materialverhaltens wurden in den letzten Jahren zahlreiche numerische Verfahren vorgeschlagen. Die meisten davon stellen eine Erweiterung entsprechender linear-elastischer Verfahren dar, indem, bei den höheren Belastungsstufen, nicht-lineare Spannungs-Dehnungsbeziehungen zu Grunde gelegt werden. Besonders für Probleme des Bauingenieurwesens verlangen jedoch solche Verfahren einen oft nicht zumutbaren Rechenaufwand. Die Spezifikation der problemabhängigen Daten kann dabei ebenfalls Schwierigkeiten bereiten. Auf Grund der Plastizitätstheorie können hingegen Verfahren entwickelt werden, welche einen mit entsprechenden linear-elastischen Analysen vergleichbaren Rechenaufwand erfordern. Diese führen bekanntlich zur Formulierung von linearen Programmen. Weil die Annahmen der Plastizitätstheorie für viele Ingenieurprobleme mit genügender Approximation erfüllt sind, ist es durchaus denkbar, dass entsprechende voll-automatische Computer-Programme eine Reihe praktischer Anwendungen finden können.

Ein weiterer Vorteil plastischer Berechnungsmethoden besteht darin, dass Probleme der optimalen Bemessung auf verhältnismässig einfache Art damit behandelt werden können (siehe z. B. Wolfensberger [19], Anderheggen [1]). Es ist nämlich möglich, die gleichen mathematischen Modelle wie bei den entsprechenden Traglastberechnungen zu verwenden. Die Erweiterung der in der vorliegenden Arbeit entwickelten Theorie auf Probleme der plastischen optimalen Bemessung ist deswegen, abgesehen von rechentechnischen Schwierigkeiten, möglich.

Der Gedanke, finite Elemente für starr-plastische Berechnungen zu verwenden, ist schon früher angegriffen worden (siehe z. B. die etwas skizzenhafte Darstellung von Argyris [4] oder die Arbeit von Vollenweider [16]). Doch scheint eine zusammenfassende Darstellung der theoretischen Grundlagen zur Bildung geeigneter mathematischer Modelle, sowie eine saubere Herleitung der wichtigen "dualen" Beziehungen zwischen der statischen und der kinematischen Formulierung des Traglastproblems noch zu fehlen.

Was die Bildung mathematischer Modelle betrifft, hat man sich vor allem auf eine besondere Art neulich entwickelter numerischer Verfahren gestützt. Es handelt sich um die sogenannten "gemischten" oder "zwei-Feld"-Verfahren (siehe Prager [14], Herrmann [8], [9], Watwood und Hartz [18], Irons und Draper [10], Anderheggen [2], [3]), die

sich auf besondere Variationsprinzipien stützen (z.B. das Hellinger-Reissner Prinzip [15], siehe auch Washizu [17]) und bei denen sowohl Verschiebungs- als auch Spannungsansätze im Inneren des Kontinuums eingeführt werden müssen. Aus entsprechenden elastischen Verfahren rührt auch der Gedanke her, Spannungsfunktionen zu verwenden (siehe Elias [5] , Morley [13]).

Die vorliegende Arbeit soll in erster Linie als Grundlage zur Aufstellung von Computer-Programmen dienen. Das Hauptgewicht wird deswegen nicht auf die rein theoretischen Aspekte des Problems, sondern viel mehr auf eine möglichst klare, allgemeine und folglich zur Entwicklung von Algorithmen geeignete Darstellung der Theorie gesetzt. Vom Leser wird eine gewisse Vertrautheit mit den Problemen der Kontinuumsmechanik, vor allem mit der Plastizitätstheorie und mit der Methode der finiten Elemente für elastische Kontinua, sowie mit den Grundbegriffen der linearen Programmierung erwartet.

Wer aber, auf Grund der vorliegenden Arbeit, ein allgemein anwendbares Computer-Programm aufzustellen gedenkt, muss schon einige Kenntnisse in den Fragen der Programmierung besitzen. Die Anwendbarkeit solcher numerischer Verfahren wird nicht durch theoretisch sondern durch rechentechnisch bedingte Probleme begrenzt ("Computer shapes theory"!). Die Aufstellung wirtschaftlicher Computer-Programme ist somit ohne Zweifel das zentrale Problem solcher Verfahren, und soll das Thema zukünftiger Arbeiten darstellen.

1.2. Index- und Matrixschreibweise

Bei den in Indexschreibweise angegebenen Beziehungen gelten die üblichen Ableitungs- und Summenkonventionen. Allerdings soll die Summenkonvention nur für untere Indizes gelten. Als Beispiel sei folgender Ausdruck (vgl. Gleichung (3.36)) in vollständiger Form angegeben ($i, j \equiv x_1, x_2, x_3$ wobei $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$) :

$$\begin{aligned}
\varphi^e_{ik}\ \psi^e_{ijl,j} \equiv\ & \varphi^e_{xk}\left(\frac{\partial\psi^e_{xxl}}{\partial x} + \frac{\partial\psi^e_{xyl}}{\partial y} + \frac{\partial\psi^e_{xzl}}{\partial z}\right) + \\
+\ & \varphi^e_{yk}\left(\frac{\partial\psi^e_{yxl}}{\partial x} + \frac{\partial\psi^e_{yyl}}{\partial y} + \frac{\partial\psi^e_{yzl}}{\partial z}\right) + \\
+\ & \varphi^e_{zk}\left(\frac{\partial\psi^e_{zxl}}{\partial x} + \frac{\partial\psi^e_{zyl}}{\partial y} + \frac{\partial\psi^e_{zzl}}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Matrizen werden immer in eckigen Klammern, Vektoren in geschweiften Klammern dargestellt. Unter Vektoren versteht man Spaltenvektoren, d.h. Matrizen, die nur eine Spalte besitzen. Skalare Grössen werden ohne Klammern dargestellt. Ein oberer Index T bedeutet "transponiert". Die Summenkonvention gilt nicht für Matrizenindizes. Es gelten sonst die üblichen Konventionen der Matrizenrechnung.

Index- und Matrixschreibweise werden abwechslungsweise verwendet. Die in Indexschreibweise angegebenen Beziehungen betreffen immer dreidimensionale Kontinua in kartesische Koordinaten und sollen vor allem zur Erklärung der physikalischen Bedeutung der entsprechenden Matrizenkoeffizienten beitragen. Sie dienen somit zur Definition der Matrizen und

Vektoren, die sonst nicht definiert werden. Allgemeine Beziehungen werden hingegen immer in Matrixschreibweise angegeben, weil diese unabhängig vom Koordinatensystem und vom Tragwerktyp anwendbar ist. Es wird dem mit den Problemen der Kontinuumsmechanik vertrauten Leser nicht schwer fallen, die für jeden Tragwerktyp zutreffenden Definitionen der eingeführten Matrizen und Vektoren zu finden. Ein Beispiel dafür wird im nächsten Abschnitt gegeben.

1.3. Mathematische Problemstellung

Man betrachte ein Kontinuum mit Volumen V und Aussenfläche $F = F_u + F_f$ (siehe Fig. 1). Die in Richtung der drei kartesischen Koordinaten definierten Verschiebungen u_i ($i \equiv x, y, z$) sollen auf dem F_f-Teil der Aussenfläche F verschwinden. Das Kontinuum ist durch Massenkräfte λg_i und Oberflächenspannungen λf_i belastet. λ ist der zu bestimmende "Traglastfaktor". Die Massenkräfte g_i sind im Innern des Kontinuums vorgeschrieben, die Spannungen f_i auf den F_f-Teil der Aussenfläche. Die Dehnungen und die Spannungen im Innern des Kontinuums werden mit ε_{ij} bzw. σ_{ij} bezeichnet.

Die Verschiebungen u_i und die Dehnungen ε_{ij} sind untereinander kinematisch verträglich, wenn folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad \text{innerhalb } V \tag{1.2}$$

$$u_i = 0 \qquad \text{auf } F_u \tag{1.3}$$

Die Spannungen σ_{ij} und die Lasten λg_i und λf_i bilden ein Gleichgewichtssystem, wenn folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$\sigma_{ij,j} = -\lambda g_i \qquad \text{innerhalb } V \tag{1.4}$$

$$\sigma_{ij}\, \nu_j = \lambda f_i \qquad \text{auf } F_f \tag{1.5}$$

wobei ν_j der cosinus des Winkels zwischen der Koordinatenrichtung j und der Aussennormale zur Fläche F_f ist.

Man betrachte ein Geschwindigkeitsfeld $\dot{u}_i$. Die Leistung L der äusseren Lasten λg_i und λf_i lässt sich wie folgt berechnen:

$$L = \lambda \iiint_V \dot{u}_i\, g_i\, dV + \lambda \iint_{F_f} \dot{u}_i\, f_i\, dF \tag{1.6}$$

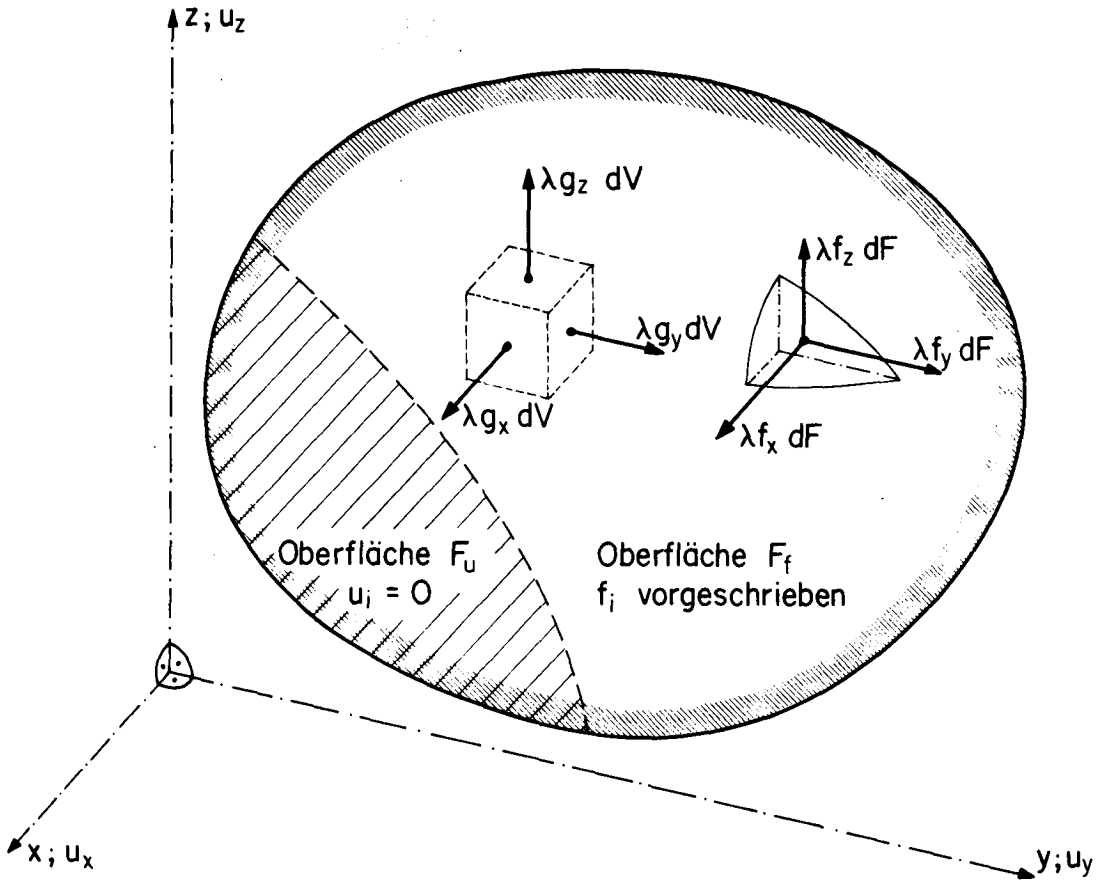


Fig. 1 : Dreidimensionales Kontinuum belastet durch Massenkräfte λg_i und Oberflächenspannungen λf_i

Man betrachte ein Dehnungsgeschwindigkeitsfeld $\dot{\varepsilon}_{ij}$.
Die in der Plastizitätstheorie oft als Dissipationsleistung bezeichnete Leistung der inneren Spannungen wird aus dem Ausdruck bestimmt:

$$D = \iiint_V \dot{\epsilon}_{ij}\, \sigma_{ij}\, dV \tag{1.7}$$

In Matrixschreibweise werden die Beziehungen (1.6) und (1.7) wie folgt dargestellt:

$$L = \lambda \iiint_V \{\dot{u}\}^T \{g\}\, dV + \lambda \iint_{F_f} \{\dot{u}\}^T \{f\}\, dF \tag{1.8}$$

$$D = \iiint_V \{\dot{\epsilon}\}^T \{\sigma\}\, dV \tag{1.9}$$

wobei die Definition der verschiedenen Vektoren aus (1.6) und (1.7) folgt (*).

Im Innern des Kontinuums sind die vom Material aufnehmbaren Spannungen durch folgende Plastizitätsbedingung begrenzt:

$$f(\sigma_{ij}) \leq c \tag{1.10}$$

wobei f eine material- und folglich ortsabhängige Funktion der Spannungen σ_{ij}, und c eine positive Materialkonstante sind. Während des Kollapses gelten, auf Grund der Theorie des plastischen Potentials, folgende Beziehungen zwischen den Spannungen σ_{ij} und den Dehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\varepsilon}_{ij}$:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\alpha} \quad \begin{cases} \dot{\alpha} \geq 0 & \text{falls} \quad f(\sigma_{ij}) = c \\ \dot{\alpha} = 0 & \text{falls} \quad f(\sigma_{ij}) < c \end{cases} \tag{1.11}$$

wobei $\dot{\alpha}$ ein beliebiger nicht-negativer Faktor ist.

Bekanntlich kann der Traglastfaktor λ sowohl auf Grund des statischen (oder unteren) wie auch auf Grund des kinematischen (oder oberen) Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie ermittelt werden. Die mathematische Problemstellung lautet wie folgt:

Nach dem statischen Grenzwertsatz:

Es ist ein möglichst grosser Wert des Traglastfaktors λ zu suchen. Die entsprechenden Belastungen λg_i und λf_i müssen mit den Spannungen σ_{ij} ein Gleichgewichtssystem bilden. Zudem dürfen die Spannungen σ_{ij} die Plastizitätsbedingung (1.6) nirgends verletzen.

Nach dem kinematischen Grenzwertsatz:

Es ist ein möglichst kleiner Wert des Traglastfaktors λ zu suchen. Im Kollapszustand ist die Leistung L der entsprechenden Belastungen λg_i und λf_i gleich der inneren Dissipationsleistung D. Die zur Bestimmung von L verwendeten Verschiebungsgeschwindigkeiten $\dot{u}_i$ und die zur Bestimmung von D verwendeten Dehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\varepsilon}_{ij}$ müssen untereinander kinematisch verträglich sein.

(*) Die Gleichungen (1.8) und (1.9) gelten für jeden Tragwerktyp. Für nur durch Vertikallasten beanspruchten Platten nach der klassischen Kirchoff'schen Theorie sind z.B. die verschiedenen Vektoren wie folgt zu definieren:

$$\{u\} \equiv w \qquad \{g\} \equiv g \qquad \{\dot{\epsilon}\} \equiv \begin{Bmatrix} \dot{\kappa}_x \\ \dot{\kappa}_y \\ 2\dot{\kappa}_{xy} \end{Bmatrix} \qquad \{\sigma\} \equiv \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix}$$

wobei $w=u_z$ die Plattendurchbiegung, $g=g_z$ die verteilten Belastung pro Flächeneinheit, κ_x κ_y und κ_{xy} die beiden Krümmungen und die Verwindung der Plattenmittelfläche und m_x m_y m_{xy} die Momente pro Einheitsbreite der Platte darstellen.

Die in der vorliegenden Arbeit dargestellten Verfahren sind Näherungsverfahren. Es wird nicht ein exakter Wert und auch nicht ein unterer oder ein oberer Grenzwert, sondern lediglich ein brauchbarer und bei Verfeinerung des mathematischen Modells konvergierender Näherungswert für den Traglastfaktor λ gesucht. Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen werden durch eine beschränkte Anzahl linearer Gleichungen diskret formuliert. Diese werden auf Grund der Variationsprinzipien der virtuellen Verschiebungen und der virtuellen Spannungen hergeleitet. Die mikroskopischen Verträglichkeits- und Gleichgewichtsgleichungen (1.2), (1.3) bzw. (1.4), (1.5) können deswegen im allgemeinen verletzt sein.

2. AUFSTELLUNG VON LINEAREN PLASTIZITAETSBEDINGUNGEN UND BERECHNUNG DER INNEREN DISSIPATIONSLEISTUNG

2.1 Aufstellung von linearen Plastizitätsbedingungen

Im Innern des Kontinuums sind Q Punkte mit Koordinaten x_q, y_q, z_q (q = 1 bis Q) zu wählen. In diesen Punkten wird kontrolliert, dass die Spannungen σ^q_{ij} die Plastizitätsbedingungen nicht verletzen. Eine Plastizitätsbedingung im Kontrollpunkt q schreibt sich wie folgt:

$$0 \leq c^q - f^q(\sigma^q_{ij}) \tag{2.1}$$

wobei c^q eine Materialkonstante und $f^q(\sigma^q_{ij})$ eine materialabhängige Funktion der Spannungen σ^q_{ij} im Punkt q sind. Die Gleichung:

$$0 = c^q - f^q(\sigma^q_{ij}) \tag{2.2}$$

stellt, im σ^q_{ij}-Raum, eine Fliessfigur dar.

Für die numerische Behandlung des Traglastproblems mit Hilfe der linearen Programmierung ist es notwendig, die allgemeine Plastizitätsbedingung (2.1) zu linearisieren. Für jeden Kontrollpunkt q wird dabei eine bestimmte Anzahl H_q von linearen Ungleichungen eingeführt. Diese schreiben sich in Indexschreibweise:

$$0 \leq c^{hq} - f^{hq}_{ij}\,\sigma^q_{ij} \qquad (h = 1 \text{ bis } H_q) \tag{2.3}$$

in Matrixschreibweise:

$$0 \leq c^{hq} - \{f^{hq}\}^T\{\sigma^q\} \qquad (h = 1 \text{ bis } H_q) \tag{2.4}$$

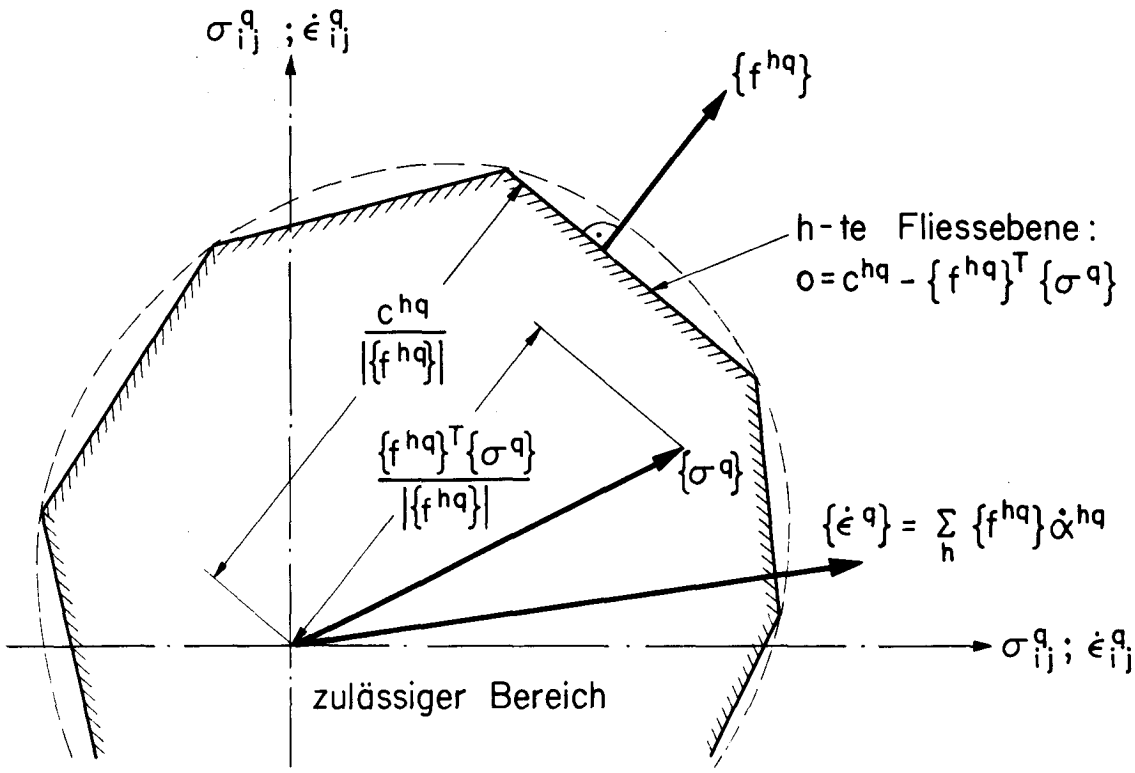


Fig. 2 : Schnitt durch eine linearisierte Fliessfigur im σ^q_{ij} - $\dot{\epsilon}^q_{ij}$ - Raum am Kontrollpunkt q.

oder:

$$0 \leq \{c^q\} - [f^q]^T \{\sigma^q\} \tag{2.5}$$

Die Definition der Vektoren $\{f^{hq}\}$, $\{\sigma^q\}$ und $\{c^q\}$, sowie der Matrix $[f^q]$ folgt aus (2.3) und (2.4). Die Fliessfigur wird zu einem Polyeder, welches von H_q Fliessebenen :

$$0 = c^{hq} - f^{hq}_{ij}\, \sigma^q_{ij} = c^{hq} - \{f^{hq}\}^T \{\sigma^q\} \tag{2.6}$$

begrenzt wird. Dabei stehen die $\{f^{hq}\}$-Vektoren senkrecht zu den entsprechenden Fliessebenen und sind nach der Aussenseite des zulässigen Spannungsbereiches gerichtet.

Die Ungleichungen (2.4) sagen, dass die Projektion des Spannungsvektors $\{\sigma^q\}$ auf jeden der $\{f^{hq}\}$-Vektoren nicht grösser als $c^{hq}/|\{f^{hq}\}|$ sein darf. Fig. 2 zeigt, dass, falls alle diese Bedingungen erfüllt sind, der Spannungsvektor den zulässigen Bereich nicht überschreiten kann. Im Abschnitt 2.5 wird geschildert, wie in praktischen Fällen durch einfache geometrische Betrachtungen lineare Plastizitätsbedingungen aufgestellt werden können.

2.2 Berechnung der inneren Dissipationsleistung

Aus der Theorie des plastischen Potentials ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den Spannungen σ_{ij}^q und den zugehörigen Dehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}_{ij}^q$ im Kontrollpunkt q :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^q = \frac{\partial f^q(\sigma_{ij}^q)}{\partial \sigma_{ij}^q} \dot{\alpha}^q \qquad \begin{cases} \dot{\alpha}^q \geq 0 & \text{wenn} \quad 0 = c^q - f^q(\sigma_{ij}^q) \\ \dot{\alpha}^q = 0 & \text{wenn} \quad 0 < c^q - f^q(\sigma_{ij}^q) \end{cases} \tag{2.7}$$

Wird die Fliessfigur durch Fliessebenen "linearisiert", ergeben sich anstelle von (2.7) folgende Beziehungen:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^q = \sum_h f_{ij}^{hq} \dot{\alpha}^{hq} \qquad \begin{cases} \dot{\alpha}^{hq} \geq 0 & \text{wenn} \quad 0 = c^{hq} - f_{ij}^{hq} \sigma_{ij}^q \\ \dot{\alpha}^{hq} = 0 & \text{wenn} \quad 0 < c^{hq} - f_{ij}^{hq} \sigma_{ij}^q \end{cases} \tag{2.8}$$

oder, in Matrixschreibweise:

$$\{\dot{\epsilon}^q\} = \sum_h \{f^{hq}\} \dot{\alpha}^{hq} = [f^q] \{\dot{\alpha}^q\} \qquad \begin{cases} \dot{\alpha}^{hq} \geq 0 & \text{wenn} \quad 0 = c^{hq} - \{f^{hq}\}^T \{\sigma^q\} \\ \dot{\alpha}^{hq} = 0 & \text{wenn} \quad 0 < c^{hq} - \{f^{hq}\}^T \{\sigma^q\} \end{cases} \tag{2.9}$$

Zur Bestimmung der inneren Dissipationsleistung wird jedem der Q Kontrollpunkte ein Volumenelement ΔV_q zugeordnet. Innerhalb ΔV_q sollen überall dieselben Plastizitätsbedingungen und folglich dieselben Spannungs-Dehnungsbeziehungen gelten. Die Dissipationsleistung D_q eines solchen Volumenelementes berechnet sich dann wie folgt:

$$D_q = \iiint_{\Delta V_q} \dot{\epsilon}_{ij}^q \sigma_{ij}^q \, dV = \iiint_{\Delta V_q} \{\dot{\epsilon}^q\}^T \{\sigma^q\} \, dV \tag{2.10}$$

Durch Verwendung von (2.9) erhält man:

$$D_q = \sum_h \iiint_{\Delta V_q} \dot{\alpha}^{hq} \{f^{hq}\}^T \{\sigma^q\} \, dV \tag{2.11}$$

Weil, auf Grund von (2.9), an den Stellen, wo $\dot{\alpha}^{hq} \neq 0$ ist, $\{f^{hq}\}^T\{\sigma^q\} = c^{hq}$ sein muss, und weil an den Stellen, wo $\{f^{hq}\}^T\{\sigma^q\} \neq c^{hq}$ ist, $\dot{\alpha}^{hq} = 0$ sein muss, kann das Integral (2.11) wie folgt umgeformt werden:

$$D_q = \sum_h c^{hq} \iiint_{\Delta V_q} \dot{\alpha}^{hq} \, dV \tag{2.12}$$

Führt man die neuen Variablen $\dot{\beta}^{hq}$ ein:

$$\dot{\beta}^{hq} \equiv \iiint_{\Delta V_q} \dot{\alpha}^{hq} \, dV \geq 0 \tag{2.13}$$

erhält man:

$$D_q = \sum_h c^{hq} \dot{\beta}^{hq} = \{c^q\}^T \{\dot{\beta}^q\} \tag{2.14}$$

Die Dissipationsleistung D des gesamten Tragwerkes erhält man durch Summation über alle Volumenelemente:

$$D = \sum_q D_q = \sum_q \{c^q\}^T \{\dot{\beta}^q\} \tag{2.15}$$

Es sei zum Schluss noch erwähnt, dass die eben eingeführten Volumenelemente nichts mit "finiten Elemente" zu tun haben. Der Begriff der finiten Elemente wird erst im Zusammenhang mit Verschiebungs- und Spannungsansätzen eingeführt.

2.3 Anderer Weg zur Aufstellung linearer Plastizitätsbedingungen

In diesem Abschnitt wird ein anderes, jedoch zu dem früheren völlig äquivalentes Verfahren zur Aufstellung linearer Plastizitätsbedingungen entwickelt. Fig. 3 zeigt eine ähnliche Fliessfigur wie Fig. 2. Es werden die Vektoren $\{\hat{e}^{rq}\}$ und $\{\bar{e}^{sq}\}$ eingeführt. Die $\{\hat{e}^{rq}\}$ ($r = 1$ bis R_q) sind "Eckpunktvektoren"; sie verbinden den Spannungsnullpunkt mit den Ecken der linearisierten Fliessfigur. Die $\{\bar{e}^{sq}\}$ ($s = 1$ bis S_q) sind "Richtungsvektoren"; sie zeigen die Richtungen, in welchen die Spannungen unbeschränkt wachsen können (ein hydrostatischer Druck entspricht zum Beispiel in der Regel einer solchen Richtung). Richtungsvektoren gibt es nur, wenn die Fliessfigur nicht geschlossen ist.

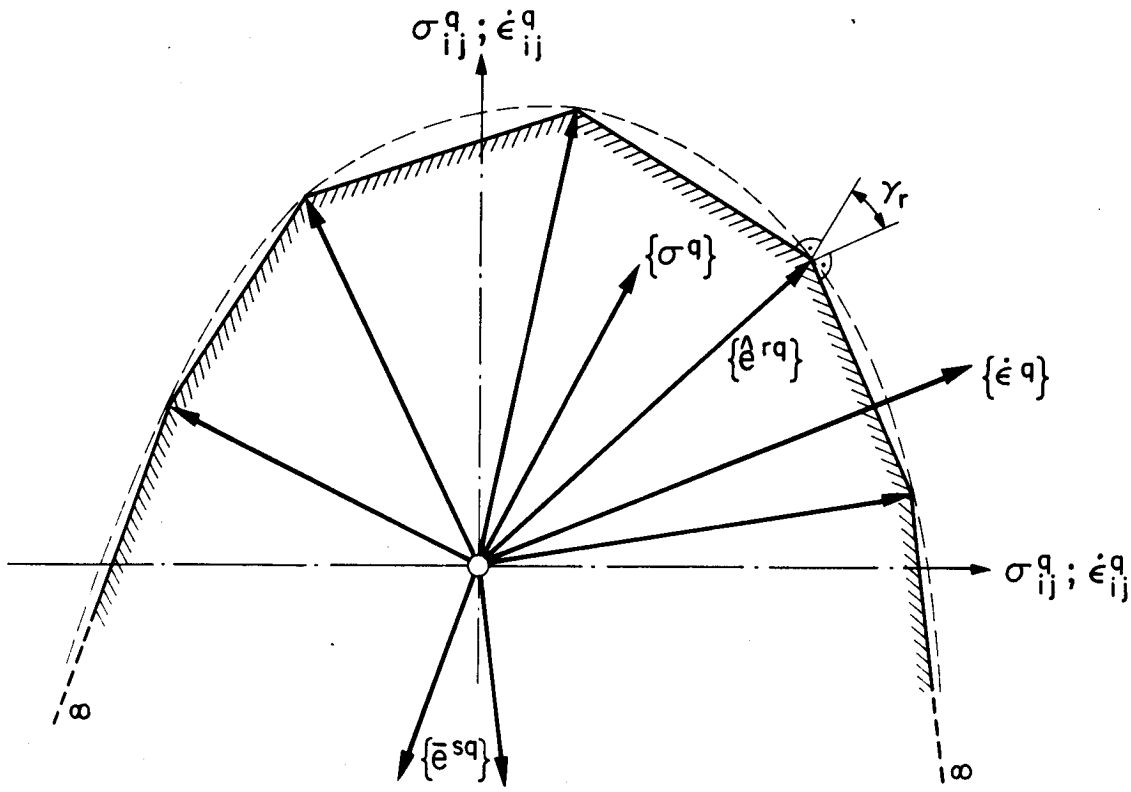


Fig. 3 : Eckpunkt - und Richtungsvektoren bei einer linearisierten Fliessfigur im $\sigma^q_{ij} - \dot{\epsilon}^q_{ij}$ - Raum.

Der Spannungsvektor $\{\sigma^q\}$ kann als Funktion der $\{\hat{e}^{rq}\}$- und der $\{\bar{e}^{sq}\}$-Vektoren dargestellt werden:

$$\{\sigma^q\} = \sum_r \{\hat{e}^{rq}\}\, \hat{\mu}^{rq} + \sum_s \{\bar{e}^{sq}\}\, \bar{\mu}^{sq} = [\hat{e}^q]\{\hat{\mu}^q\} + [\bar{e}^q]\{\bar{\mu}^q\} \tag{2.16}$$

in Indexschreibweise:

$$\sigma^q_{ij} = \sum_r \hat{e}^{rq}_{ij}\, \hat{\mu}^{rq} + \sum \bar{e}^{sq}_{ij}\, \bar{\mu}^{sq} \tag{2.17}$$

wobei die $\hat{\mu}^{rq}$ und die $\bar{\mu}^{sq}$ Spannungsparameter sind. Man kann dann zeigen, dass die Plastizitätsbedingungen nicht verletzt werden können, und dass der Spannungsvektor jeden Punkt innerhalb der Fliessfigur erreichen kann, wenn folgende einfache Ungleichungen erfüllt sind:

$$\hat{\mu}^{rq} \geq 0 \qquad (r = 1 \text{ bis } R_q)$$
$$\bar{\mu}^{sq} \geq 0 \qquad (s = 1 \text{ bis } S_q) \tag{2.18}$$
$$\sum \hat{\mu}^{rq} \leq 1$$

Diese Ungleichungen sind folglich den Ungleichungen (2.4) völlig äquivalent. Ein solches Vorgehen wird bei dem sogenannten "Dekompositionsverfahren" zur Lösung von linearen Programmen verwendet, deren Koeffizentenmatrix eine geeignete Struktur aufweist (siehe [7], [8]). Die Parametertransformationen (2.16) und die Ungleichungen (2.18) werden deswegen zur Lösung von Traglastproblemen, die sich nach dem Dekompositionsverfahren behandeln lassen, Anwendung finden (siehe Kap. 4).

Der Algorithmus zur Bestimmung der $\{\hat{e}^{rq}\}$- und $\{\bar{e}^{sq}\}$-Vektoren ausgehend von den $\{c^q\}$- und $\{f^{hq}\}$-Vektoren würde dem Algorithmus zur Bestimmung von zulässigen Basislösungen in einem linearen Programm entsprechen. Allerdings können die $\{\hat{e}^{rq}\}$- und die $\{\bar{e}^{sq}\}$-Vektoren aus einfachen geometrischen Ueberlegungen bestimmt werden. Abschnitt 2.5 gibt einige Beispiele dafür.

2.4 Entsprechende Berechnung der Dissipationsleistung

Wird im $\dot{\varepsilon}^q_{ij}$ -Raum die Richtung eines Dehnungsvektors angegeben, ist der zugehörige Spannungszustand auf Grund der Theorie des plastischen Potentials bestimmt. Der Spannungsvektor $\{\sigma^q\}$ muss nämlich einer Ecke der Fliessfigur entsprechen, und zwar derjenigen, deren Aussenwinkel γ_r (siehe Fig. 3) die Richtung von $\{\dot{\varepsilon}^q\}$ einschliesst. Zur Bestimmung dieser Ecke, d.h. zur Bestimmung des dem Spannungsvektor $\{\sigma^q\}$ entsprechenden Eckpunktvektors $\{\hat{e}^{rq}\}$ gilt folgende Bedingung:

$$\{\sigma^q\} = \{\hat{e}^{rq}\} \qquad \text{für} \qquad \{e^{rq}\}^T\{\dot{\epsilon}^q\} = \underset{r}{\text{Maximum}} \tag{2.19}$$

(2.19) sagt aus, dass der Spannungsvektor $\{\sigma^q\}$ demjenigen Eckpunktvektor $\{\hat{e}^{rq}\}$ entsprechen muss, dessen Projektion auf $\{\dot{\varepsilon}^q\}$ am grössten ist. Der Spannungsvektor ist nur dann unbestimmt, wenn der Vektor $\{\dot{\varepsilon}^q\}$ gerade senkrecht zu einer Fliessebene steht. Das hat aber für die Leistungsberechnung keine Folgen.

Die Dissipationsleistung D_q eines Volumenelementes q berechnet sich dann folgendermassen:

$$D_q = \iiint_{\Delta V_q} \{\sigma^q\}^T\{\dot{\epsilon}^q\}\, dV = \iiint_{\Delta V_q} \underset{r}{\text{Maximum}} \left(\{\hat{e}^{rq}\}^T\{\dot{\epsilon}^q\}\right) dV \geq 0 \tag{2.20}$$

Wird angenommen, dass innerhalb ΔV_q der Spannungsvektor $\{\sigma^q\}$ überall derselben Ecke $\{\hat{e}^{rq}\}$ der Fliessfigur entspricht, enthält man:

$$D_q = \underset{r}{\text{Maximum}} \left(\{\hat{e}^{rq}\}^T \iiint_{\Delta V_q} \{\dot{\epsilon}^q\} \, dV \right) = \underset{r}{\text{Maximum}} \left(\hat{D}_q^r \right) \geq 0 \tag{2.21}$$

wobei:

$$\hat{D}_q^r \equiv \{\hat{e}^{rq}\}^T \iiint_{\Delta V_q} \{\dot{\epsilon}^q\} \, dV \tag{2.22}$$

Auf Grund von (2.21) ergeben sich folgende Ungleichungen:

$$0 \leq - \hat{D}_q^r + D_q \qquad (\text{für} \quad r = 1 \quad \text{bis} \quad R_q) \tag{2.23}$$

Bis jetzt wurde der Dehnungsgeschwindigkeitsvektor $\{\dot{\varepsilon}^q\}$ keiner Bedingung unterworfen. Fig. 3 zeigt aber, dass die Projektion von $\{\dot{\varepsilon}^q\}$ auf jedem der Richtungsvektoren $\{\bar{e}^{sq}\}$ keinen positiven Wert annehmen darf. Wäre dies nämlich der Fall, würde der entsprechende Spannungsvektor $\{\sigma^q\}$ unendlich gross. Zum Beispiel darf für die Materialien, die einen unendlich grossen hydrostatischen Druck ohne zu fliessen aufnehmen können, keine plastische Volumenverminderung entstehen. Diese Bedingungen schreiben sich wie folgt:

$$0 \geq \{\bar{e}^{sq}\}^T \{\dot{\epsilon}^q\} \qquad (\text{für} \quad s = 1 \quad \text{bis} \quad S_q) \tag{2.24}$$

Durch Integration über ΔV_q erhält man, den Ungleichungen (2.23) entsprechend:

$$0 \leq - \bar{D}_q^s \qquad (\text{für} \quad s = 1 \quad \text{bis} \quad S_q) \tag{2.25}$$

wobei:

$$\bar{D}_q^s \equiv \{\bar{e}^{sq}\}^T \iiint_{\Delta V_q} \{\dot{\epsilon}^q\} \, dV \tag{2.26}$$

Die Ungleichungssysteme (2.23) und (2.25) werden zur Bildung der linearen Programme von Abschnitt 4.2 verwendet.

2.5 Beispiele

Die Figuren 4 bis 7 zeigen einige linearisierte Fliessfiguren für Scheiben und Platten. Die zu den Fliessebenen senkrecht stehenden Vektoren $\{f^{hq}\}$ (bezeichnet mit den Nummern 1, 2, 3, ...), sowie die Eckpunktvektoren $\{\hat{e}^{rq}\}$ (Nummern $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, ...) und die Richtungsvektoren $\{\bar{e}^{sq}\}$ (Nummern $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, ...) sind durch Pfeile dargestellt. Die Komponenten dieser Vektoren bilden jeweils die Kolonnen der Matrizen $[f^q]$, $[\hat{e}^q]$ oder $[\bar{e}^q]$. Diese Matrizen können, zusammen mit dem Vektor $\{c^q\}$, zur Aufstellung von linearen Plastizitätsbedingungen nach (2.5) oder (2.16), (2.18) verwendet werden.

Für Scheiben werden die linearisierten Fliessfiguren im ($\sigma_x = \sigma_{xx}$, $\sigma_y = \sigma_{yy}$, $\tau = \sigma_{xy}$)-Raum dargestellt. Der entsprechende Spannungsvektor ist wie folgt definiert:

$$\{\sigma^q\} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x^q \\ \sigma_y^q \\ \tau^q \end{Bmatrix}_{3x1} \tag{2.27}$$

Für Platten werden die Fliessfiguren im (m_x, m_y, m_{xy})-Raum dargestellt wobei m_x, m_y und m_{xy} die wie üblich definierten Momente pro Einheitsbreite der Platte sind. Der Spannungsvektor ist wie folgt definiert:

$$\{\sigma^q\} \equiv \begin{Bmatrix} m_x^q \\ m_y^q \\ m_{xy}^q \end{Bmatrix}_{3x1} \tag{2.28}$$

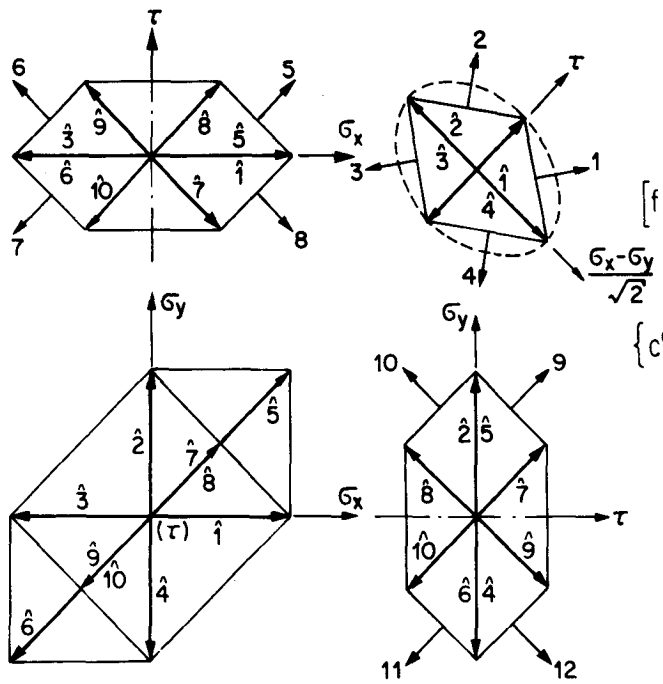
2.5.1. Ebener Spannungszustand, Fliesshypothese von Tresca (Fig. 4)

Die Fliesshypothese von Tresca besagt, dass plastisches Fliessen eintreten muss, wenn die maximale Schubspannung einen bestimmten Grenzwert $\tau_{max} = c$ erreicht. Für ebene Spannungszustände ($\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$) ist die entsprechende Fliessfigur ein elliptischer Zylinder, welcher von zwei Kegeln begrenzt ist. Der elliptische Zylinder hat die Gleichung:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 4c^2 \tag{2.29}$$

seine Achse entspricht der Geraden $\sigma_x = \sigma_y$, $\tau = 0$. Die beiden Kegel haben die Gleichungen :

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = \left[4c \pm (\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 \tag{2.30}$$

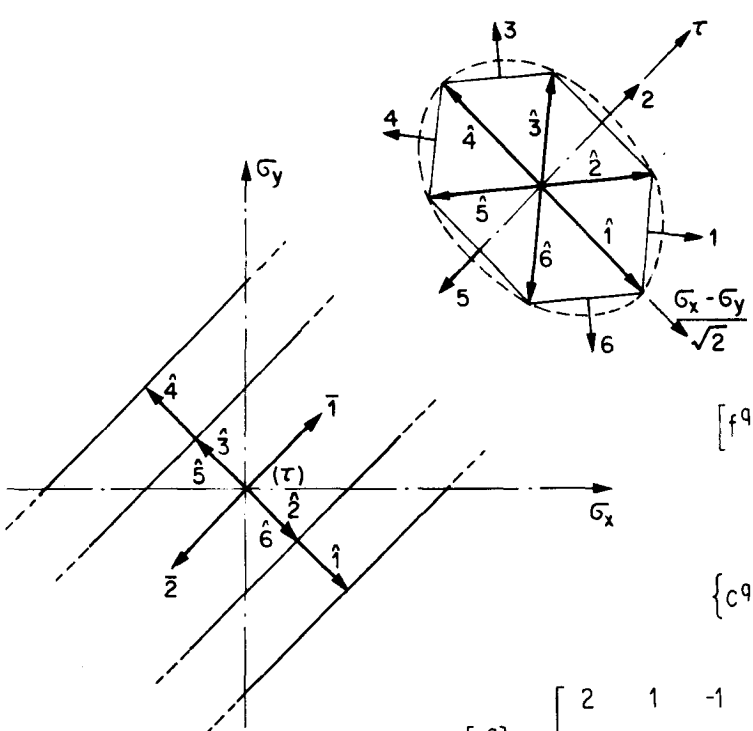


$$[f^q] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 12} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\{c^q\} = \langle c \quad c \quad c \quad c \quad c \quad c \quad c \quad c \quad c \quad c \quad c \quad c \rangle^T$$

$$[\hat{e}^q] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 2 & -2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 10} \cdot c$$

Fig. 4 : Ebener Spannungszustand. Fliesshypothese von Tresca $\tau_{max} = c$



$$[f^q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2/\sqrt{3} & 2 & 2/\sqrt{3} & -2/\sqrt{3} & -2 & -2/\sqrt{3} \end{bmatrix}_{3\times 6} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\{c^q\} = \langle c \quad c \quad c \quad c \quad c \quad c \rangle^T$$

$$[\hat{e}^q] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{bmatrix}_{3\times 6} \cdot \frac{c}{2} \qquad [\bar{e}^q] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Fig. 5 : Ebener Dehnungszustand. Fliesshypothese von Tresca oder von v.Mises : $(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 4c^2 = 4\tau_{max}^2$

ihre Spitzen liegen bei $\sigma_x = \sigma_y = \pm 2c$, $\tau = 0$. Die Fliessfigur wird durch 12 Fliessebenen approximiert. Damit ergeben sich 10 Eckpunktvektoren und keine Richtungsvektoren, da die Fliessfigur geschlossen ist.

2.5.2. Ebener Dehnungszustand: Fliesshypothese von Tresca oder von v. Mises (Fig. 5)

Die Fliesshypothesen von Tresca und von v. Mises sind im Fall eines ebenen Dehnungszustandes ($\dot{\varepsilon}_{zz} = \dot{\varepsilon}_{zx} = \dot{\varepsilon}_{zy} = 0$; $\sigma_z = (\sigma_x + \sigma_y)/2$; $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$) identisch. Die Fliessfigur ist ein elliptischer Zylinder mit der Gleichung:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = 4c^2 \tag{2.31}$$

Fig. 5 zeigt, wie diese Fliessfigur durch 6 Fliessebenen approximiert werden kann. Es ergeben sich 6 Eckpunktvektoren (obwohl die Fliessfigur eigentlich keine "Ecke" hat) und 2 Richtungsvektoren, welche den Richtungen eines hydrostatischen Zuges bzw. Druckes entsprechen.

2.5.3. Ebener Dehnungszustand: Fliesshypothese von Mohr (Fig. 6)

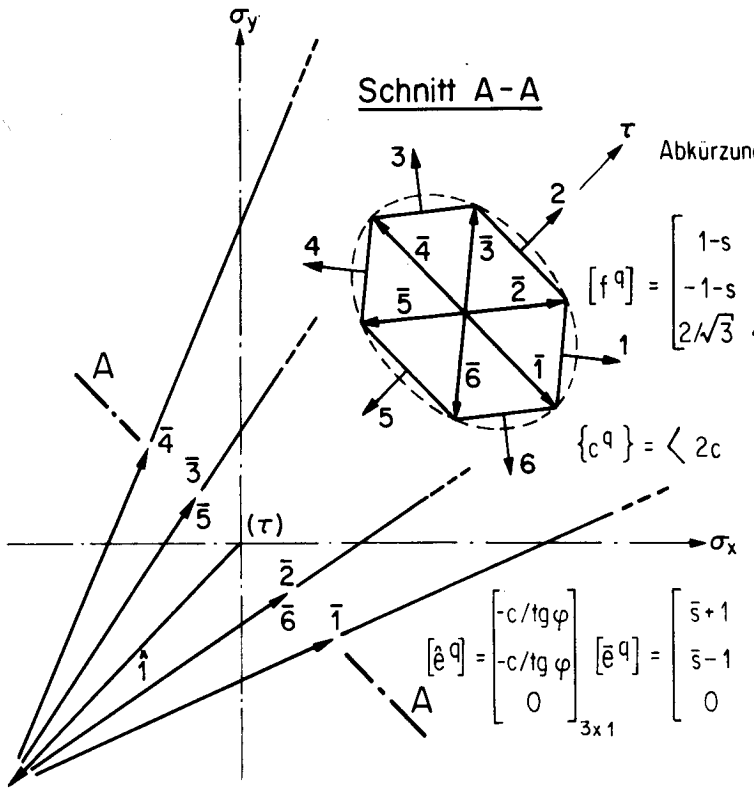
Die Fliessfigur von Mohr ist ein elliptischer Kegel mit der Gleichung:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = \left[2c \cos\varphi + (\sigma_x + \sigma_y) \sin\varphi\right] \tag{2.32}$$

wobei c der Kohäsionskoeffizent und φ der Winkel der inneren Reibung sind. Fig. 6 zeigt den Grundriss dieses Kegels in der σ_x-σ_y-Ebene, sowie einen Schnitt durch die Ebene $\sigma_x + \sigma_y = 0$. Die Fliessfigur wird durch 6 Fliessebenen approximiert. Es ergeben sich damit 6 Richtungsvektoren und nur ein Eckpunktsvektor $\{\hat{e}^{1q}\}$, welcher den Spannungsnullpunkt mit der Spitze des Kegels verbindet.

2.5.4. Stahlbetonplatten: Fliesshypothese von Wolfensberger (Fig. 7)

Für Stahlbetonplatten schlägt Wolfensberger [19] die in Fig. 7 dargestellte Fliessfigur vor. Dabei stellen P_x und N_x den positiven und den negativen Fliessmoment in x-Richtung dar. P_y und N_y sind die entsprechenden Fliessmomente in y-Richtung. Bei der Fliessfigur von Fig. 7 wird noch angenommen, dass $(P_x + N_x) < (P_y + N_y)$ ist, und dass die Armierung nur in x- und y-Richtung verlegt wird (orthogonale Armierung).



Abkürzungen: $s = \sin\varphi \qquad \bar{s} = 1/\sin\varphi$

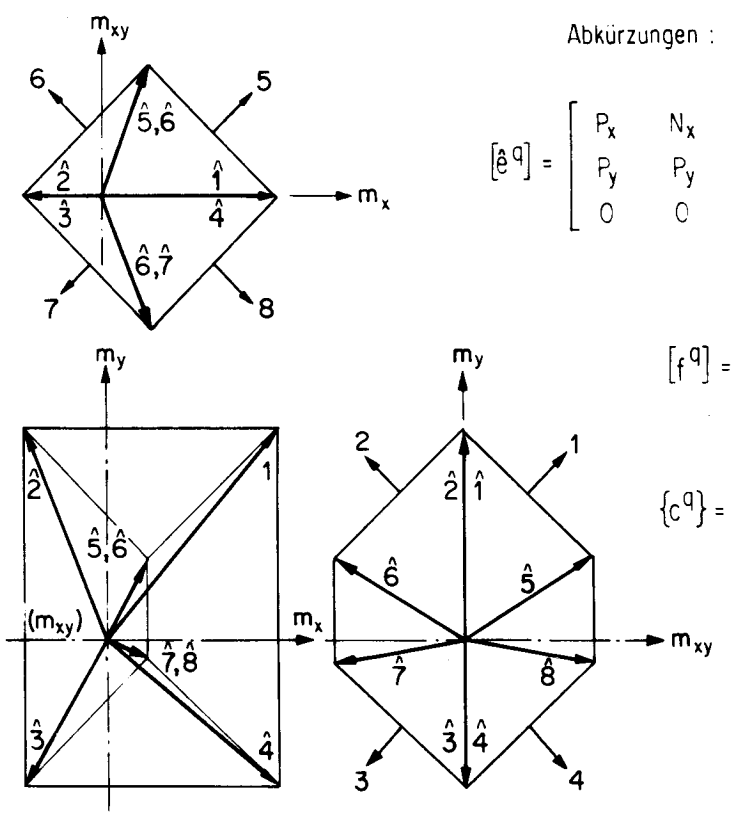
$$[f^q] = \begin{bmatrix} 1-s & -s & -1-s & -1-s & -s & 1-s \\ -1-s & -s & 1-s & 1-s & -s & -1-s \\ 2/\sqrt{3} & 4/\sqrt{3} & 2/\sqrt{3} & -2/\sqrt{3} & -4/\sqrt{3} & -2/\sqrt{3} \end{bmatrix}_{3\times 6} \cdot \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$\{c^q\} = \langle 2c \quad 2c \quad 2c \quad 2c \quad 2c \quad 2c \rangle^T$$

$$[\hat{e}^q] = \begin{bmatrix} -c/\mathrm{tg}\,\varphi \\ -c/\mathrm{tg}\,\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times 1} \qquad [\bar{e}^q] = \begin{bmatrix} \bar{s}+1 & \bar{s}+.5 & \bar{s}-.5 & \bar{s}-1 & \bar{s}-.5 & \bar{s}+.5 \\ \bar{s}-1 & \bar{s}-.5 & \bar{s}+.5 & \bar{s}+1 & \bar{s}+.5 & \bar{s}-.5 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}_{3\times 6}$$

Fig. 6: Ebener Dehnungszustand: Fliesshypothese von Mohr

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2 = [2c\cdot\cos\varphi + (\sigma_x + \sigma_y)\sin\varphi]^2$$



Abkürzungen: $S = \dfrac{P_x + N_x}{2} \qquad D = \dfrac{P_x - N_x}{2}$

$$[\hat{e}^q] = \begin{bmatrix} P_x & N_x & N_x & P_x & D & D & D & D \\ P_y & P_y & N_y & N_y & P_y-D & P_y-D & D-N_y & D-N_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & -S & -S & S \end{bmatrix}_{3\times 8}$$

$$[f^q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 8}$$

$$\{c^q\} = \langle P_y \quad P_y \quad N_y \quad N_y \quad P_x \quad N_x \quad N_x \quad P_x \rangle^T$$

Fig. 7: Stahlbetonplatten mit orthogonaler Armierung. Fliesshypothese von Wolfensberger

3. STARR-PLASTISCHE TRAGLASTBESTIMMUNG

3.1 Verschiebungs- und Spannungsansätze

Die numerische Lösung des Traglastproblems erfordert die Einführung von Ansätzen für die Verschiebungen u_i und für die Spannungen σ_{ij} im Innern des Kontinuums. Für die Verschiebungen u_i sollen folgende Beziehungen gelten:

$$u_i(x,y,z) = \Phi_{im}(x,y,z)\ W_m \tag{3.1}$$

wobei die W_m (m = 1 bis M) Verschiebungsparameter und die Φ_{im} Ansatzfunktionen sind. Diese müssen, entsprechend (1.3), der Bedingung genügen:

$$u_i = \Phi_{im} = 0 \quad \text{in} \quad F_u \tag{3.2}$$

Für die Spannungen σ_{ij} sollen folgende Beziehungen gelten:

$$\sigma_{ij}(x,y,z) = \Psi_{ijn}(x,y,z)\ S_n \tag{3.3}$$

wobei die S_n (n = i bis N) Spannungsparameter und die Ψ_{ijn} Ansatzfunktionen sind. Aus Gleichgewichtsgründen muss $\Psi_{ijn} = \Psi_{jin}$ sein.

Zur Bildung der Verschiebungs- und Spannungsansätze wird das Kontinuum in E "finite Elemente" mit Volumen V_e und Oberfläche F_e (e = 1 bis E) unterteilt. Innerhalb eines Elementes e gilt:

$$u_i(x,y,z) = \varphi^e_{ik}(x,y,z)\ w^e_k \tag{3.4}$$

$$\sigma_{ij}(x,y,z) = \psi^e_{ijl}(x,y,z)\ s^e_l \tag{3.5}$$

Die φ^e_{ik} (k = 1 bis K_e) und die ψ^e_{ijl} (l = 1 bis L_e) sind lokale Verschiebungs- und Spannungsansätze, für die in der Regel einfache analytische Funktionen verwendet werden. Die w^e_k und die s^e_l sind lokale Verschiebungs- und Spannungsparameter, die mit den globalen W_m- und S_n-Parametern durch folgende topologische Beziehungen verknüpft sind:

$$w^e_k = a^e_{km}\ W_m \tag{3.6}$$

$$s_l^e = b_{ln}^e \cdot S_n \tag{3.7}$$

In Matrixschreibweise:

$$\{w^e\} = [a^e]\,\{W\} \tag{3.8}$$

$$\{s^e\} = [b^e]\,\{S\} \tag{3.9}$$

wobei die a_{km}^e- und b_{ln}^e-Koeffizienten der topologischen Matrizen $[a^e]$ und $[b^e]$ folgendermassen definiert sind:

$$a_{km}^e = 1 \quad \text{falls} \quad w_k^e = W_m \quad \text{sonst} \quad a_{km}^e = 0 \tag{3.10}$$

$$b_{ln}^e = 1 \quad \text{falls} \quad s_l^e = S_n \quad \text{sonst} \quad b_{ln}^e = 0 \tag{3.11}$$

Für die globalen Ansatzfunktionen Φ_{im} und Ψ_{ijn} folgt somit:

$$\Phi_{im} = a_{km}^e \; \varphi_{im}^e \qquad \text{innerhalb } V_e \tag{3.12}$$

$$\Psi_{ijn} = b_{lm}^e \; \psi_{ijl}^e \qquad \text{innerhalb } V_e \tag{3.13}$$

3.2 Traglastbestimmung nach dem statischen Grenzwertsatz ($\lambda \rightarrow$ Maximum)

Die S_n-Parameter, welche den Spannungszustand in jedem Punkt des Kontinuums definieren, müssen auf Grund des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie sowohl Gleichgewichtsbedingungen als auch Plastizitätsbedingungen erfüllen. Die ersten werden in Form von Gleichungen, die zweiten in Form von Ungleichungen formuliert.

Die Gleichgewichtsgleichungen werden aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen hergeleitet. Die virtuellen Verschiebungen werden mit u_i^* (*) bezeichnet, wobei, entsprechend (1.3) :

$$u_i^* = 0 \quad \text{auf} \quad F_u \tag{3.14}$$

(*) Alle mit einem Stern versehenen Grössen sind virtuelle Grössen.

Die zugehörigen, d.h. die aus den Verschiebungen u_i^* hergeleiteten virtuellen Dehnungen ε_{ij}^* erhält man nach (1.2) aus der Beziehung:

$$\epsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*\right) \tag{3.15}$$

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen besagt, dass die Spannungen σ_{ij} und die Belastungen λg_i und λf_i (siehe Abschnitt 1.3) ein Gleichgewichtssystem bilden, wenn für jede mögliche Variation der virtuellen Verschiebungen u_i^* folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\iiint_V \epsilon_{ij}^* \sigma_{ij} \, dV - \iiint_V u_i^* \lambda g_i \, dV - \iint_{F_f} u_i^* \lambda f \, dF = 0 \tag{3.16}$$

oder aus (3.15):

$$\iiint_V \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) \sigma_{ij} \, dV - \lambda \left[\iiint_V u_i^* g_i \, dV + \iint_{F_f} u_i^* f_i \, dF\right] = 0 \tag{3.17}$$

Durch partielle Integration und durch die Anwendung des Gauss'schen Divergenztheorems kann man die Gleichung (3.17) auch in folgender Form schreiben:

$$-\iiint_V u_i^* \sigma_{ij,j} \, dV + \iint_{F_f} u_i^* \sigma_{ij} \nu_j \, dF - \lambda \left[\iiint_V u_i^* g_i \, dV + \iint_{F_f} u_i^* f_i \, dF\right] = 0 \tag{3.18}$$

wobei die ν_j in Abschnitt 1.3 definiert sind.

Zur Herleitung von Gleichgewichtsgleichungen wird die Variationsgleichung (3.17) oder (3.18) diskretisiert, indem nur eine endliche Anzahl M von virtuellen Verschiebungsparametern W_m^* (m = 1 bis M) variiert wird. Durch Verwendung der Verschiebungsansätze:

$$u_i^* = \Phi_{im} W_m^* \tag{3.19}$$

sowie der Spannungsansätze (3.3) erhält man anstelle von (3.17):

$$W_m^* \left(\left[\iiint_V \frac{1}{2}\left(\Phi_{im,j} + \Phi_{jm,i}\right) \Psi_{ijn} \, dV\right] S_n - \left[\iiint_V \Phi_{im} g_i \, dV + \iint_{F_f} \Phi_{im} f_i \, dF\right] \lambda\right) = 0 \tag{3.20}$$

Weil die W_m^*-Parameter unabhängig variiert werden können, erhält man für die Spannungsparameter S_1 bis S_N und für den Traglastfaktor λ folgendes Gleichungssystem:

$$G_{mn} S_n - P_m \lambda = 0 \qquad (\text{für} \quad m = 1 \text{ bis } M) \tag{3.21}$$

In Matrixschreibweise:

$$[G]\{S\} - \{P\}\lambda = 0 \tag{3.22}$$

wobei :

$$G_{mn} \equiv \iiint_V \frac{1}{2}(\Phi_{im,j} + \Phi_{jm,i})\, \Psi_{ijn}\, dV \tag{3.23}$$

oder, aus (3.18) :

$$G_{mn} \equiv -\iiint_V \Phi_{im}\, \Psi_{ijn,j}\, dV + \iint \Phi_{im}\, \Psi_{ijn}\, \nu_j\, dF \tag{3.24}$$

$$P_m \equiv \iiint_V \Phi_{im}\, g_i\, dV + \iint_{F_f} \Phi_{im}\, f_i\, dF \tag{3.25}$$

Ein Koeffizient G_{mn} stellt die Arbeit der Spannungen infolge $S_n = 1$ für die Dehnungen infolge $W_m^* = 1$ dar. Ein Koeffizient P_m stellt die Arbeit der äusseren Lasten für die Verschiebungen infolge $W_m^* = 1$ dar. Die Matrix [G] wird als Gleichgewichtsmatrix, der Vektor {P} als Lastvektor bezeichnet.

Die Spannungsparameter S_1 bis S_N müssen auch Plastizitätsbedingungen erfüllen. Diese werden in den Q Kontrollpunkten mit Koordinaten x_q, y_q, z_q (q = 1 bis Q) durch lineare Ungleichungen formuliert (siehe Abschnitt 2.1). Am Kontrollpunkt q ist :

$$\sigma_{ij}^q = \Psi_{ijn}(x_q, y_q, z_q)\, S_n = \Psi_{ijn}^q\, S_n \tag{3.26}$$

In Matrixschreibweise:

$$\{\sigma^q\} = [\Psi^q]\ \{S\} \tag{3.27}$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in (2.3) erhält man folgende Ungleichungen:

$$0 \leq c^{hq} - f_{ij}^{hq}\ \Psi_{ijn}^{q}\ S_n \qquad (\text{für} \quad h = 1 \quad \text{bis} \quad H_q) \tag{3.28}$$

In Matrixschreibweise:

$$0 \leq \{c^q\} - [f^q]^T\ [\Psi^q]\ \{S\} \tag{3.29}$$

Werden solche Ungleichungen in jedem der Q Kontrollpunkte formuliert, erhält man das lineare Programm:

$$\left.\begin{aligned} & \lambda \longrightarrow \text{Maximum} \\ 0 = & -\{P\}\ \lambda + [G]\ \{S\} \\ 0 \leq & \{c^q\} - [f^q]^T [\Psi^q]\ \{S\} \qquad (q = 1 \ \text{bis}\ Q) \end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

Fig. 8 zeigt die Tableaudarstellung von (3.30).

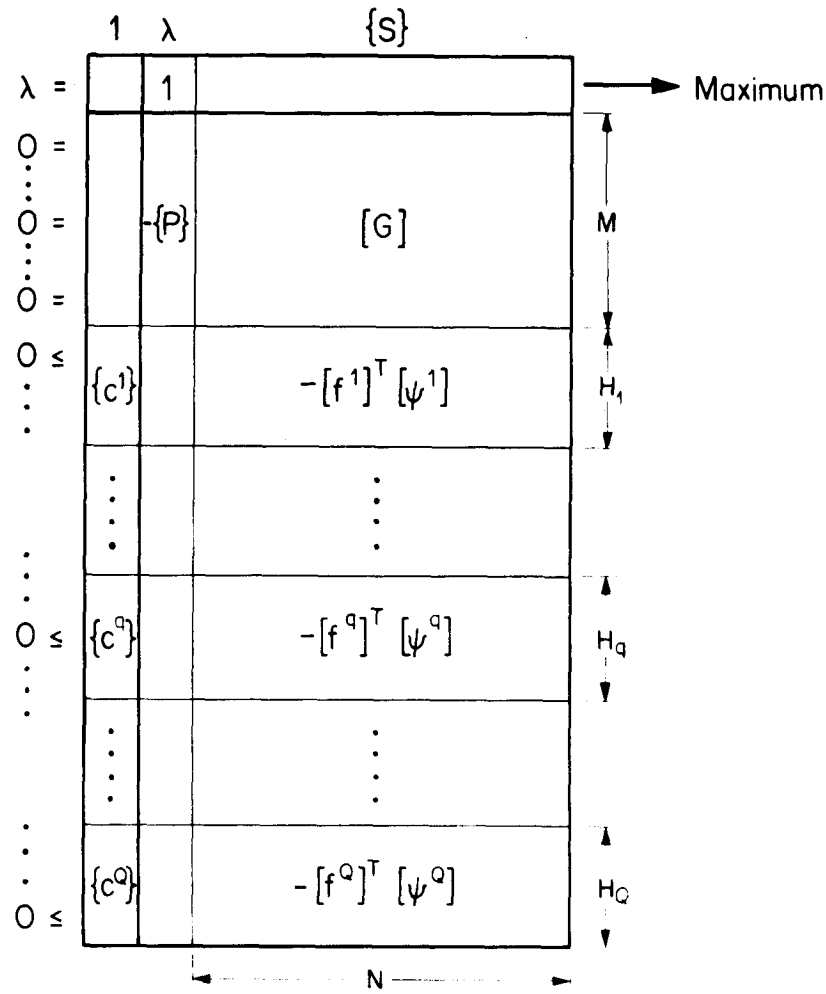


Fig 8 : Tableau zum linearen Programm (3.30)

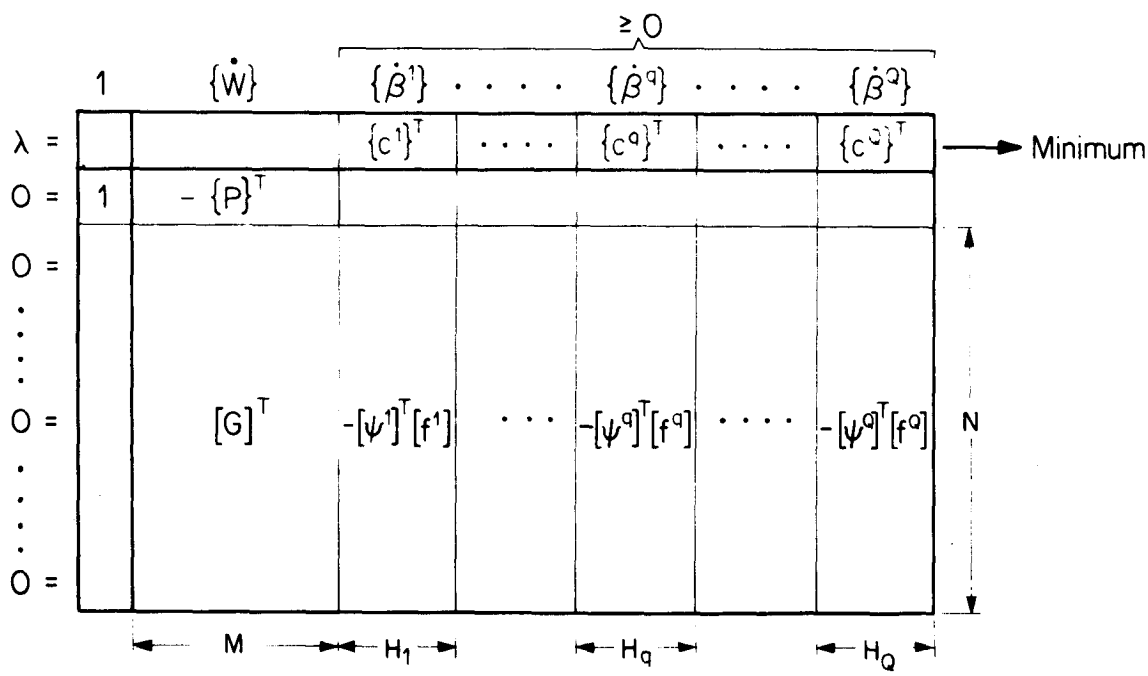


Fig. 9 : Tableau zum linearen Programm (3.53)

3.3 Zur Bestimmung der globalen Gleichgewichtsmatrix $[G]$ und des globalen Lastvektors $\{P\}$

Durch Anwendung von (3.12) und (3.13) erhält man für die G_{mn} -Koeffizienten der Gleichgewichtsmatrix $[G]$:

$$
\begin{aligned}
G_{mn} &= \sum_e \iiint_{V_e} \frac{1}{2} (\Phi_{im,j} + \Phi_{jm,i}) \, \Psi_{ijn} \, dV = \\
&= \sum_e a^e_{km} \left[\iiint_{V_e} \frac{1}{2} (\varphi^e_{ik,j} + \varphi^e_{jk,i}) \, \psi^e_{ijl} \, dV \right] b^e_{ln} = \\
&= \sum_e a^e_{km} \, g^e_{kl} \, b^e_{ln}
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Für die P_m-Koeffizienten :

$$
\begin{aligned}
P_m &= \sum_e a^e_{km} \left[\iiint_{V_e} \varphi^e_{ik} \, g_i \, dV + \iint_{F_e} \varphi^e_{ik} \, f_i \, dF \right] = \\
&= \sum_e a^e_{km} \, p^e_k
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

In Matrixschreibweise :

$$[G] = \sum_e [a^e]^T [g^e] [b^e] \tag{3.33}$$

$$\{P\} = \sum_e [a^e]^T \{p^e\} \tag{3.34}$$

wobei die g^e_{kl} -Koeffizienten der "lokalen Gleichgewichtsmatrizen" $[g^e]$ wie folgt definiert sind:

$$g^e_{kl} \equiv \iiint \frac{1}{2} (\varphi^e_{ik,j} + \varphi^e_{jk,i}) \, \psi^e_{ijl} \, dV \tag{3.35}$$

oder, entsprechend (3.24) :

$$g^e_{kl} \equiv - \iiint_{V_e} \varphi^e_{ik} \, \psi^e_{ijl,j} \, dV + \iint_{F_e} \varphi^e_{ik} \, \psi^e_{ijl} \, \nu_j \, dF \tag{3.36}$$

Für die p_k^e-Koeffizienten der "lokalen Lastvektoren" $\{p^e\}$ gilt folgende Definition :

$$p_k^e \equiv \iiint_{V_e} \varphi_{ik}^e \; g_i \; dV + \iint_{F_e} \varphi_{ik}^e \; f_i \; dF \tag{3.37}$$

Ein Koeffizient g_{kl}^e stellt die Arbeit der Spannungen infolge $s_l^e = 1$ für die Dehnungen infolge $w_k^e = 1$ am Element e dar. Ein Koeffizient p_k^e stellt die Arbeit der Lasten g_i und f_i für die Verschiebungen infolge $w_k^e = 1$ dar. Die in (3.35), (3.36) und (3.37) beschriebenen Integrationen werden in der Regel analytisch ausgeführt, da für φ_{ik}^e und ψ_{ijl}^e meistens einfache Funktionen gewählt werden.

Die Gleichungen (3.33) und (3.34) zeigen, wie aus den lokalen $[g^e]$-Matrizen und den lokalen $\{p^e\}$-Vektoren die globale Gleichgewichtsmatrix $[G]$ und der globale Lastvektor $\{P\}$ gebildet werden. In den beiden Fällen ist eine Summation über alle finiten Elemente notwendig, ähnlich wie bei der Bildung der globalen Steifigkeitsmatrix und des globalen Lastvektors (*) für elastische Tragwerke. Dabei bedeuten die Vor- und Nachmultiplikationen mit den topologischen Matrizen $[a^e]$ und $[b^e]$ nichts anderes als eine Umnumerierung der Verschiebungs- und Spannungsvariablen. Alle diese Operationen eignen sich vorzüglich für automatisierte elektronische Berechnungen.

Die Erfüllung von Randbedingungen ist, wie üblich bei den Verfahren der finiten Elemente, in der Regel sehr einfach, da die Verschiebungs- und Spannungsparameter meistens selber Randgrössen entsprechen. In Abschnitt 6.4 wird auf dieses Problem näher eingegangen.

3.4 Zur Wahl der Verschiebungs- und Spannungsansätze

Das zentrale Problem bei der Bildung von mathematischen Modellen anhand von finiten Elementen besteht aus der Wahl der Elementform, der Ansatzfunktionen innerhalb jedes Elementes und des Typs der Verschiebungs- und Spannungsparameter. In Kapitel 6 werden diese Probleme spezifisch für Scheiben und Platten behandelt, hier beschränkt man sich auf folgende drei allgemeine Bemerkungen.

1. Die Spannungsansätze sollen eine einfache Kontrolle der Plastizitätsbedingungen in jedem Punkt des Tragwerkes ermöglichen. Bei elementweise konstanten oder linearen Spannungsansätzen ist keine Verletzung der Plastizitätsbedingungen zwischen den Kontrollpunkten zu befürchten. Bei nichtlinearen Spannungsansätzen müssen hingegen, selbst bei einer grossen Anzahl von Kontrollpunkten, lokale Verletzungen der Plastizitätsbedingungen in Kauf genommen werden.

2. Für die N Spannungsparameter S_1 bis S_N ergeben sich M linear unabhängige Gleichgewichtsgleichungen, eine für jeden der virtuellen Verschiebungsparameter W_1^* bis W_M^* . Damit aber eine sinnvolle Traglast bestimmt werden kann, muss der Spannungs-

(*) Die Definitionen (3.25) und (3.37) der Lastkoeffizienten P_m und p_k^e stimmen übrigens mit den entsprechenden Definitionen bei dem Verfahren der finiten Elemente für elastische Tragwerke vollkommen überein.

zustand eine genügende "Freiheit" besitzen, N muss folglich wesentlich grösser als M sein. Für M = N, also für statisch bestimmte Modelle, ist der Spannungszustand von den Gleichgewichtsgleichungen allein bestimmt, die Traglast ist trivial. Für N < M existiert keine Lösung. Andererseits darf N im Vergleich zu M nicht zu gross sein, da sonst grobe Verletzungen des Gleichgewichtes und folglich eine zu hohe Traglast zu erwarten sind. Die Spannungs- und Verschiebungsansätze müssen deswegen aufeinander abgestimmt werden.

Es sei ein Kontinuum gegeben, dessen Spannungszustand von $\overline{N}$ unabhängigen Funktionen bestimmt wird (für dreidimensionale Spannungszustände ist $\overline{N} = 6$, für Scheiben und Platten nach der Kirchhoff'schen Theorie ist $\overline{N} = 3$). Im Innern des Kontinuums ergibt sich für jede der $\overline{M}$ unabhängigen Verschiebungskomponenten eine Gleichgewichtsgleichung (für dreidimensionale Spannungszustände ist $\overline{M} = 3$, für Scheiben ist $\overline{M} = 2$, für Platten ist $\overline{M} = 1$). Es ist zu erwarten, dass bei einem diskreten Modell, unter Ausschluss von Randeinflüssen (also für eine in allen Richtungen unendlich ausgedehnte Masche von Elementen) das optimale Verhältnis N/M gleich dem Verhältnis $\overline{N}/\overline{M}$ des entsprechenden Kontinuums ist.

3. Es stellt sich die Frage der Integrierbarkeit des Ausdruckes (3.23) oder (3.24), besonders in Hinsicht auf die Diskontinuitäten, die an den Trennflächen der Elemente vorkommen können. Es zeigt sich, dass es durch entsprechende Grenzübergänge möglich ist, die Integrale (3.23) oder (3.24) auszuwerten, sowohl wenn Diskontinuitäten im Verschiebungsfeld (die an den Diskontinuitätsflächen unendlich grosse Dehnungen zur Folge haben) wie auch im Spannungsfeld (die gleichgewichtsverletzenden Flächenlasten entsprechen) vorkommen. Nur dürfen an der gleichen Stelle der Diskontinuitätsfläche eine Verschiebung u_i und die im Arbeitsintegral damit gekoppelte Spannung σ_{ij} nicht gleichzeitig Diskontinuitäten aufweisen. Als Beispiel wird eine Stelle der Diskontinuitätsfläche betrachtet, die senkrecht zur x-Achse steht. Falls hier eine Verschiebung u_i (i = x, y, z) diskontinuierlich verläuft, darf die zugehörige Spannung σ_{xi} keine Diskontinuität aufweisen und umgekehrt. Diese Bedingungen sind leichter zu erfüllen, als wenn man mit kinematisch zulässigen Verschiebungsfeldern oder mit Gleichgewichtszuständen operieren müsste. Dieselbe Art von Bedingungen ergibt sich auch für elastische Tragwerke, wenn Variationsprinzipien verwendet werden, die sowohl Verschiebungs- wie Spannungsansätze verlangen. Man spricht dann von gemischten oder von zwei-Feld-Verfahren (siehe Prager [14], Herrmann [8], [9], Anderheggen [2], [3]).

3.5 Traglastbestimmung nach dem kinematischen Grenzwertsatz ($\lambda \rightarrow$ Minimum)

Im Kollapszustand beschreiben die zeitlichen Ableitungen $\dot{W}_1$ bis $\dot{W}_M$ der Verschiebungsparameter den Kollapsmechanismus. Dabei lässt sich die Leistung L der äusseren Lasten λg_i und λf_i wie folgt berechnen:

$$L = \iiint_V \dot{u}_i \; \lambda \, g_i \; dV + \iint_{F_f} \dot{u}_i \; \lambda \, f_i \; dF =$$

$$= \lambda \left[\iiint_V \Phi_{im} \; g_i \; dV + \iint_{F_f} \Phi_{im} \; f_i \; dF \right] \dot{W}_m \tag{3.38}$$

Aus der Definition (3.25) der P_m-Koeffizienten folgt:

$$L = \lambda \; P_m \; \dot{W}_m = \lambda \; \{P\}^T \{\dot{W}\} \tag{3.39}$$

Die innere Dissipationsleistung D erhält man, entsprechend (2.15), aus einer Summe über alle Volumenelemente ΔV_q :

$$D = \sum_q D_q = \sum_q \sum_h c^{hq} \iiint_{\Delta V_q} \dot{\alpha}^{hq} \; dV = \sum_q \sum_h c^{hq} \, \dot{\beta}^{hq} = \sum_q \{c^q\}^T \{\dot{\beta}^q\} \tag{3.40}$$

Weil die absolute Grösse der Verschiebungsgeschwindigkeiten irrelevant ist, kann man folgende Bedingungen stellen :

$$P_m \; \dot{W}_m = \{P\}^T \{\dot{W}\} = 1 \tag{3.41}$$

Im Kollapszustand ist L = D, für λ folgt somit :

$$L = \lambda \; \{P\}^T \; \{\dot{W}\} = \lambda = D = \sum_q \{c^q\}^T \{\dot{\beta}^q\} \longrightarrow \text{Minimum} \tag{3.42}$$

Zur Gewährleistung der kinematischen Verträglichkeit zwischen den Verformungsgeschwindigkeiten $\dot{u}_i$, wobei aus (3.1) :

$$\dot{u}_i = \Phi_{im} \; \dot{W}_m \tag{3.43}$$

gilt, und den Dehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\varepsilon}^q_{ij}$ am Volumenelement ΔV_q, die aus der Beziehung:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{q} = \sum_{h} f_{ij}^{hq} \; \dot{\alpha}^{hq} \tag{3.44}$$

bestimmt werden (siehe Abschnitt 2.2), verwendet man das Prinzip der virtuellen Spannungen.

Die virtuellen Spannungen im Innnern des Kontinuums werden mit σ_{ij}^{*} bezeichnet, g_i^* und f_i^* sind die zugehörigen Massenkräfte und Oberflächenspannungen. Die virtuellen Lasten g_i^* und f_i^* bilden zusammen mit den Spannungen σ_{ij}^{*} ein Gleichgewichtssystem. Entsprechend (1.4) und (1.5) gelten somit die Beziehungen :

$$g_i^* = - \sigma_{ij,j}^{*} \tag{3.45}$$

$$f_i^* = \sigma_{ij}^{*} \; \nu_j \tag{3.46}$$

Das Prinzip der virtuellen Spannungen besagt, dass die Verformungsgeschwindigkeiten $\dot{u}$ mit den Dehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}_{ij}^{q}$ kinematisch verträglich sind, wenn für jede Variation der virtuellen Spannungen σ_{ij}^{*} folgende Gleichung erfüllt ist :

$$\sum_{q} \iiint_{\Delta V_q} \sigma_{ij}^{*} \; \dot{\epsilon}_{ij}^{q} \; dV - \iiint_{V} g_i^* \; \dot{u}_i \; dV - \iiint_{F_f} f_i^* \; \dot{u}_i \; dF = 0 \tag{3.47}$$

oder aus (3.45) und (3.46) :

$$\sum_{q} \iiint_{\Delta V_q} \sigma_{ij}^{*} \; \dot{\epsilon}_{ij}^{q} \; dV + \iiint_{V} \sigma_{ij,j}^{*} \; \dot{u}_i \; dV - \iint_{F_f} \sigma_{ij}^{*} \; \nu_j \; \dot{u}_i \; dF = 0 \tag{3.48}$$

Zur Herleitung von kinematischen Verträglichkeitsgleichungen wird die Variationsgleichung (3.48) diskretisiert, indem nur eine finite Anzahl N von virtuellen Spannungsparametern S_1^* bis S_N^* eingeführt wird. Aus (3.44) und durch Verwendung der Spannungs- und Verschiebungsansätze (3.1) und (3.3) erhält man :

$$S_n^* \left(\sum_{q} \iiint_{\Delta V_q} \psi_{ijn} \sum_{h} f_{ij}^{hq} \; \dot{\alpha}^{hq} \, dV - \right.$$

$$\left. - \left[- \iiint_{V} \psi_{ijn,j} \; \Phi_{im} \; dV + \iint_{F_f} \Psi_{ijn} \, \nu_j \; \Phi_{im} \; dF \right] \dot{W}_m \right) = 0 \tag{3.49}$$

Zur Auswertung der ersten Volumenintegrale wird angenommen, dass die Spannungswerte am Kontrollpunkt q einen für das ganze Volumenelement ΔV_q geltenden Mittelwert darstellen. Die Funktionen Ψ_{ijn} können somit aus dem Integral herausgenommen werden :

$$\iiint_{\Delta V_q} \psi_{ijn} \sum_h f_{ij}^{hq} \dot{\alpha}^{hq} dV = \Psi_{ijn}^q \sum_h f_{ij}^{hq} \iiint_{\Delta V_q} \dot{\alpha}^{hq} dV =$$

$$= \Psi_{ijn}^q \sum_h f_{ij}^{hq} \dot{\beta}^{hq} \tag{3.50}$$

wobei die $\dot{\beta}^{hq}$-Werte in (2.13) definiert sind. Die Definition der Ψ^q_{ijn}-Koeffizienten folgt aus der Gleichung (3.26).

Aus (3.49) erhält man unter Verwendung der Definition (3.24) das Gleichungssystem:

$$\sum_q \Psi_{ijn}^q \sum_h f_{ij}^{hq} \dot{\beta}^{hq} - G_{mn} \dot{W}_m = 0 \quad (\text{für } n = 1 \text{ bis } N) \tag{3.51}$$

In Matrixschreibweise:

$$\sum_q [\Psi^q]^T [f^q] \{\dot{\beta}^q\} - [G]^T \{\dot{W}\} = 0 \tag{3.52}$$

Diese Gleichungen stellen kinematische Verträglichkeitsbedingungen dar. Sie verknüpfen die $\dot{W}_m$-Parameter, aus denen die Leistung der äusseren Lasten bestimmt wird, mit den $\dot{\beta}^{hq}$-Variablen, die als verallgemeinerte Dehnungsgeschwindigkeiten zur Auswertung der inneren Dissipationsleistung verwendet werden. Aus (3.42), (3.41) und (3.52) erhält man somit das lineare Programm :

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \sum_q \{c^q\}^T \{\dot{\beta}^q\} \longrightarrow \text{Minimum} \\ 0 &= 1 - \{P\}^T \{\dot{W}\} \\ 0 &= [G]^T \{\dot{W}\} - \sum [\Psi^q]^T [f^q] \{\dot{\beta}^q\} \\ \{\dot{\beta}^q\} &\geq 0 \qquad (q = 1 \text{ bis } Q) \end{aligned}\right\} \tag{3.53}$$

Fig. 9 zeigt die Tableaudarstellung von (3.53).

3.6 Dualität der beiden Verfahren

Aus den Tableaux der Figuren 8 und 9 ist sofort ersichtlich, dass die linearen Programme (3.30) und (3.53) zueinander dual sind. Wird also ein bestimmtes mathematisches Modell gewählt, führen die statische und die kinematische Formulierung des Traglastproblems zu völlig äquivalenten linearen Programmen und zum gleichen Traglastfaktor λ. Aus der Lösung eines linearen Programms ergibt sich automatisch die Lösung des anderen. Alle Informationen über den Spannungszustand beim Erreichen der Traglast (definiert durch die S_n-Parameter) sowie über den Kollapsmechanismus (definiert durch die $\dot{W}_m$-Parameter) erhält man gleichzeitig.

Ob der Traglastfaktor einen unteren oder einen oberen Grenzwert darstellt, kann nur in Ausnahmefällen beurteilt werden, nämlich dann, wenn alle Bedingungen des statischen oder kinematischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie streng erfüllt sind. In Kapitel 6 sind zwei solche Fälle angeführt, einer für Scheiben (oberer Grenzwert) und einer für Platten (unterer Grenzwert).

4. STARR-PLASTISCHE TRAGLASTBESTIMMUNG NACH DEM DEKOMPOSITIONSVERFAHREN

4.1 Einleitung

Zur Formulierung des starr-plastischen Traglastproblems in Form eines linearen Programms besteht in gewissen Fällen die Möglichkeit, einem anderen Weg zu folgen. Bei diesem Verfahren, das dem sogenannten "Dekompositionsverfahren" entspricht (siehe [7], [11], [12]), werden die in den Abschnitten 2.3 und 2.4 hergeleiteten Beziehungen verwendet.

Bekanntlich ist das Dekompositionsverfahren nur dann anwendbar, wennn die Koeffizientenmatrix des zu lösenden linearen Programms eine dazu geeignete Struktur aufweist. Beim starr-plastischen Traglastproblem wird diese Forderung erfüllt, wenn die Spannungsansätze wie folgt angegeben werden :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x,y,z) &= \sum_q \Psi_q(x,y,z)\,\sigma_{ij}(x_q, y_q, z_q) = \\ &= \sum_q \Psi_q(x,y,z)\,\sigma_{ij}^q \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dabei werden die Spannungen σ_{ij}^q am Kontrollpunkt q selber als Spannungsparameter verwendet. Die Ansatzfunktionen werden zu Interpolationsfunktionen. Ψ_q muss nämlich am Kontrollpunkt q den Wert 1 annehmen und muss in allen anderen Kontrollpunkten verschwinden.
Der globale Vektor {S} der Spannungsparameter setzt sich somit aus Q $\{\sigma^q\}$-Vektoren zusammen:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} \sigma^1 \\ \vdots \\ \sigma^q \\ \vdots \\ \sigma^Q \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

Die Gleichgewichtsmatrix kann in Q entsprechenden $[G^q]$-Untermatrizen unterteilt werden:

$$[G] = [G^1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, G^q \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, G^Q] \tag{4.3}$$

wobei die G_{mij}^q -Koeffizienten einer Untermatrix $[G^q]$, entsprechend (3.23) oder (3.24), wie folgt definiert sind:

$$G^q_{mij} \equiv \iiint_V \frac{1}{2} \left(\Phi_{im,j} + \Phi_{jm,i} \right) \Psi_q \; dV =$$

$$= - \iiint_V \Phi_{im} \; \Psi_{q,j} \; dV + \iint_{F_f} \Phi_{im} \; \Psi_q \; \nu_j \; dF \qquad (4.4)$$

An Stelle von (3.30) erhält man somit das lineare Programm :

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \longrightarrow \text{Maximum} \\ 0 = -\{P\}\lambda + \sum_q [G^q]\{\sigma^q\} \\ 0 \leq \{c^q\} - [f^q]\{\sigma^q\} \quad (\text{für } q = 1 \text{ bis } Q) \end{array}\right\} \qquad (4.5)$$

Fig. 10 zeigt die Tableaudarstellung von (4.5). Es ist dabei sofort ersichtlich, dass die Struktur der Koeffizientenmatrix für das Dekompositionsverfahren geeignet ist.

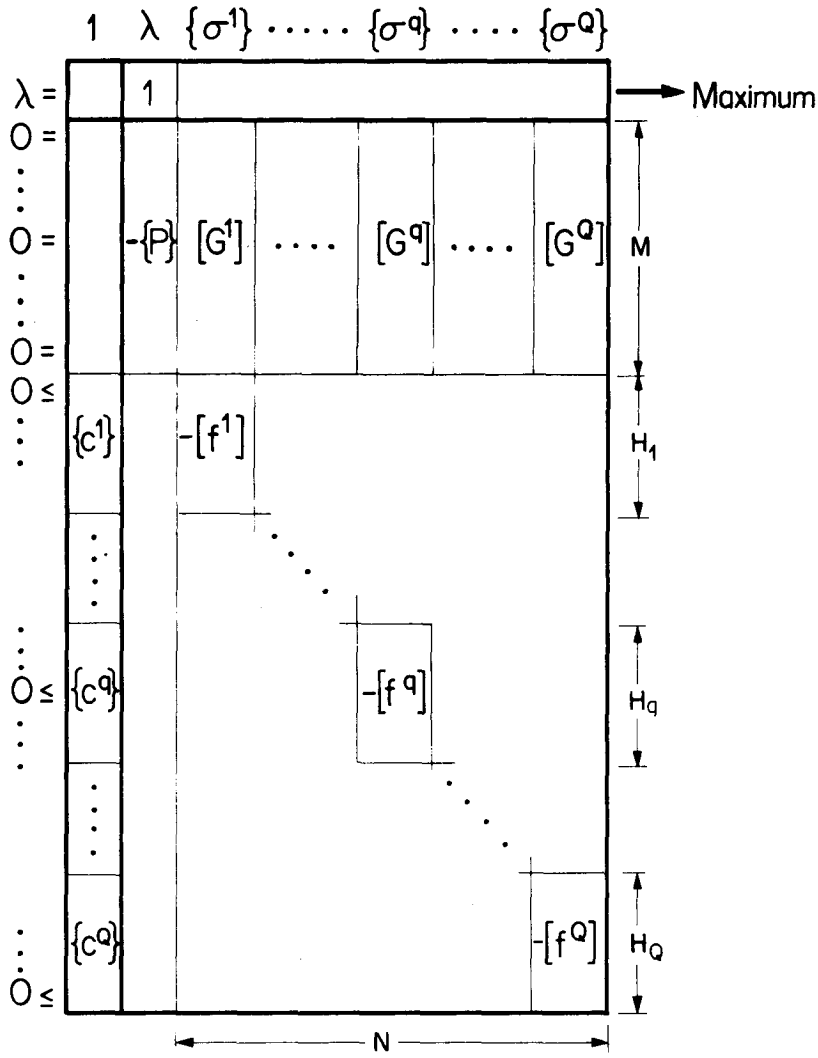


Fig. 10 : Tableau zum linearen Programm (4.5)

4.2 Traglastbestimmung nach dem statischen Grenzwertsatz ($\lambda \rightarrow$ Maximum)

In Abschnitt 2.3 wurde gezeigt, dass die Ungleichungssysteme:

$$0 \leq \{c^q\} - [f^q]^T \{\sigma^q\} \tag{4.6}$$

und:

$$\left.\begin{array}{lll} \sum_r \hat{\mu}^{rq} \leq 1 & & \\ \hat{\mu}^{rq} \geq 0 & & (r = 1 \text{ bis } R_q) \\ \bar{\mu}^{sq} \geq 0 & & (s = 1 \text{ bis } S_q) \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

äquivalent sind, wenn für den Spannungsvektor $\{\sigma^q\}$ folgende Beziehung gilt:

$$\{\sigma^q\} = \sum_r \{\hat{e}^{rq}\}\,\hat{\mu}^{rq} + \sum_s \{\bar{e}^{sq}\}\bar{\mu}^{sq} = [e^q]\{\mu^q\} + [\bar{e}^q]\{\bar{\mu}^q\} \tag{4.8}$$

Die $\{\hat{e}^{rq}\}$ und die $\{\bar{e}^{rq}\}$ sind Eckpunkt- resp. Richtungsvektoren der linealisierten Fliessfigur am Kontrollpunkt Q. Die nichtnegativen Grössen $\hat{\mu}^{rq}$ und $\bar{\mu}^{sq}$ werden als unabhängige Spannungsparameter verwendet. Setzt man die Gleichung (4.8) in (4.5) ein, erhält man das lineare Programm:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \longrightarrow \text{Maximum} \\ 0 = -\{P\}\lambda + \sum_q [G^q][\hat{e}^q]\{\hat{\mu}^q\} + \sum_q [G^q][\bar{e}^q]\{\bar{\mu}^q\} \\ \left.\begin{array}{l} 0 \leq 1 - \{I\}^T\{\hat{\mu}^q\} \\ \{\hat{\mu}^q\} \geq 0 \qquad \{\bar{\mu}^q\} \geq 0 \end{array}\right\} \text{ für } q = 1 \text{ bis } Q \end{array}\right\} \tag{4.9}$$

wobei die $\{I\}$ Summenvektoren sind, deren Koeffizienten aus Einern bestehen. Fig. 11 zeigt die Tableaudarstellung von (4.9).

4.3 Traglastbestimmung nach dem kinematischen Grenzwertsatz ($\lambda \rightarrow$ Minimum)

Die Leistung L der äusseren Lasten im Kollapszustand lässt sich, entsprechend (3.39), wie folgt bestimmen:

$$L = \lambda\,\{P\}^T\{\dot{W}\} \tag{4.10}$$

wobei, entsprechend (3.41), folgende Bedingung gestellt werden kann:

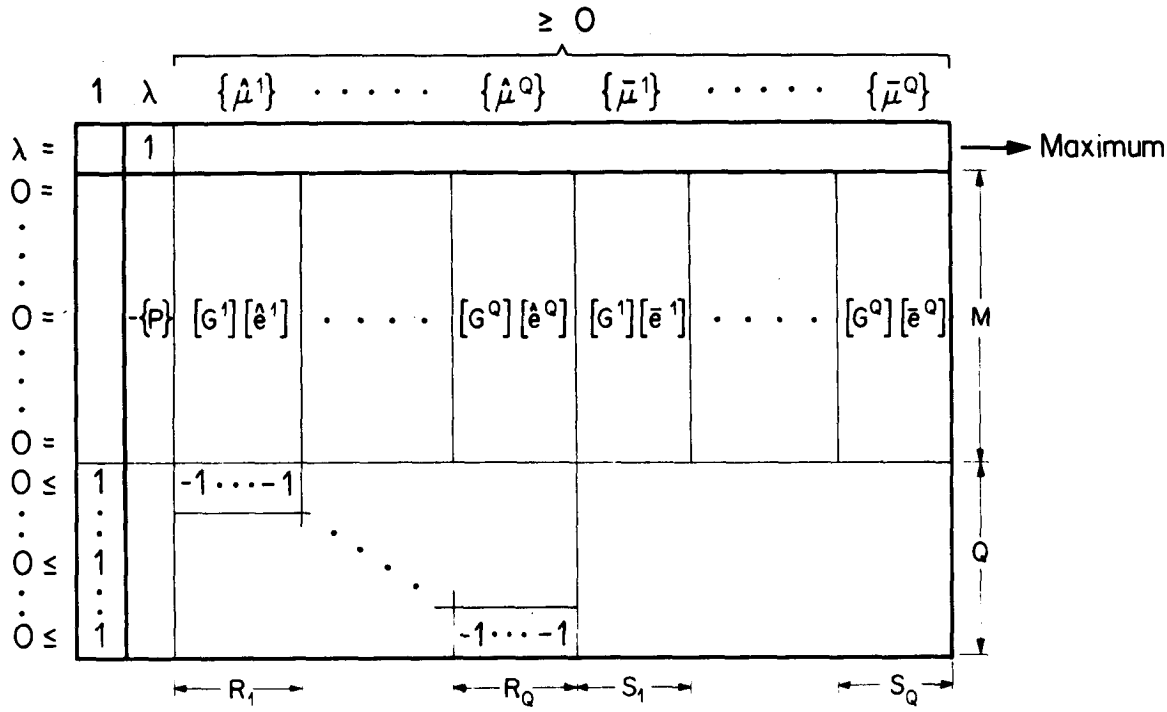


Fig. 11: Tableau zum linearen Programm (4.9)

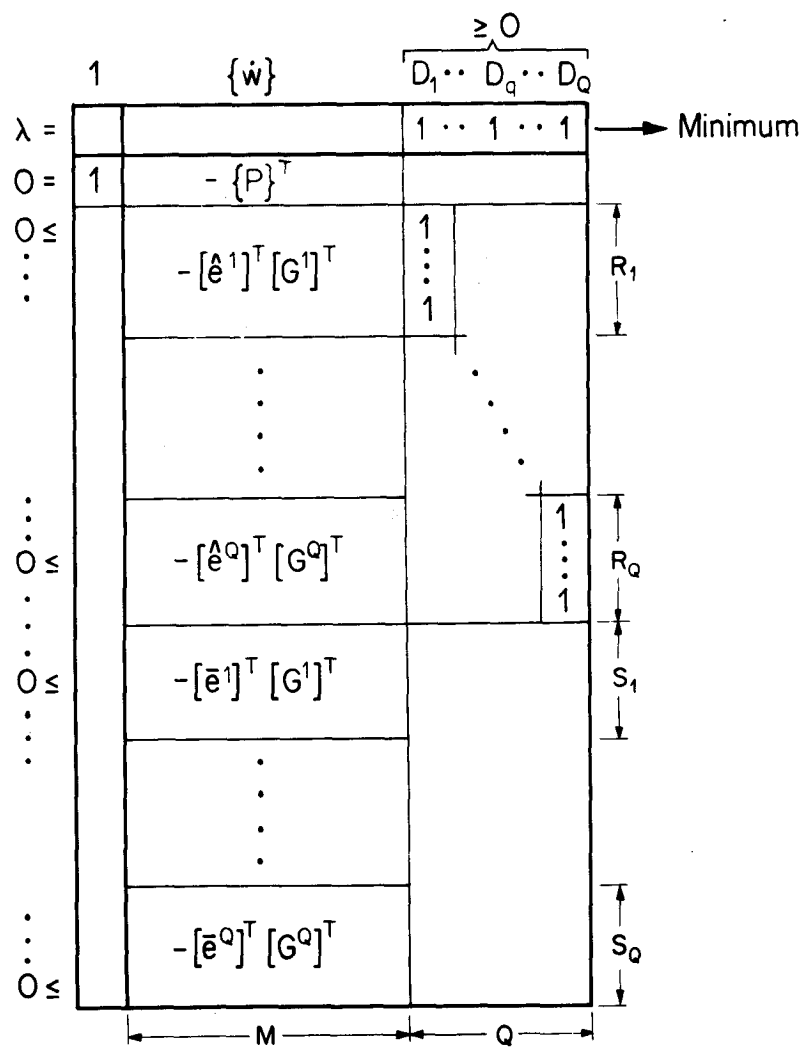


Fig. 12: Tableau zum linearen Programm (4.23)

$$\{P\}^T\{\dot{W}\} = 1 \tag{4.11}$$

Die innere Dissipationsleistung ist die Summe der Dissipationsleistungen D_q in jedem Volumenelement ΔV_q. Weil im Kollapszustand L = D sein muss, folgt für λ:

$$L = \lambda\,\{P\}^T\{\dot{W}\} = \lambda = D = \sum_q D_q \longrightarrow \text{Minimum} \tag{4.12}$$

Zur Gewährleistung der kinematischen Kompatibilität zwischen den Verformungsgeschwindigkeiten $\dot{u}_i$ und den Dehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}^q_{ij}$ in jedem Volumenelement ΔV_q verwendet man das Prinzip der virtuellen Spannungen. Man geht von der Variationsgleichung (3.48) aus:

$$\sum_q \iiint_{\Delta V_q} \sigma^*_{ij}\,\dot{\epsilon}^q_{ij}\,dV + \iiint_V \sigma^*_{ij,j}\,\dot{u}_i\,dV - \iint_{F_f} \sigma^*_{ij}\nu_j\,\dot{u}_i\,dF = 0 \tag{4.13}$$

Durch Verwendung der Spannungsansätze (4.1) und der Verschiebungsansätze (3.1) erhält man:

$$\sum_q \sigma^q_{ij} \left(\sum_q \iiint_{\Delta V_q} \Psi_q\,\dot{\epsilon}^q_{ij}\,dV - G_{mij}\,\dot{W}_m\right) = 0 \tag{4.14}$$

wobei für die G^q_{mij}-Koeffizienten die Definition (4.4) gilt. Trifft man die Annahme, dass die virtuellen Spannungsparameter σ^{q*}_{ij} einen für das ganze Volumenelement ΔV_q geltenden Mittelwert darstellen, erhält man:

$$\sum_q \sigma^{q*}_{ij} \left(\iiint_{\Delta V_q} \dot{\epsilon}^q_{ij}\,dV - G^q_{mij}\,\dot{W}_m\right) = 0 \tag{4.15}$$

in Matrixschreibweise:

$$\sum_q \{\sigma^{q*}\}^T \left(\iiint_{\Delta V_q} \{\dot{\epsilon}^q\}\,dV - [G^q]\,\{\dot{W}\}\right) = 0 \tag{4.16}$$

Durch Verwendung der Gleichung (4.8) erhält man:

$$\sum_q \sum_r \hat{\mu}^{rq} \left(\{\hat{e}^{rq}\}^T \iiint_{\Delta V_q} \{\dot{\epsilon}^q\} \, dV - \{\hat{e}^{rq}\}^T [G^q]^T \{\dot{W}\} \right) +$$

$$+ \sum_q \sum_s \bar{\mu}^{sq} \left(\{\bar{e}^{sq}\}^T \iiint_{\Delta V_q} \{\dot{\epsilon}^q\} \, dV - \{\bar{e}^{sq}\}^T [G^q]^T \{\dot{W}\} \right) = 0 \tag{4.17}$$

Weil jeder einzelne Klammerausdruck in (4.17) verschwinden muss, folgt:

$$\{\hat{e}^{rq}\}^T \iiint_{\Delta V_q} \{\dot{\epsilon}^q\} \, dV = \hat{D}_q^r = \{\hat{e}^{rq}\}^T [G^q]^T \{\dot{W}\} \tag{4.18}$$

$$\{\bar{e}^{sq}\}^T \iiint_{\Delta V_q} \{\dot{\epsilon}\} \, dV = \bar{D}_q^s = \{\bar{e}^{sq}\}^T [G^q]^T \{\dot{W}\} \tag{4.19}$$

Es ist damit gelungen, eine Beziehung zwischen den Verschiebungsparametern $\dot{W}_m$ und den in (2.22) und (2.26) definierten Grössen $\hat{D}_q^r$ und $\bar{D}_q^s$ zu finden. Diese stellen die Dissipationsleistung für Spannungszustände, die Ecken oder asymptotischen Richtungen der linearisierten Fliessfigur entsprechen, dar. Zur Bestimmung des wirklichen Spannungszustandes und folglich der Dissipationsleistungen D_q am Volumenelement ΔV_q ergeben sich, aufgrund der Theorie des plastischen Potentials, folgende Ungleichungen (siehe Abschnitt 2.4) :

$$D_q \geq 0 \tag{4.20}$$

$$0 \leq -\hat{D}_q^r + D_q = -\{\hat{e}^{rq}\}^T [G^q]^T \{\dot{W}\} + D_q \tag{4.21}$$

$$0 \leq -\bar{D}_q^s = -\{\bar{e}^{sq}\}^T [G^q]^T \{\dot{W}\} \tag{4.22}$$

Aus (4.11), (4.12), (4.20), (4.21) und (4.22) folgt das lineare Programm:

$$
\left.
\begin{array}{l}
\lambda = \sum_q D_q \longrightarrow \text{Minimum} \\
0 = 1 - \{P\}^T \{\dot{W}\} \\
\left.
\begin{array}{l}
0 \leq - [\hat{e}^q]^T [G^q] \{\dot{W}\} + \{I\} D_q \\
0 \leq - [\bar{e}^q]^T [G^q] \{\dot{W}\} \\
\qquad D_q \geq 0
\end{array}
\right\} \text{für } q = 1 \text{ bis } Q
\end{array}
\right\} \tag{4.23}
$$

Fig. 12 zeigt die Tableaudarstellung von (4.23).

Die linearen Programme (4.9) und (4.23) sind zueinander dual. Wird dasselbe mathematische Modell verwendet, sind (4.9) und (4.23) zu den in Kapitel 3 hergeleiteten linearen Programmen (3.30) und (3.53) vollkommen äquivalent. Die Lösung eines Traglastproblems hängt ausschliesslich vom gewählten mathematischen Modell ab, nicht vom Lösungsverfahren. Rechentechnisch können sich jedoch gewisse Vorteile ergeben. Auf diese Fragen wird man im Kapitel 6 zurückkommen.

5. STARR-PLASTISCHE TRAGLASTBESTIMMUNG MIT HILFE VON SPANNUNGSFUNKTIONEN

5.1 Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen

Durch die Superposition eines inhomogenen und eines aus Spannungsfunktionen abgeleiteten, homogenen Spannungszustandes gelingt es, die Gleichgewichtsbedingungen im Innern des Kontinuums ohne Formulierung von Gleichgewichtsgleichungen streng zu erfüllen. Die entsprechenden Spannungsansätze schreiben sich wie folgt:

$$\sigma_{ij}(x,y,z) = \Delta_{ij}\left(\chi_n(x,y,z)\right) S_n + \lambda\,\bar{\sigma}_{ij}(x,y,z) \tag{5.1}$$

Die ersten Summanden liefern einen homogenen Spannungszustand. Dabei stellen die χ_n-Funktionen ($n = 1$ bis N) Ansätze für bestimmte Spannungsfunktionen dar. Die χ_n-Funktionen werden mit Hilfe von finiten Elementen gebildet und entsprechen den im Abschnitt 3.2 eingeführten Spannungsansätzen Ψ_{ijn}. Die S_n sind die zugehörigen Parameter. Die Δ_{ij} sind lineare Differentialoperatoren, die so gewählt sind, dass die homogenen Gleichgewichtsgleichungen (1.4) erfüllt werden. Es gilt also:

$$\Delta_{ij,j}\,(\chi_n) = 0 \tag{5.2}$$

Zur Erfassung der im Innern des Kontinuums wirkenden Lasten λg_i wird der inhomogene Spannungszustand $\lambda\bar{\sigma}_{ij}$ eingeführt. Dieser muss die inhomogenen Gleichgewichtsgleichungen (1.4) erfüllen:

$$\lambda\,\bar{\sigma}_{ij,j} = -\lambda g_i \tag{5.3}$$

Zur Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen geht man von der Variationsgleichung (3.18) aus:

$$-\iiint_V u_i^*\sigma_{ij,j}\,dV + \iint_{F_f} u_i^*\sigma_{ij}\nu_j\,dF - \lambda\left[\iiint_V u_i^* g_i\,dV + \iint_{F_f} u_i^* f_i\,dF\right] = 0 \tag{5.4}$$

Durch Einsetzen der Verschiebungsansätze (3.1) und der Spannungsansätze (5.1) und unter Berücksichtigung von (5.2) und (5.3) erhält man:

$$W_m^*\left[\iint_{F_f} \Phi_{im}\,\Delta_{ij}(\chi_n)\,\nu_j\,dF\;S_n - \lambda\iint_{F_f}\Phi_{im}\,(f_i - \bar{\sigma}_{ij}\nu_j)\,dF\right] = 0 \tag{5.5}$$

Es folgt das Gleichungssystem:

$$G_{mn}\ S_n - \lambda\ P_m = 0 \tag{5.6}$$

In Matrixschreibweise:

$$[G]\ \{S\} - \lambda\ \{P\} = 0 \tag{5.7}$$

wobei:

$$G_{mn} \equiv \iint_{F_f} \Phi_{im}\ \Delta_{ij}\ (X_n)\, \nu_j\ \ dF \tag{5.8}$$

$$P_m \equiv \iint_{F_f} \Phi_{im}\ \ (f_i - \bar{\sigma}_{ij}\, \nu_j)\ \ dF \tag{5.9}$$

Das Wesentliche dabei ist, dass es gelingt, sämtliche Volumenintegrale zu eliminieren. Verschiebungsansätze werden folglich nur für den F_f-Teil der Aussenfläche des Kontinuums zur Erfüllung der statischen Randbedingungen gebraucht. Die Anzahl der Gleichgewichtsgleichungen wird stark reduziert. Für rundum fest gelagerte Kontinua brauchen keine Gleichgewichtsgleichungen formuliert zu werden. Die Koeffizientenmatrix des linearen Programms verkleinert sich entsprechend.

Für dreidimensionale Kontinua kennt man die Spannungsfunktionen von Maxwell und von Morera (siehe z.B. [17] Seite 12). Für Scheiben verwendet man die Airy'sche Spannungsfunktion F. Diese ist durch folgende Beziehungen definiert:

$$\sigma_x = F_{,y} \qquad \sigma = F_{,yy} \qquad \sigma = F_{,xx} \qquad \tau = F_{,xy} \qquad \text{(keine Summe)} \tag{5.10}$$

Die homogenen Gleichgewichtsgleichungen der Scheibe werden damit erfüllt:

$$\sigma_{x,x} + \tau_{,y} = 0 \qquad \sigma_{y,y} + \tau_{,x} = 0 \qquad \text{(keine Summe)} \tag{5.11}$$

Für Platten nach der Kirchhoff'schen Theorie verwendet man die Southwell'schen Spannungsfunktionen U und V. Diese sind durch die Beziehungen:

$$m_x = V_{,y} \qquad m_y = U_{,x} \qquad m_{xy} = -(U_{,y} + V_{,x})/2 \tag{5.12}$$

definiert. Die homogene Momentengleichgewichtsgleichung der Platten wird somit erfüllt:

$$m_{x,xx} + m_{y,yy} + 2 \cdot m_{xy,xy} = 0 \qquad \text{(keine Summe)} \tag{5.13}$$

5.2 Zur Herleitung der linearen Programme nach dem statischen und dem kinematischen Grenzwertsatz

Die Spannungen σ^q_{ij} in einem Kontrollpunkt q ergeben sich aus der Beziehung:

$$\sigma^q_{ij} = \Delta_{ij}(\chi_n(x_q, y_q, z_q))\ S_n + \lambda \bar{\sigma}_{ij}(x_q, y_q, z_q) \tag{5.14}$$

In Matrixschreibweise:

$$\{\sigma^q\} = [\Psi^q]\{S\} + \lambda\{\bar{\sigma}^q\} \tag{5.15}$$

wobei die Definition der Koeffizienten der Matrix $[\Psi^q]$ und des Vektors $\{\bar{\sigma}^q\}$ aus (5.14) folgt. Zur Kontrolle der Plastizitätsbedingungen im Punkt q ergibt sich aus (2.5) das Ungleichungssystem:

$$0 \leq \{c^q\} - [f^q]^T\{\bar{\sigma}^q\}\lambda - [f^q]^T[\Psi]\{S\} \tag{5.16}$$

Auf Grund des statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie erhält man aus (5.7) und (5.16) das lineare Programm:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda \longrightarrow \text{Maximum} \\ 0 &= -\{P\}\lambda + [G]\{S\} \\ 0 &\le \{c^q\} - [f^q]^T\{\bar{\sigma}^q\}\lambda - [f^q]^T[\Psi^q]\{S\} \quad \text{für } q=1 \text{ bis } Q \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

Fig. 13 zeigt die Tableaudarstellung von (5.17).

Die Herleitung des zu (5.17) dualen Programms auf Grund des kinematischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie soll hier nicht durchgeführt werden. Es sei nur erwähnt, dass die gleichen $\dot{W}_m$- und $\dot{\beta}^{hq}$-Variablen wie in (3.53) eingeführt werden müssen. Zur Interpretation der Resultate ist das ein wesentlicher Punkt.

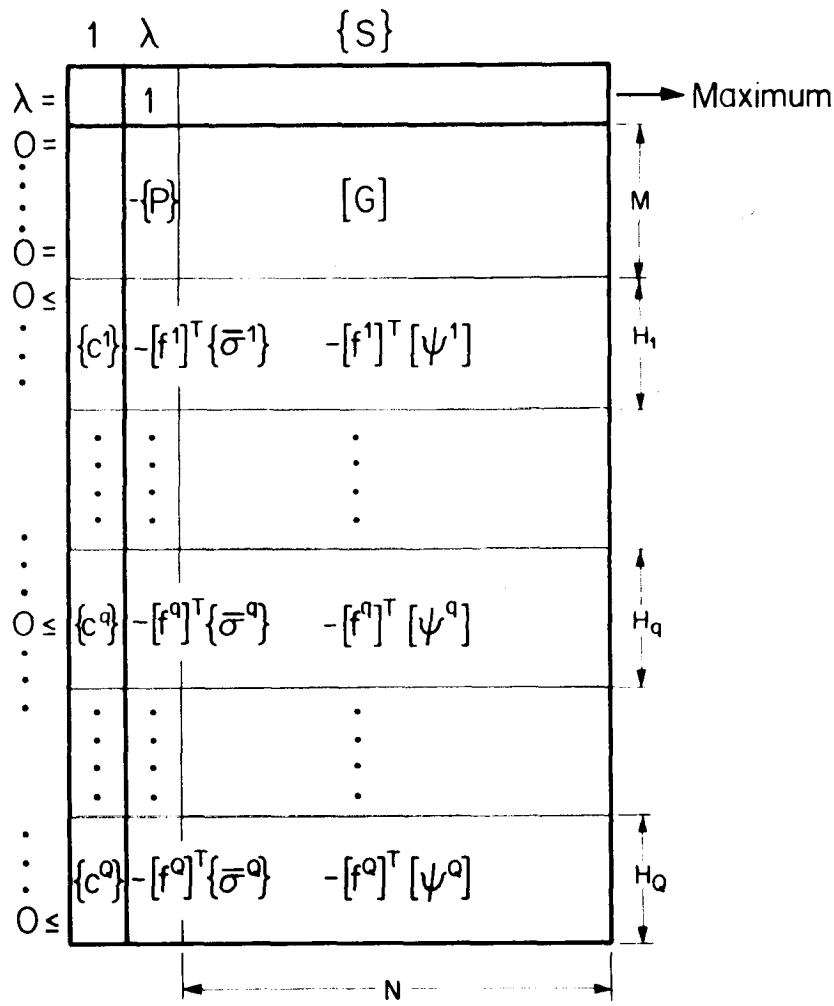


Fig.13 : Tableau zum linearen Programm (5.17)

5.3 Einige Bemerkungen zur Anwendung von Spannungsfunktionen

Werden die Ansätze für die Spannungsfunktionen mit Hilfe von finiten Elementen gebildet, stellt sich die Frage der notwendigen Kontinuität an den Trennflächen der Elemente.

Der Fall der Airy'schen Spannungsfunktion soll zuerst betrachtet werden. Zur Uebertragung der Normalspannungen zwischen zwei Scheibenelementen ist es notwendig, dass die zweite Ableitung der Spannungsfunktion in Tangentialrichtung entlang der gemeinsamen Seite für beide Elemente gleich ist. Diese Bedingung wird automatisch erfüllt, solange die Ansatzfunktionen selber keine Diskontinuität aufweisen. Zur Uebertragung der Schubspannungen, und damit die Tangentialspannungen nicht unendlich gross werden, darf die erste Ableitung der Ansatzfunktionen in Normalrichtung ebenfalls keine Diskontinuität aufweisen. Diese letzte Bedingung kann nur durch die Verwendung von komplizierten Funktionen erfüllt werden, was aber die Kontrolle der Plastizitätsbedingungen wesentlich erschwert. Die Behandlung von Scheibenproblemen mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktion wird deswegen umständlich.

Dieselben Ueberlegungen gelten für dreidimensionale Kontinua. Für Platten hingegen dürfen die Southwell'schen Spannungsfunktionen gute Dienste erweisen. Zur Uebertragung der Normalmomente sowie der "Kirchhoff'schen Ersatzquerkräfte" zwischen zwei Plattenelementen brauchen nämlich nur die Ansatzfunktionen selber kontinuierlich zu verlaufen. Nach der Kirchhoff'schen Theorie dürfen ja die Drillungsmomente oder die damit verbundenen Schubspannungen Diskontinuitäten aufweisen.

Werden mehrfach zusammenhängende Gebiete untersucht, führt die Verwendung von Spannungsfunktionen bekanntlich zu gewissen Komplikationen. Es sollen Schnitte angebracht werden, sodass das Gebiet einfach zusammenhängend wird. Entlang dieser Schnitte müssen die Spannungsfunktionen diskontinuierlich verlaufen können. Die Ableitung der Spannungsfunktionen, welche den an den Schnittflächen wirkenden Spannungen entsprechen, dürfen hingegen aus Gleichgewichtsgründen keine Diskontinuität aufweisen. Solche Kontinuitätsbedingungen können durch die Einführung linearer Gleichungen, ähnlich wie bei der Erfüllung der statischen Randbedingungen, behandelt werden. Die automatische Aufstellung der entsprechenden linearen Programme dürfen aber wesentlich schwieriger werden.

Ist das Kontinuum durch innere Lasten λg_i belastet, muss ein entsprechender inhomogener Spannungszustand $\lambda\bar{\sigma}_{ij}$ bestimmt werden. Für praktisch alle vorkommenden Belastungsarten können analytische Funktionen für den $\bar{\sigma}_{ij}$-Zustand angegeben werden. Diese sind aber im allgemein nicht-lineare Funktionen, was für die Kontrolle der Plastizitätsbedingungen nachteilig ist. Es stellt sich die Frage, ob es nicht vorteilhaft wäre, den $\bar{\sigma}_{ij}$-Zustand numerisch zu bestimmen. Man kann damit erreichen, dass die homogenen und die inhomogenen Spannungszustände gleichartig verlaufen. Das erleichtert sowohl die Kontrolle der Plastizitätsbedingungen, wie auch die Auswertung der Integrale (5.9) zur Bestimmung der P_m-Koeffizienten. Ein interessantes Beispiel dafür gibt Elias [5] bei der Behandlung von elastischen Platten mit Hilfe der Southwell'schen Spannungsfunktionen.

Es sei zum Schluss noch erwähnt, dass das Dekompositionsverfahren nicht anwendbar ist, wenn Spannungsfunktionen zur Bildung von Spannungsansätzen verwendet werden. Die Koeffizientenmatrix des linearen Programms (5.17) wird die dazu notwendige Struktur nicht aufweisen.

6. ZUR PRAKTISCHEN DURCHFUEHRUNG VON TRAGLASTBERECHNUNGEN

6.1 Einleitung

Zur Anwendung der in den vorhergehenden Kapiteln entwickelten Theorie, stellen sich etwa folgende Fragen:

1) Gegeben sei ein bestimmtes Traglastproblem. Welches mathematisches Modell soll verwendet werden, d.h. welche Verschiebungs- und Spannungsansätze soll man wählen, und wie sind die Plastizitätsbedingungen zu kontrollieren ?

2) Wie soll das entsprechende Computer-Programm gestaltet sein, um mit möglichst wenig Rechenaufwand möglichst grosse und allgemeine Probleme behandeln zu können ? Insbesondere, wie ist das lineare Programm zu lösen ?

3) Wie sind die erhaltenen Resultate zu interpretieren ?

Weil praktische Erfahrungen und numerische Resultate grösstenteils noch fehlen, wird man diese Fragen nur generell beantworten können. Aus demselben Grund wird man sich auf möglichst einfache Fälle beschränken, nämlich :

1) Es werden nur Scheiben- und Plattenprobleme behandelt.

2) Zur Bildung der Verschiebungs- und Spannungsansätze werden nur dreieckige und Parallelogramm-Elemente verwendet. Dank diesen einfachen Elementformen ist es möglich, die notwendigen Kontinuitätsbedingungen zwischen Elementen durch einfache Ansatzfunktionen zu gewährleisten.

3) Als Spannungs- und Verschiebungsansätze betrachtet man nur elementweise lineare (oder quasi-lineare) und konstante Funktionen. Wie früher erwähnt, wird die Kontrolle der Plastizitätsbedingungen durch die Verwendung derartiger Spannungsansätze wesentlich vereinfacht.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden einige Scheiben- und Plattenlösungen beschrieben und diskutiert. Dies dürfte zu einem besseren Verständnis der Theorie beitragen.

6.2 Elementweise lineare und konstante Ansatzfunktionen

Zur Erhaltung der Kontinuität einer Ansatzfunktion entlang den Elementseiten ist es zweckmässig, die Knotenpunktwerte der Funktion selber als Parameter zu wählen. Die Kontinuität bleibt erhalten, wenn die lokalen Ansatzfunktionen entlang jeder Elementseite linear verlaufen.

Für dreieckige Elemente ist es leicht, solche Ansatzfunktionen zu bilden, da eine lineare Funktion durch ihre drei Eckpunktwerte eindeutig bestimmt ist. Werden Dreieckskoordinaten ζ_1, ζ_2, ζ_3 verwendet (siehe [6], [20]), schreibt sich eine solche Ansatzfunktion wie folgt:

$$f(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = f_1 \zeta_1 + f_2 \zeta_2 + f_3 \zeta_3 \tag{6.1}$$

wobei f_1, f_2, und f_3 die drei Eckpunktwerte der Funktion $f(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ darstellen (siehe Fig. 14).

Für Parallelogramm- (oder Rechteck-) Elemente ist es ebenfalls leicht, Ansatzfunktionen zu.bilden, die entlang den Seiten linear verlaufen. Werden schiefe, dimensionslose Koordinaten ξ, η verwendet (siehe Fig. 15), schreibt sich eine solche Funktion wie folgt:

$$f(\xi, \eta) = f_1(1-\xi)(1-\eta) + f_2 \xi (1-\eta) + f_3 \xi \eta + f_4 (1-\xi) \eta \tag{6.2}$$

In den beiden zu den Seiten parallellen Richtungen verläuft $f(\xi, \eta)$ linear.

In bestimmten Fällen ist es möglich, mit elementweise konstante Ansatzfunktionen zu operieren, wobei die konstanten Funktionswerte innerhalb jedes Elementes als Parameter verwendet werden. Man spricht dann von "Elementparametern" im Gegensatz zu den "Knotenparametern" der linearen Ansatzfunktionen. Selbstverständlich kann die Kontinuität der Funktion damit nicht erzielt werden.

Für dreieckige Elemente ist es jedoch möglich, durch die Verwendung von "Seitenparametern" elementweise konstante Spannungsansätze zu bilden, welche gewisse Kontinuitätsbedingungen erfüllen. Ein interessantes Beispiel dafür wird von Herrmann [9] bei der Behandlung von elastischen Plattenproblemen gegeben. Als Spannungsparameter wählt Herrmann die Normalmomente entlang den Seiten der Elementmasche. Der innerhalb jedes dreieckigen Elementes konstante Spannungszustand wird aus den drei Seitennormalmomenten bestimmt. Die Kontinuität der Normalspannungen (nicht aber die der Schubspannungen bzw. der Drillungsmomente) bleibt damit entlang jeder Seite erhalten. Dasselbe ist auch für Scheiben möglich, indem die Seitennormalspannungen oder die Seitenschubspannungen als Parameter gewählt werden.

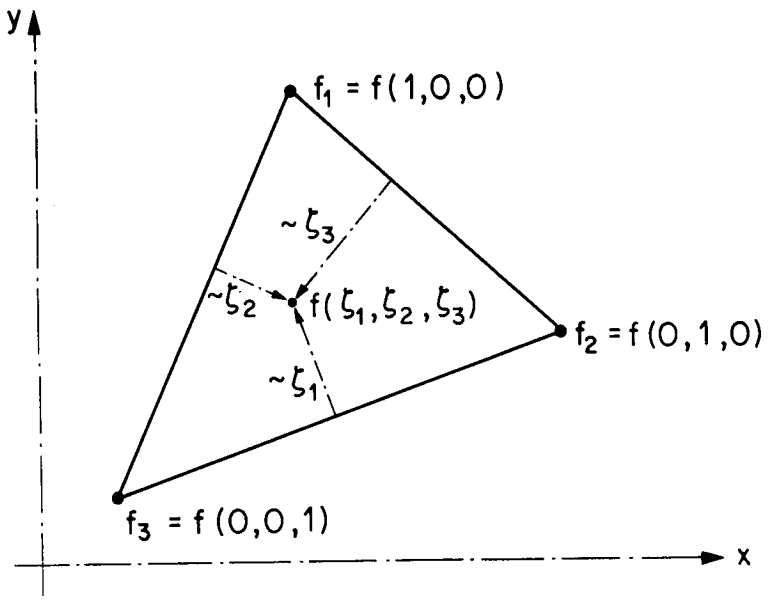


Fig. 14 : Dreieckiges Element

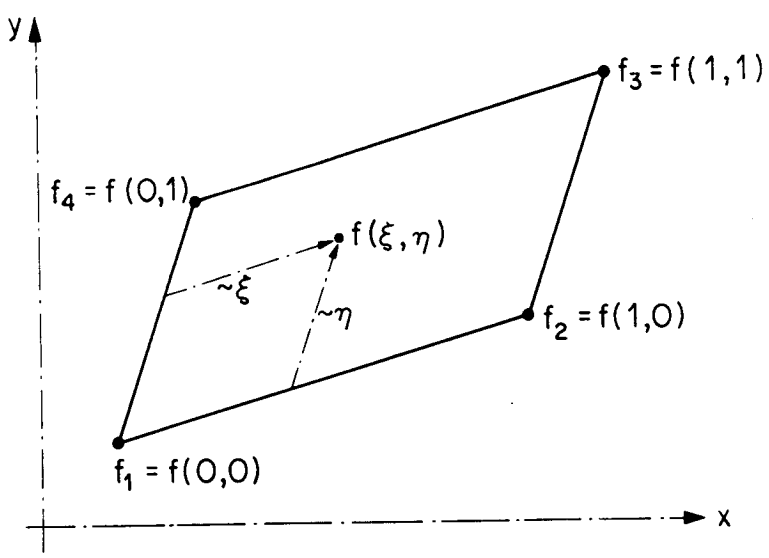


Fig. 15 : Parallelogramm - Element

6.3 Topologische Eigenschaften von Dreiecks- und Vierecksmaschen.

Man betrachte eine Elementmasche, die aus sehr vielen dreieckigen Elementen besteht. NK sei die Anzahl Knoten, NE die Anzahl Elemente und NS die Anzahl Seiten dieser Masche. Abgesehen von Randeinflüssen (die für feine Maschen eine untergeordnete Rolle spielen) ist die Summe aller inneren Winkel gleich 360° x NK oder gleich 180° x NE. Jeder Knoten entspricht nämlich einem 360°-Winkel, jedes Element einem 180°-Winkel. Es folgt:

$$360 \cdot NK = 180 \cdot NE \tag{6.3}$$

Andererseits besitzt jedes Element drei Seiten, jede Seite bildet aber zwei Elemente. Es folgt:

$$3 \cdot NE = 2 \cdot NS \tag{6.4}$$

Für Dreiecksmaschen gilt somit:

$$NE = 2 \cdot NK \tag{6.5}$$

$$NS = 3 \cdot NK \tag{6.6}$$

Für Vierecksmaschen folgt aus ähnlichen Ueberlegungen:

$$NE = NK \tag{6.7}$$

$$NS = 2 \cdot NK \tag{6.8}$$

Durch diese einfachen Beziehungen ist es möglich, unabhängig von Randeinflüssen (die wegen der Randbedingungen problem-abhängig sind) verschiedene mathematische Modelle miteinander zu vergleichen, bei denen "Knoten-", "Element-", oder "Seitenparameter" verwendet werden. Einen Hinweis über den relativen Speicherbedarf und Rechenaufwand erhält man, wenn die drei wichtigen Parameter M, N und Q (*) als Funktion von NK allein dargestellt werden (siehe Tafel 1). Das N/M-Verhältnis, dessen Bedeutung in Abschnitt 3.4 (Bemerkung 2) erklärt wurde, lässt sich aus den Beziehungen (6.5) bis (6.8) ebenfalls bestimmen.

(*) M = Anzahl Verschiebungsparameter
N = Anzahl Spannungsparameter
Q = Anzahl Kontrollpunkte

6.4 Kontinuitätsbedingungen und Randbedingungen

Zur Auswertung der Arbeitsintegrale, aus denen die Koeffizienten der Gleichgewichtsmatrix [G] ermittelt werden, ist es notwendig, dass bestimmte Komponenten des Verschiebungs- und des Spannungsfeldes zwischen Elementen kontinuierlich verlaufen (siehe Abschnitt 3.4, Bemerkung 3). Bei allen numerischen Verfahren, die mit finiten Elementen operieren, werden zur Erhaltung der Kontinuität einer bestimmten Funktion Elementrandwerte derselben als Parameter gewählt. Die Kontinuität der Funktion ist gewährleistet, wenn ihr Verlaufen entlang jeder Elementseite ausschliesslich von den zu dieser Seite gehörenden Parametern (seien es "Seiten-" oder "Knotenparameter") bestimmt wird.

Randbedingungen dürfen grundsätzlich als eine besondere Art von Kontinuitätsbedingungen betrachtet werden. Durch geeignete Transformationen der Arbeitsintegrale (3.23) oder (3.24) kann man nämlich zeigen, dass Randbedingungen nur für diejenigen Komponenten des Verschiebungs- und des Spannungsfeldes zu berücksichtigen sind, deren Kontinuität im Innern des Kontinuums notwendig ist. Ob statische oder kinematische Randbedingungen zu berücksichtigen sind, hängt somit vom mathematischen Modell, d.h. von der Wahl der Verschiebungs- und Spannungsansätze ab. Auf diese grundlegenden Fragen wird man in Abschnitt 6.7 anhand von Beispielen zurückkommen.

Weil zur Erhaltung der Kontinuität einer bestimmten Verschiebungs- oder Spannungskomponente Elementrandwerte derselben als Parameter verwendet werden, wird der Verlauf dieser Komponente am Rand des Kontinuums immer von Randparametern allein bestimmt. Dadurch wird aber die Behandlung der Randbedingungen wesentlich vereinfacht, für die übrigen Verschiebungs- und Spannungskomponenten braucht ja keine Randbedingung berücksichtigt zu werden.

Es wird im allgemeinen vorteilhaft sein, die Gleichgiwichtsmatrix [G] und den Lastvektor {P} zuerst ohne Berücksichtigung von Randbedingungen zu bilden (siehe diesbezüglich den Abschnitt 3.3). Aus (3.20) ergibt sich dann, in Indexschreibweise, folgender Ausdruck für die virtuelle Arbeit:

$$W_m^* \left(G_{mn} S_n - \lambda P_m\right) = 0 \tag{6.9}$$

Dabei stellt jeder Klammerausdruck eine Gleichgewichtsgleichung dar. Entsprechen einige der virtuellen Verschiebungsparameter W_m^* Randverschiebungen, welche auf Grund von kinematischen Randbedingungen verschwinden müssen, werden die zugehörigen Gleichgewichtsgleichungen einfach weggelassen. Die Anzahl Zeilen der [G]-Matrix und die Anzahl Koeffizienten des {P}-Vektors verkleinern sich entsprechend.

Stellen hingegen einige der Spannungsparameter S_n Spannungsrandwerte dar, die auf Grund von statischen Randbedingungen bestimmte, zum Traglastfaktor λ proportionale Werte annehmen müssen , werden die zugehörigen Spalten der [G]-Matrix und des Tableaus des linearen Programms (3.30) weggelassen. Aus einer den vorgeschriebenen Spannungswerten entsprechenden linearen Kombination dieser weggelassenen Spalten wird der Lastvektor {P} bzw. die mit λ multiplizierte zweite Spalte des Tableaus (3.30) (Fig. 8) gebildet.

Beim Dekompositionsverfahren können statische Randbedingungen entweder durch eine entsprechende Redefinition der Eckpunkt- und Richtungsvektoren an den Randkontrollpunkten oder mit Hilfe von speziellen Gleichgewichtsgleichungen behandelt werden. Spezielle Randgleichungen müssen ebenfalls formuliert werden, wenn zur Bildung von Spannungsansätzen Spannungsfunktionen verwendet werden (siehe Kapitel 5).

Bei schiefen Rändern ist es möglich, dass die Richtungen, in denen die Randbedingungen vorgeschrieben sind, mit den zur Definition der Verschiebungs- und Spannungsparametern verwendeten Koordinatenrichtungen nicht übereinstimmen. Einfache lineare Transformationen sind dann notwendig, welche einer Redefinition der Randparameter entsprechen.

6.5 Zur Lösung des linearen Programms

Die Eingabe der Problemdaten, die Vorbereitung der verschiedenen Matrizen auf Grund eines bestimmten mathematischen Modells, die Lösung des linearen Programms sowie die Auswertung und die Ausgabe der Resultate werden meistens ein einziges Computer-Programm bilden. Dabei wird jedoch die Lösung des linearen Programms den weitaus grössten Anteil des Rechenaufwandes in Anspruch nehmen. Nach der genaueren Darlegung der mathematischen Problemstellung bei den verschiedenen linearen Programmen werden deswegen einige Punkte erörtert, welche zur Verkleinerung des Rechenaufwandes wesentlich erscheinen. Eine gewisse Vertrautheit mit der Theorie der linearen Programmierung wird vorausgesetzt.

Man betrachte zuerst das lineare Programm (3.30) (siehe Fig. 8). Bevor die eigentliche Suche nach einem maximalen Wert von λ anfangen kann, müssen sowohl die Gleichgewichtsgleichungen wie die S_n-Variablen, die keiner Vorzeichenbegrenzung unterliegen, durch entsprechende Austauschschritte eliminiert werden. Die Pivot-Wahl soll dabei so erfolgen, dass die resultierende Basislösung zulässig wird. Dies ist der Fall, wenn alle Koeffizienten der ersten Tableauspalte (die beim Anfangstableau nicht-negativ sind: $c^{hq} > 0$) nicht negativ bleiben. Am Ende dieses Eliminationsprozesses bleiben somit nur die für jede Ungleichung eingeführten nicht-negativen Schlupfvariablen übrig. Bei der optimalen Endbasislösung verschwinden, als Nichtbasisvariablen, N - M + 1 Schlupfvariablen. Diese entsprechen den N - M + 1 Ungleichungen, die zur Bestimmung der Traglast als Gleichungen verwendet werden.

Beim dualen Programm (3.53) (siehe Fig. 9) müssen zuerst N + 1 Gleichungen und M freie Variablen eliminiert werden. Es bleiben somit nur nicht-negative $\dot{\beta}^{hq}$-Variablen übrig, aus denen die N - M + 1 Basisvariablen der optimalen Basislösung zu suchen sind.

Meistens wird diese Basislösung degeneriert sein, d.h. einige der $\dot{\beta}^{hq}$-Basisvariablen werden verschwindende Werte annehmen. Dies wird der Fall sein, wenn nur einige Zonen des Kontinuums beim Kollapsmechanismus plastifiziert sind. Da die übrigen Zonen starr bleiben, verschwinden die dort eingeführten veralgemeinerten Dehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\beta}^{hq}$ (sei es, dass sie bei der optimalen Basislösung als Basis- oder als Nichtbasisbariablen auftreten). Von den N - M + 1 zur Traglastbestimmung verwendeten Ungleichungen sind nur diejenigen wirklich massgebend, die nicht-verschwindenden $\dot{\beta}^{hq}$-Variablen entsprechen. Die übrigen Ungleichungen stellen Plastizitätsbedingungen in Zonen des Kontinuums dar, wo der Spannungszustand, auf Grund einer starrplastischen Theorie, nicht bestimmt werden kann, da er innerhalb der Fliessgrenze liegt.

Zur Lösung des linearen Programms (4.9), das auf Grund des Dekompositionsverfahrens hergeleitet wurde (siehe Fig. 11), müssen zuerst M Gleichgewichtsgleichungen eliminiert werden. Freie Variablen gibt es nicht, da alle $\hat{\mu}^{rq}$- und $\bar{\mu}^{sq}$-Parameter nur nicht-negative Werte annehmen dürfen. Die aus diesem Eliminationsprozess resultierende Basislösung wird automatisch zulässig sein. Bei der optimalen Basislösung erhalten höchstens M + Q - 1 μ-Parameter, als Basisvariablen, nicht-verschwindende Werte. Diese bestimmen, wenigstens in den plastifizierten Zonen des Kontinuums, den Spannungszustand beim Erreichen der Traglast.

Bei der Lösung des dualen Programms (4.23) (siehe Fig. 12) hat man M freie $\dot{W}_m$-Variablen, die eliminiert werden müssen. Am Optimalpunkt werden einige D_q-Parameter zu den Basisvariablen gehören. Weil die D_q-Parameter die Dissipationsleistung von bestimmten Volumenelementen darstellen (siehe Definition (2.2)), sind, bei nicht voll-plastifizierten Kollapsmechanismen, Degenerationserscheinungen zu erwarten.

Es wurde gezeigt, dass beim linearen Programm (3.30) nur N - M + 1 Ungleichungen zur Traglastbestimmung verwendet werden. Alle anderen Ungleichungen hätte man, ohne die Lösung zu beeinflussen, von Anfang an weglassen können. Auf Grund von physikalischen Betrachtungen ist es jedoch oft möglich, wenigstens einen Teil dieser nicht massgebenden Ungleichungen auszuschliessen, wodurch eine bedeutsame Verkleinerung des Rechenaufwandes und des Speicherbedarfes erzielt werden kann.

Leider ist es schwierig, die Wahl dieser nicht massgebenden Ungleichungen automatisch zu treffen. Man soll jedoch dem Programmbenützer die Möglichkeit bieten, für jede Ungleichung eine Priorität zu spezifizieren. Es ist dann eine optimale Lösung zu suchen, bei welcher nur die Ungleichungen mit hoher Priorität berücksichtigt werden. Sind einige davon verletzt, wird eine neue Lösung, unter Berücksichtigung der verletzten Ungleichungen, gesucht.

Beim linearen Programm (4.23) gelten ähnliche Ueberlegungen. Von den vielen μ-Variablen können höchstens M + Q - 1 als Basisvariablen positive Werte annehmen. Ein Teil der μ-Variablen kann deswegen weggelassen werden, was durch die Einführung eines Prioritätssystems und durch sukzessive Lösungen des linearen Programms ebenfalls erreicht werden kann.

Selbsverständlich verlangt dieses Vorgehen, dass der Programmbenützer sich über den voraussichtlichen Spannungsverlauf im Kollapszustand und über die physikalische Bedeutung jeder Ungleichung Rechenschaft ablegt. Die damit ersparten Rechenkosten dürften diesen Aufwand in vielen Fällen rechtfertigen.

Ein ähnliches, jedoch voll-automatisches Verfahren , wurde von Vollenweider [16] vorgeschlagen. Das lineare Programm wird zweimal gelöst. Zuerst werden die Plastizitätsbedingungen durch möglichst wenige Ungleichungen grob approximiert. Aus den damit erhaltenen Resultaten werden die Ungleichungen bestimmt, welche bei einer feineren Approximation der Plasitzitätsbedingungen voraussichtlich massgebend werden. Die ursprünglichen "groben" Ungleichungen werden dann durch diese ersetzt, und es wird eine zweite, verbesserte Lösung gesucht.

Was das eigentliche Lösungsverfahren betrifft, dürfte der sogenannte "revidierte Simplex-Algorithmus" die grössten Vorteile bieten, vor allem weil die Speicherung des vollen Tableaus damit vermieden werden kann. Beim revidierten Simplex-Algorithmus

werden die für einen bestimmten Iterationsschritt notwendigen Tableaukoeffizienten aus dem Anfangstableau mit Hilfe der inversen Basismatrix bestimmt. Bei Traglastproblemen wird aber das Anfangstableau nur verhältnismässig wenige von Null bzw. voneinander abweichende Koeffizienten besitzen. Die Speicherung aller zur Bestimmung des Anfangstableaus notwendigen Informationen wird deswegen nur eine kleine Anzahl Computer-Worte beanspruchen. Zudem muss noch die inverse Basismatrix gespeichert werden, deren Koeffizienten im allgemeinen nicht-verschwindende Werte annehmen. Weil jedoch die Anzahl Variablen und die Anzahl Restriktionen bei Traglastproblemen immer sehr voneinander verschieden sind, werden die Dimensionen dieser Matrix wesentlich kleiner als die des vollen Tableaus sein. Zum revidierten Simplex-Algorithmus ist noch zu sagen, dass er sich für nachträgliche Korrekturen der Lösung (z.B. infolge der Einführung zusätzlicher Ungleichungen) besonders gut eignet.

6.6 Zur Interpretation der Resultate

Wenn ein lineares Programm gelöst wird, erhält man gleichzeitig die Lösung des entsprechenden dualen Programms. Aus (3.30) bzw. (3.53) ergeben sich somit numerische Werte für folgende Variablen:

1. Der Traglastfaktor λ
2. Die Spannungsparameter S_n (*)
3. Die Verschiebungsgeschwindigkeitsparameter $\dot{W}_m$ (*)
4. Die Dehnungsgeschwindigkeitsparameter $\dot{\beta}^{hq}$ (siehe (2.13))

Die Parameter $\dot{W}_1$ bis $\dot{W}_M$ beschreiben den Kollapsmechanismus. Die Verteilung der plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten wird von den $\dot{\beta}^{hq}$-Variablen annäherend bestimmt. Erhält eine $\dot{\beta}^{hq}$-Variable einen positiven Wert, ist die entsprechende h-te Plasitzitätsbedingung am Kontrollpunkt q für die Traglast massgebend.

Die Spannungsparameter S_1 bis S_M beschreiben den Spannungszustand beim Erreichen der Traglast. Allerdings wird diese nur in den plastifizierten Zonen des Kontinuums der Wirklichkeit entsprechen. In den übrigen Zonen kann der Spannungszustand auf Grund einer starr-plastischen Theorie nicht bestimmt werden.

Aus den S_n-Parametern ist es möglich, die Lasten zu bestimmen, welche mit den inneren Spannungen des Kontinuums ein Gleichgewichtssystem bilden würden. Falls die Plastizitätsbedingungen nirgends verletzt sind, stellen diese "Gleichgewichtslasten" einen mathematischen unteren Grenzwert für die Traglast dar. Werden sie mit den wirklichen Lasten verglichen, kann man abschätzen, in welchem Mass die gerechnete Traglast von einem sicheren unteren Grenzwert abweicht. Dies ist zur Beurteilung der Brauchbarkeit einer bestimmten Lösung bei vielen Bemessungsproblemen wesentlich.

Schwieriger ist die Abschätzung der wirklichen Traglast. Dazu können nur numerische Resultate helfen, da Konvergenzstudien bei Verkleinerung der Elementmasche und Vergleiche mit bekannten Lösungen unerlässlich sind.

(*) Die freien S_n- und $\dot{W}_m$-Variablen werden zuerst aus den linearen Programmen eliminiert (siehe Abschnitt 6.5). Da sie aber einen wesentlichen Teil der Lösungsergebnisse darstellen, sollen sie, nach der Lösung des linearen Programms, noch bestimmt werden.

Aus der Lösung des linearen Programms (4.9) bzw. (4.23) ergeben sich numerische Werte für folgende Variablen:

1. Der Traglastfaktor λ
2. Die $\hat{\mu}^{rq}$- und $\bar{\mu}^{sq}$-Parameter (siehe Gleichung (2.16))
3. Die Verschiebungsgeschwindigkeitsparameter $\dot{W}_m$
4. Die D_q-Parameter (siehe Definition (2.20))

Die $\dot{W}_m$-Parameter beschreiben den Kollapsmechanismus. Die D_q-Parameter stellen die Dissipationsleistung in jedem Volumenelement ΔV_q dar und geben somit die Zonen des Kontinuums an, die sich beim Kollapsmechanismus plastisch verformen.

Der Spannungszustand beim Erreichen der Traglast wird von den $\hat{\mu}^{rq}$- und $\bar{\mu}^{sq}$-Parametern bestimmt. Aus diesen können somit die Gleichgewichtslasten ermittelt werden.

6.7 Einige Scheiben- und Plattenlösungen

In Tafel 1 werden einige Scheiben- und Plattenlösungen schematisch beschrieben. Angegeben wird jeweils neben der Elementform der Verlauf der Verschiebungs- und der Spannungsansätze sowie der Typ und die ungefähre Anzahl M bzw. N der entsprechenden Parameter für eine Elementmasche mit NK Knotenpunkten. In den zwei letzten Spalten wird die Lage und die Anzahl der Kontrollpunkte angegeben, welche die Erfüllung der Plastizitätsbedingungen in allen Punkten des Kontinuums garantieren. Es folgen einige Bemerkungen zu den einzelnen Lösungen.

Lösung 1

Die von den linearen Spannungsansätzen erzielte Kontinuität der Spannungen σ_x, σ_y und τ ist überflüssig, da die Verschiebungen u_x und u_y überall kontinuierlich verlaufen. Statische Randbedingungen brauchen deswegen nicht berüchsichtigt zu werden. (siehe Abschnitt 6.4). Das N/M-Verhältnis entspricht dem optimalen 3/2-Verhältnis (siehe Abschnitt 3.4, Bemerkung 2). Es wird kein mathematischer Grenzwert für den Traglastfaktor λ bestimmt. Aus dem Verlauf der Spannungsansätze folgt, dass die Gleichgewichtslasten elementweise gleichmässig verteilte Flächenlasten in x- und y-Richtung sind. Gemäss Rechenaufwand ist diese Lösung (zusammen mit der entsprechenden Lösung 5) die günstigste aller hier aufgeführten Scheibenlösungen.

Lösung 2

Diese Lösung ist vor allem interessant, weil, abgesehen von den zur Linearisierung der Fliessfiguren notwendigen Approximationen, ein mathematischer oberer Grenzwert für den Traglastfaktor λ bestimmt wird. Die Verschiebungsansätze sind nämlich kinematisch verträglich, und alle in Abschnitt 3.5 für die Berechnung der inneren Dissipationsleistung getroffenen Annahmen werden genau erfüllt. Insbesondere entspricht jedes dreieckige Element einem Volumenelement ΔV_q mit konstantem Spannungs- und Dehnungsverlauf. Nur kinematische Randbedingungen sind zu berücksichtigen, da die Spannungen im Innern der Scheibe diskontinuierlich verlaufen. Das N/M-Verhältnis

(= 6/2) ist grösser als das zur Bildung von Gleichgewichtszuständen optimale 3/2-Verhältnis. Der Spannungszustand hat folglich zu viel Freiheit, was zur Bestimmung eines zu grossen Traglastfaktors λ führt. Die Gleichgewichtslasten sind gleichmässig verteilte Linienlasten in x- und y-Richtung entlang jeder Elementseite. Gemäss Rechenaufwand ist diese Lösung wegen der grossen Anzahl von Spannungsparametern und Kontrollpunkten ungünstig.

Lösung 3

Als Spannungsparameter werden die Normalspannungen σ_n oder die Schubspannungen τ_{nt} entlang jeder Elementseite gewählt (siehe Abschnitt 6.2). Die an sich überflüssige Kontinuität der Normalspannungen bzw.der Schubspannungen wird somit erzielt. Neben den kinematischen Randbedingungen sollen folglich entsprechende statische Randbedingungen berücksichtigt werden. Das N/M-Verhältnis ist gleich dem optimalen 3/2-Verhältnis. Es wird kein mathematischer Grenzwert für λ bestimmt. Die Gleichgewichtslasten sind gleichmässig verteilte Linienlasten entlang den Elementseiten. Aufwandsmässig ist diese Lösung wegen der grösseren Anzahl Kontrollpunkte ungünstiger als die Lösung 1. Das Dekompositionsverfahren kann nicht angewendet werden.

Lösung 4

Die Anzahl Verschiebungsparameter M ist grösser als die Anzahl Spannungsparameter N : N/M = 3/4. Das mathematische Modell ist unstabil. Kein Gleichgewicht ist möglich.

Lösung 5

Es gelten die gleichen Bemerkungen wie bei der Lösung 1 mit Ausnahme der Gleichgewichtslasten, die elementweise linear verteilte Flächenlasten sind. Die Lösungen 1 und 5 können kombiniert werden, indem dreieckige und Parallelogramm-Elemente zusammen verwendet werden. Allerdigs kann jedes Parallelogramm-Element praktisch ohne Vergrösserung des Rechenaufwandes durch zwei dreieckige Elemente ersetzt werden.

Lösung 6

Diese Lösung entspricht der Lösung 2, mit welcher sie auch kombiniert werden kann. Allerdings wird damit kein oberer Grenzwert für λ bestimmt. Das N/M-Verhältnis ist gleich dem optimalen 3/2-Verhältnis. Was den Rechenaufwand betrifft, ist diese Lösung günstig.

Lösung 7

Vollenweider [16] hat diese Lösung zum ersten Mal vorgeschlagen und programmiert. Die quasi-linearen Spannungsansätze garantieren die Kontinuität aller drei Spannungskomponeneten σ_x, σ_y und τ. Die Verschiebungen u_x und u_y verlaufen hingegen diskontinuierlich (*). Nur statische Randbedingungen sind deswegen zu berücksichtigen. Es wird kein mathematischer Grenzwert für den Traglastfaktor λ bestimmt. Allerdings zeigen die numerischen Resultate, dass bei Verfeinerung der Elementmasche der Traglast-

---

(*) Vollenweider spricht nicht von Verschiebungsansätzen, sondern von Gleichgewichtsgleichungen für die in jedem Element resultierenden Kraftkomponenten in x- und y-Richtung.

faktor monoton wächst und zum richtigen Wert konvergiert. Dies dürfte eine willkommene Eigenschaft vieler mathematischer Modelle sein, bei denen, wie bei dieser Scheibenlösung, das N/M-Verhältnis dem optimalen $\bar{N}/\bar{M}$- entspricht (siehe Abschnitt 3.4). Die Gleichgewichtslasten sind elementweise linear verteilte Flächenlasten in x- und y-Richtung. Was den Rechenaufwand betrifft, ist diese Lösung günstig.

Lösung 8

Um eine bessere Erfüllung des Gleichgewichtes zu erreichen, schlägt Vollenweider vor, für jedes Element eine zusätzliche Momentengleichgewichtsgleichung zu formulieren. Dies entspricht der Einführung eines Rotationswinkels φ als Verschiebungsparameter. Damit wird aber die Anzahl Spannungsparameter N und die Anzahl Gleichgewichtsgleichungen M ungefähr gleich gross: $N/M \doteq 1$. Das mathematische Modell ist innerlich statisch bestimmt. Nur von den Spannungsrandwerten erhält der Spannungszustand eine gewisse Freiheit. Der Traglastfaktor λ wird immer zu klein sein, und es ist keine Konvergenz bei einer Verkleinerung der Elementmasche zu erwarten.

Lösung 9

Die elementweise linearen Verschiebungsansätze garantieren die Kontinuität der Plattendurchbiegungen selbst, nicht aber die ihrer ersten Ableitungen entlang den Elementseiten. Im Gegensatz zu den Scheiben sind deswegen solche lineare Verschiebungsansätze für Platten kinematisch nicht verträglich. Dies hat zur Folge, dass die Spannungen, die in den Arbeitsintegralen mit den diskontinuierlichen Verschiebungen gekoppelt sind (d.h. die Normalspannungen bzw. die Normalmomente entlang jeder Seite), kontinuierlich verlaufen müssen. Die elementweise linearen Spannungsansätze garantieren die Kontinuität aller drei Momente und folglich auch die der Normalmomente entlang den Seiten. Kinematische Randbedingungen für die Plattendurchbiegungen selbst sowie statische Randbedingungen für die Normalmomente müssen berücksichtigt werden. Dies ist für die Normalableitung der Plattendurchbiegung (z.B. bei voll eingespannten Rändern) oder für die Querkräfte, die im Innern der Platte diskontinuierlich verlaufen, nicht notwendig. Das N/M-Verhältnis entspricht dem für Platten optimalen 3/1-Verhältnis. Es wird kein mathematischer Grenzwert für λ bestimmt. Die Gleichgewichtslasten sind konstante Linienlasten entlang den Elementseiten. Gemäss Rechenaufwand ist diese Lösung günstig. Dasselbe mathematische Modell wurde zum ersten Mal von Herrmann [8] zur Berechnung von elastischen Platten verwendet.

Lösung 10

Diese Lösung, welche der zweiten Scheibenlösung entspricht, ist für Platten nicht anwendbar, da die Kontinuitätsbedingungen entlang den Seiten verletzt sind.

Lösung 11

Elementweise lineare Verschiebungsansätze und konstante Spannungsansätze können zusammen verwendet werden, wenn die Kontinuität der Normalspannungen entlang den Elementseiten durch die Einführung der Seitennormalmomente als Spannungsparameter erzielt wird (siehe Abschnitt 6.3). Die wesentliche Eigenschaft dieser Lösung besteht darin, dass, falls die Platte nur von konzentrierten Knotenlasten belastet ist, ein mathematischer unterer Grenzwert für den Traglastfaktor λ bestimmt werden kann. Entlang den Elementseiten verlaufen die Drillungsmomente diskontinuierlich. Auf Grund der klassischen Kirchhoff'schen Theorie führt dies jedoch zu keiner Verletzung des Gleichgewichtes, solange die "Ersatzquerkräfte" richtig übertragen werden. Da der

Momentenverlauf elementweise konstant ist, treten als Ersatzquerkräfte nur konzentrierte Eckkräfte an den beiden Enden jeder Seite, d.h. an den Knotenpunkten, auf. Das Gleichgewicht zwischen diesen inneren Knotenkräften (die Gleichgewichtslasten darstellen) und den äusseren konzentrierten Knotenlasten wird durch die für jeden Knotenpunkt formulierten Gleichgewichtsgleichungen erfüllt. Werden die Plastizitätsbedingungen nirgends verletzt, sind alle zur Bestimmung eines unteren Grenzwertes für λ notwendigen Voraussetzungen (wenigstens im Rahmen der vereinfachten Kirchhoff'schen Theorie) erfüllt. Nur für die Plattendurchbiegungen selber und für die Normalmomente sind Randbedingungen zu berücksichtigen. Wie erwartet, entspricht das N/M-Verhältnis dem optimalen 3/1-Verhältnis. Gemäss Rechenaufwand ist diese Lösung wegen der grösseren Anazhl Kontrollpunkte etwas ungünstiger als Lösung 9. Das Dekompositionsverfahren kann nicht angewendet werden. Das mathematische Modell dieser Lösung wurde ebenfalls von Herrmann [9] vorgeschlagen.

Lösung 12

Ein zu dem von Lösung 11 völlig äquivalentes mathematisches Modell erhält man, wenn zur Bildung von Spannungsansätzen elementweise lineare Ansätze für die Southwell'schen Spannungsfunktionen U und V verwendet werden. Es ergibt sich nämlich derselbe elementweise konstante Momentenverlauf und dieselben Diskontinuitäten in den Drillungsmomenten entlang den Elementseiten. Weil der aus U und V hergeleitete Spannungszustand homogen ist, stehen die konzentrierten "Ersatzeckkräfte" in jedem inneren Knotenpunkt untereinander im Gleichgewicht. Lokale Verletzungen des Gleichgewichts sind entlang den nicht voll eingespannten Rändern zu erwarten, da es schwierig sein wird, einen inhomogenen Spannungszustand zu finden, welcher den gleichen Momentenverlauf (seitenweise konstant) und den gleichen Querkraftsverlauf (konzentriert an den Knotenpunkten) aufweist wie der homogene. Je nach Verlauf des inhomogenen Spannungszustandes können sich bei der Kontrolle der Plastizitätsbedingungen Schwierigkeiten ergeben. Für die Berechnung von elastischen Platten wurden elementweise lineare Ansätze für die Spannungsfunktionen U und V zum ersten Mal von Elias [5] verwendet.

Lösung 13

Diese Lösung entspricht der Lösung 9, mit der sie auch kombiniert werden kann. Wie bei der entsprechenden Scheibenlösung 5 können allerdings die Parallelogramm-Element praktisch ohne Mehraufwand durch Dreieckselemente ersetzt werden.

	NUMMER	ELEMENT-FORM	VERSCHIEBUNGSANSAETZE VERLAUF	TYP DER W-PARAMETERN	M x NK	SPANNUNGSANSAETZE VERLAUF	TYP DER S-PARAMETERN	N x NK	KONTROLLPUNKTE LAGE	Q x NK
SCHEIBENELEMENTE	1	▲	L	u_x u_y in ✕	2	L	σ_x σ_y τ in ✕	3	in jedem ✕	1
	2	▲	L	u_x u_y in ✕	2	K	σ_x σ_y τ in ▲	6	in jedem ▲	2
	3	▲	L	u_x u_y in ✕	2	K	σ_n oder τ_{nt} in /	3	in jedem ▲	2
	4	▲	K	u_x u_y in ▲	4	L	σ_x σ_y τ in ✕	3	in jedem ✕	1
	5	▰	~L	u_x u_y in ✕	2	~L	σ_x σ_y τ in ✕	3	in jedem ✕	1
	6	▰	~L	u_x u_y in ✕	2	K	σ_x σ_y τ in ▰	3	in jedem ▰	1
	7	▰	K	u_x u_y in ▰	2	~L	σ_x σ_y τ in ✕	3	in jedem ✕	1
	8	▰	~K	u_x u_y φ in ▰	3	~L	σ_x σ_y τ in ✕	3	in jedem ✕	1
PLATTENELEMENTE	9	▲	L	w in ✕	1	L	m_x m_y m_{xy} in ✕	3	in jedem ✕	1
	10	▲	L	w in ✕	1	K	m_x m_y m_{xy} in ▲	6	in jedem ▲	2
	11	▲	L	w in ✕	1	K	m_n in /	3	in jedem ▲	2
	12	▲	nur Rand-verschiebungen		0	K	U V in ✕	2	?	?
	13	▰	~L	w in ✕	1	~L	m_x m_y m_{xy} in ✕	3	in jedem ✕	1

Tafel 1 : Einige Scheiben- und Plattenlösungen

Abkürzungen : ▲ ≡ Dreieckiges Element ▰ ≡ Parallelogramm-Element

✕ ≡ Knotenpunkt / ≡ Elementseite

L ≡ Linear K ≡ Konstant

LITERATUR

[1] Anderheggen E. : "Optimale Bemessung von Stabtragwerken", Dissertation ETH, Institut für Baustatik, Bericht Nr. 11, 1966

[2] Anderheggen E. : "Finite Element Plate Bending Equilibrium Analysis", J. of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 95, No. EM4, 841 - 857, August 1969.

[3] Anderheggen E. : "A Conforming Triangular Finite Element Plate Bending Solution", Int. J. for numerical Methods in Engineering, Vol. 2, 259-264 (1970)

[4] Argyris J.H. : "Continua and Discontinua", AFFDL-TR-66-80, Proceedings, Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965, 141 - 150.

[5] Elias Z.M. : "Duality in Finite Element Methods", J. of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 94, No. EM4, 931 - 946, August 1968.

[6] Felippa C.A. : "Refined Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Two-dimensional Structures", SESM-Report No. 66-22, University of California, Barkeley, 1966.

[7] Hadley G. : "Linear Programming", Addison-Wesley, 1962.

[8] Herrmann L.R. : "A Bending Analysis for Plates", AFFDL-TR-66-80, Proceedings, Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965, 557 - 604.

[9] Herrmann L.R. :"Finite Element Bending Analysis for Plates", J. of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 93, No. EM5, 13 - 26, Oktober 1967.

[10] Irons B.M. und Draper K.J. : "Lagrange Multiplier Techniques in Structural Analysis", AIAA J., Vol.3, 1172 - 1174, Juni 1965.

[11] Künzi H.P. ; Tzschach H.G. und Zehnder C.A. : "Numerische Methoden der mathematischen Optimierung", B.G. Teubner, Stuttgart, 1967.

[12] Künzi H.P. und Tan S.T. : "Lineare Optimierung grosser Systeme", Springer Verlag, 1966.

[13] Morley L.S.D. : "A Triangular Equilibrium Element with Linearly Varying Bending Moments for Plate Bending Problems", J. of the Royal Areonautical Society, Vol. 71, 715 - 719, Oktober 1967.

[14] Prager W. : "Variational Principles for Elastic Plates with Relaxed Continuity Requirements", Int. J. of Solids and Structures, Vol. 4, No. 9, 837 - 844, September 1968.

[15] Reissner E. : "On a Variational Theorem in Elasticity", J. of Mathematics and Physics, Vol. 29, Cambridge Mass., 90 - 95, 1950.

[16] Vollenweider U. : "Beitrag zur Behandlung bodenmechanischer Grenzwertprobleme nach der Plastizitätstheorie". Dissertation ETH, Institut für Baustatik, Bericht Nr. 21, 1970.

[17] Washizu K. : "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, 1968.

[18] Watwood V.B. und Hartz B.J. : "An Equilibrium Stress Field Model for Finite Element Solutions of Two-dinensional Elastostatic Problems", Int. J. of Solids and Structures, Vol. 4, No. 9, 857 - 873, September 1968.

[19] Wolfensberger R. : "Traglast und optimale Bemessung von Platten", Dissertation ETH, Institut für Baustatik, Bericht Nr. 2, 1964.

[20] Zienkiewicz O.C. : "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics", McGraw-Hill, London, 1966.

ZUSAMMENFASSUNG

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung numerischer Methoden zur Bestimmung der statischen Tragfähigkeit von zwei- und dreidimensionalen Tragwerken unter der Annahme eines starr-plastischen Materialverhaltens. Auf Grund der Plastizitätstheorie können derartige Traglastberechnungen als Maximum- oder Minimumproblem einer linearen Funktion formuliert werden, deren Variablen gewissen Restriktionen unterstehen müssen. Damit sich das Problem mathematisch mit Hilfe der linearen Programmierung lösen lässt, müssen diese Restriktionen linear sein. Dies bedingt, dass die Fliessbedingungen durch lineare Ungleichungen formuliert werden, was der Approximation der im allgemeinen nicht-linearen Fliessfiguren durch passende Fliesspolyeder entspricht. Anderseits müssen lineare Gleichgewicht- oder Kompatibilitätsgleichungen formuliert werden. Die entsprechenden Koeffizienten werden auf Grund des Prinzips der virtuellen Verformungen bzw. der virtuellen Spannungen bestimmt, wobei in beiden Fällen die Einführung von Ansatzfunktionen für die massgebenden Spannungs- und Verschiebungskomponenten notwendig ist. Zur Bildung dieser Ansatzfunktionen wird die Methode der finiten Elemente verwendet. Dabei müssen bei der Wahl der Spannungs- und Verschiebungsparameter sowie der entsprechenden lokalen Ansatzfunktionen innerhalb jedes Elementes, bestimmte Kriterien berücksichtigt werden. Die Zusammensetzung der globalen Gleichgewichts- bzw. Kompatibilitätsmatrix erfolgt dann einfach durch Summierung lokaler Elementmatrizen, ähnlich wie bei der direkten Steifigkeitsmethode für elastische Tragwerke. Es werden auch noch Probleme besprochen, die sich bei der Aufstellung entsprechender Computer-Programme ergeben, vor allem bei der Lösung des linearen Programmes. Eine Liste von möglichen Platten- und Scheibenlösungen wird angegeben und diskutiert.

SUMMARY

The aim of this work is the development of numerical methods for the determination of the ultimate load of two- and threedimensional structures assuming an ideal rigid-plastic behavior of the material. According to the classical plasticity theory the ultimate load problem can be mathematically formulated as the problem of finding the maximum or minimum of a linear function, whose independent variables are subjected to inequalities constraints. In order to use linear programming techniques these generally nonlinear constraints are approximated by sets of linear inequality restrictions. Linear equilibrium or kinematic compatibility equations have then to be formulated, the corresponding coefficients being determined by virtual work methods. This requires the assumption of parametric stress and displacement fields, which are constructed by mean of finite element procedures. Global equilibrium or kinematic compatibility matrices are then assembled by a summation over local element matrices, a procedure similar to the well known "Direct Stiffness Method" for elastic structures. Some problems,related to the development of efficient computer programs, are also discussed and several possible plate and plate-bending solutions are described.