ETH zürich

ETH Library

Ventilfederschwingungen

Doctoral Thesis

Author(s):
Marti, Willy

Publication date:
1935

Permanent link:
https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-a-000097135

Rights / license:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection.
For more information, please consult the Terms of use.

Diss. ETH : 863 B

VENTILFEDER-SCHWINGUNGEN

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG DER

WÜRDE EINES DOKTORS DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

WILLY MARTI, DIPL. MASCH.-ING.
AUS AARBERG (BERN)

863

REFERENT: HERR PROF. DR. G. EICHELBERG

KORREFERENT: HERR PROF. DR. P. SCHERRER

Ser. ETH-BIBLIOTHEK ZÜRICH Kat.

BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORMALS G. BINKERT, A.-G.
1935

VENTILFEDERSCHWINGUNGEN

Infolge der schnellen Ventilbewegungen werden in den Ventilfedern Schwingungen angefacht, welche die Federn bedeutend höher beanspruchen als bei Vernachlässigung ihrer Massenträgheit erwartet wird.

Da die Ventilfedern aus Gründen der Raum- und Gewichtsersparnis höher beansprucht werden als die andern Maschinenelemente, ist die Kenntnis der tatsächlichen Bruchsicherheit dringend notwendig. Dieses Ziel wird einerseits erreicht durch die Bestimmung der Schwingungsfestigkeit fertiger Federn, anderseits durch Berechnung oder Messung der wirklichen Federbeanspruchung in Abhängigkeit der vorkommenden Drehzahlen.

Auch in folgender Hinsicht ist die Kenntnis der Federschwingungen wünschenswert. Beim Oeffnen des Ventils wird die bewegte Masse durch den Druck des Nockens beschleunigt und von der Feder wieder verzögert, wobei die Reibung der Führung die Verzögerung unterstützt. Beim Schließen wird die Masse zuerst durch die Feder beschleunigt und dann durch den Nockendruck verzögert. Hier vermindert die Reibung die beschleunigende Wirkung der Federkraft. Durch die Federschwingungen wird nun die Federkraft kurze Momente verkleinert, so daß ein Schlagen der Rolle bei einer kleineren Drehzahl auftritt als ohne Federschwingung.

Im Resonanzzustande trägt die schwingende Feder zum allgemeinen Lärm bei, da die Eigenschwingungen der technisch üblichen Federn tiefen, hörbaren Tönen entsprechen. Bei kleinem Abstand der Windungen und bei großen Schwingungsamplituden können sich die Windungen berühren und z. B. bei polierten Federn Oberflächenbeschädigungen hervorrufen, welche die Schwingungsfestigkeit legierter Stähle herabsetzen.

Die Erkenntnisse über den Mechanismus der Federschwingungen sind übertragbar auf andere elastische Säulen. In der Brennstoffleitung eines Diesel-Einspritzsystems entstehen nach der Einspritzung ähnliche Druckschwingungen wie in der Feder nach einem Ventilhub. Die Fortpflanzung elektrischer Impulse in einem Kabel, welches gleichmäßig mit Kapazität und Selbstinduktion behaftet ist, erfolgt, wie bekannt, nach den gleichen Gesetzen und gehorcht der gleichen Differentialgleichung wie die Longitudinalwellen elastischer Säulen.

Bereits veröffentlichte Versuche über Federschwingungen.

Wohl die einfachste und anschaulichste Art der Sichtbarmachung der Federwindungsbewegungen hat W. Weibull angegeben [1]. Er versah jede Windung mit einem radial zur Federachse am Federdraht befestigten Stäbchen und projizierte deren Schatten auf einen zu den Stäbchen senkrecht stehenden Spalt. Die dadurch abgegrenzten Lichtstrahlen beschrieben auf einem rotierenden photographischen Film die Bewegung jeder Windung als Funktion der Zeit.

← Zeit

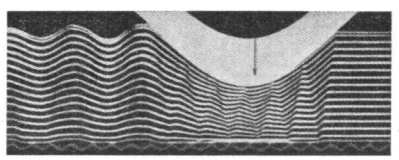

Abb. 1. Mehrmalige Reflexion eines Stoßes auf eine Feder.

Abbildung 1 zeigt den Vorgang beim Auftreffen eines Gewichtes auf die vertikal stehende Feder, wobei sich der Stoß von Windung zu Windung mit konstanter Geschwindigkeit fortpflanzte und an den Federenden reflektiert wurde. Nach mehrmaligem Hin- und Herwandern der Druckwelle wurde das Gewicht von der gespannten Feder wieder in die Höhe geschleudert und die Feder konnte mit ihrer Eigenschwingung frei weiterschwingen.

Stroboskopische Methoden wurden angewendet von Swan, Savage [2] und von Lehr [3]. Eine beliebige Windung, meistens die mittlere, erhält eine Marke und wird stroboskopisch beobachtet. Von der

[1] „De dynamiska egenskaperna hos spiralfjädrär", Stockholm 1927, Svenska Bokhandelscentralen A.-B.

[2] Engineering Research, Special Report No. 10: "The surging of engine valve springs". His Majesty's Stat. Office, London 1928.

[3] Z. d. V. D. I. 1933, S. 458.

Nockenwelle aus gesteuert, wird die Windung immer in der gleichen Winkellage einen äußerst kurzen Moment beleuchtet. Der Hub der Windung, welche scheinbar ruhig steht, kann dadurch als Funktion des Winkels und der Zeit abgelesen werden. Die so erhaltene Zeitweg-Kurve setzt sich punktweise aus vielen Umdrehungen zusammen und kann leicht Fehler enthalten, z. B. wenn die Resonanzlage infolge kleiner Drehzahlschwankungen während der Versuchsdauer nicht genau eingehalten wird.

Lehr beschreibt gleichen Ortes ein Verfahren, wonach die mittlere Federwindung mit einem kleinen Schieber einen zur Federachse parallelen Spalt mehr oder weniger verdeckt, welcher auf einem rotierenden Film abgebildet wird. Die Wegzeitkurve der Federwindung erscheint dann als Begrenzungslinie zwischen einer hellen und dunklen Fläche.

Versuche des Verfassers.

Es ist bekannt, Wegzeitkurven bewegter Maschinenteile mit einer Schleifdraht-Meßbrücke auf einem Oszillograph abzubilden. Als erster orientierender Versuch wurde mit diesem Verfahren eine Ventilfeder eines auf dem Prüfstand laufenden Dieselmotors untersucht.

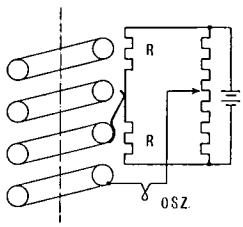

Abb. 2. Schema der Schwingungsregistrierung mittelst Schleifdraht.

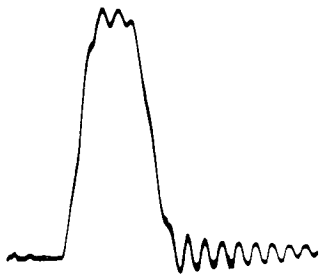

Abb. 3. Bewegung der mittleren Federwindung, nach Abb. 2 aufgenommen.

An der mittleren Federwindung wurde eine federnde Stahlzunge angelötet, welche mit einer, an der Zunge angelöteten Stahlnadel einem Cr-Ni-Draht entlangglitt. (Abb. 2.) Der Brückenstrom ist proportional dem Weg der Windung, wenn die Widerstandsänderung klein ist gegenüber den Widerständen *R*. Wie man aus dem Vergleich eines Oszillogrammes (Abb. 3) mit spätern ersieht, klingen die Federschwingungen sehr schnell ab. Es ist dies die Folge der dämpfenden Wirkung des starken Anpreßdruckes zwischen Schleifdraht und Gleitkontakt. Eine Verringerung des Anpreßdruckes hatte stark schwankende Uebergangswiderstände zur Folge, welche die Kurven bis zur Unkenntlichkeit verzerrten. Aus diesem Grunde konnten Resonanzerscheinungen nicht registriert werden, obschon solche ohne Kontaktreibung auftraten. Immerhin zeigten sich Drehzahlgebiete mit großer Amplitude und Gebiete mit kleineren Ausschlägen.

Um die Versuche im Laboratorium weiter verfolgen zu können, wurde ein Apparat nach Abbildung 4 gebaut, bestehend aus Welle, Nocken, Rollenführung und Feder. Zwei schwere Riemenscheiben auf beiden Wellenenden sorgten als Schwungräder für gleichmäßigen Lauf.

Die Schwingungsbeanspruchung ist am größten an den Federenden. Erfahrungsgemäß treten Federbrüche meistens in der äußersten Windung auf, wenn nicht ein Materialfehler die Bruchstelle zufällig verlegt. Mit Rücksicht auf die Festigkeits- und Beschleunigungsfrage erschien es angezeigt, nicht irgendeine Deformation oder Geschwindigkeit aufzuzeichnen, sondern die Beanspruchung an einem Federende.

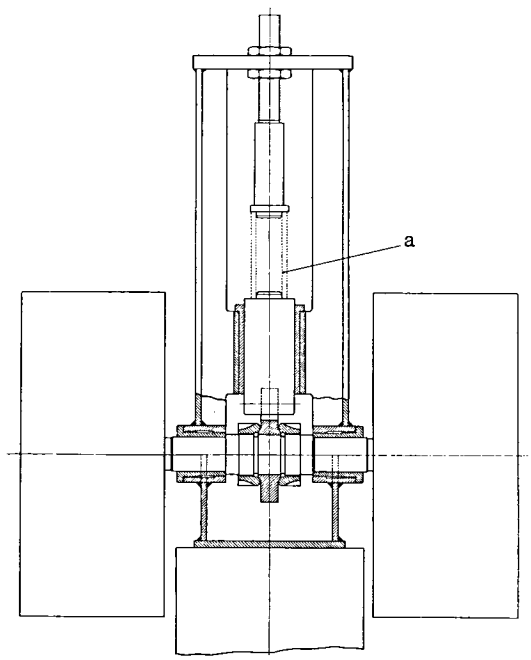

Abb. 4. Schnitt durch die Versuchsmaschine.
a = Versuchsfeder

Die Messung des Federdruckes mit Kohleplättchenindikatoren versagte infolge der Hysteresiserscheinung. (Die Eichkurve für steigenden Druck stimmt nicht überein mit der Kurve fallenden Druckes.)

Die Zusammendrückung der letzten Federwindung ist ein Maß für die Beanspruchung am Federende, aber ihre Umwandlung in eine Spiegeldrehung oder in einen elektrischen Strom erschien zu schwierig.

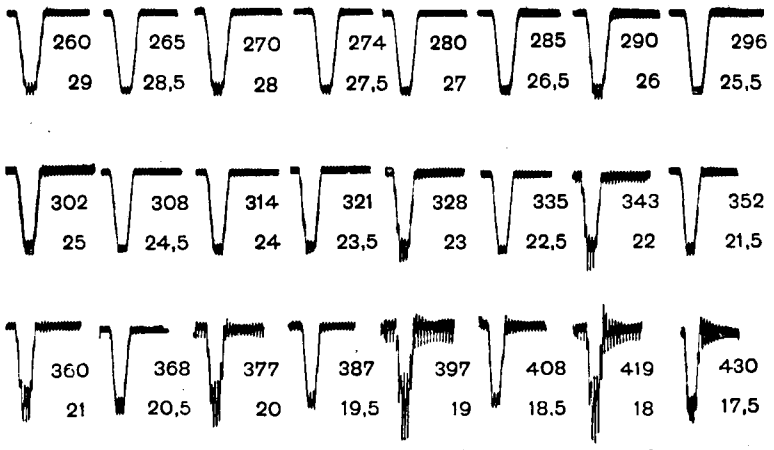

Abb. 5. Resonanzausschläge einer Feder mit einer Eigenschwingungszahl von 7540/min.
Die Zahlen bedeuten: 260 bis 430 = Drehzahl pro Minute
29 bis 17,5 = Anzahl Eigenschwingungen pro Umdrehung

Am meisten Aussicht bot die Aufzeichnung der Neigungsänderung der Drahtachse. Auf die äußerste Windung wurde ein kleiner Höcker aufgelötet und daran ein Oszillographenspiegelchen angeklebt. Dann wurde der Versuchsapparat mit horizontal liegender Feder derart neben einem Schleifenoszillograph aufgestellt, daß das Spiegelchen anstelle einer Meßschleife zu liegen kam. Der reflektierte Lichtstrahl beschrieb auf der Filmtrommel die Beanspruchung des Federendes als Funktion der Zeit.

Abbildung 5 zeigt die mit dieser Versuchsanordnung gewonnenen Oszillogramme. Resonanz tritt auf, wie bekannt ist, wenn die Eigenschwingungszahl (eventuell ein ganzzahliges Vielfaches davon) mit einem ganzzahligen Vielfachen der Nockendrehzahl übereinstimmt. Bei den dazwischen liegenden Drehzahlen bleibt der Ausschlag klein. Die kritischen Drehzahlen liegen jedoch so nahe nebeneinander, daß es praktisch aussichtslos erscheint, die Resonanzdrehzahlen so genau voraus zu bestimmen, daß die Drehzahl der Maschine mit keiner kritischen zusammenfällt.

Aus den Oszillogrammen Abbildung 5 ist jedoch ersichtlich, daß die dynamische Spannungserhöhung nicht bei jeder Resonanzlage gleich groß ist, was zur Hoffnung berechtigt, in gewissen Drehzahlbereichen allzu große dynamische Beanspruchungen vermeiden zu können.

Auch das zuletzt beschriebene Meßverfahren wurde als zu ungenau aufgegeben. Die Prüfung der Feder in einer Federwage zeigte, daß der Zusammenhang zwischen Beanspruchung und Ausschlag des Lichtzeigers nicht linear erfolgt, weil die letzte Windung beim Zusammendrücken der Feder immer mehr zum Aufliegen kommt. Außerdem treten noch störende Effekte auf durch Schwingungen der Feder senkrecht zur Federachse. Die damit verbundenen Deformationen teilen sich dem Lichtstrahl ebenfalls mit, so daß auf dem Film Schwebungen registriert werden, die ein Wiederanschwellen der abklingenden Eigenschwingungen vortäuschen (Abb. 5, 18 bis 20 Schwingungen pro Umdrehung).

Inzwischen hat der Verfasser für allgemeine Untersuchungen an Dieselmotoren ein System von drei Quarzdruckindikatoren gebaut, womit drei verschiedene Drücke synchron auf einem einzigen Oszillogramm aufgezeichnet werden können.

Die ersten Vorversuche mit der Schaltung von Kluge und Linckh[4] zeigten die aussichtsreichen Anwendungsmöglichkeiten des Verstärkers auf dem Gebiete der Druck- und Kraftregistrierung.

Durch Druck auf einen speziell zugeschnittenen Quarzkristall entstehen an beiden Druckflächen elektrische Ladungen, die einen Drehkondensator K (Abb. 6) auf eine, dem Druck proportionale Spannung aufladen. Einem elektrostatisch wirkenden Verstärker fällt die Aufgabe zu, diese Spannung in einen proportionalen Strom umzuwandeln, ohne dem Kondensator dadurch Ladung zu entziehen. Die Eingangsröhre besteht daher aus einer Dosimeter- oder Elektrometer-Röhre mit bernsteinisolierter Gitterzuführung. (Auch der Drehkondensator von 1000 cm Kapazität ist gegen Erde mit Bernstein isoliert.) Die Röhre arbeitet mit einer Anodenspannung von nur 6 Volt, welche unter der Jonisationsspannung der Restgase liegt, so daß Gitterströme infolge von Jonenströmen nicht auftreten. An die Elektrometerröhre ist eine indirekt geheizte Endröhre galvanisch angekoppelt (Abb. 6).

[4] „Forschung" 1931, S. 153.

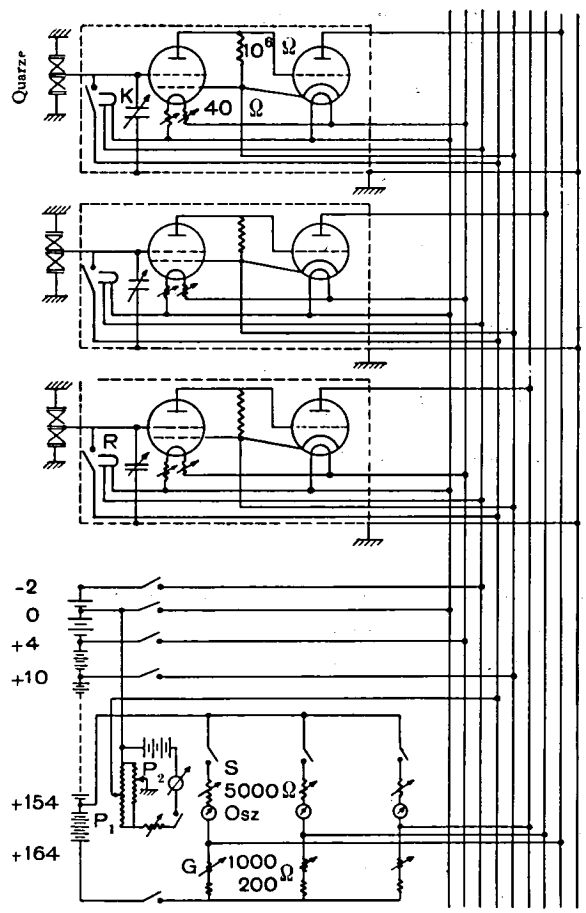

Abb. 6. Schaltschema der Verstärker.

Damit die Zuleitung vom Quarz zum Gitter nicht als Antenne wirkt und gegen Erde eine zu hohe unkontrollierbare Kapazität annimmt und zu hohen Isolationsverlusten führt, muß sie äußerst kurz gehalten werden, d. h. der Verstärker muß unmittelbar neben dem Quarzkristall aufgestellt werden. Ein blanker Kupferdraht von ca. 0,5 m verbindet die mittlere Elektrode mit dem Verstärker. Eine statische Abschirmung hat sich als unnötig erwiesen, sie kann sogar schädlich werden, indem Schwankungen des Leiters relativ zur Abschirmung Kapazitäts- und Spannungsschwankungen auslösen, welche auf dem Oszillogramm Druckschwankungen vortäuschen.

Die Endröhre des Verstärkers ist etwas erschütterungsempfindlich, besonders wenn man eine Röhre wählt, mit der etwa ± 5 mA linear ausgesteuert werden kann (Meßschleife *V* verlangt ± 4 mA für die Oszillogrammbreite). Das Metallgehäuse des Verstärkers wurde deshalb in Holzschutzkisten an weichen Federn aufgehängt. Damit konnten die Erschütterungen vollkommen abgehalten werden.

Im praktischen Betriebe sind größere Distanzen zwischen Verstärker und Oszillograph unvermeidlich. Um den Verstärker vom Oszillographentisch aus bei gleichzeitiger Betrachtung der Mattscheibe bedienen zu können, wurde ein zentrales Schaltpult in den Oszillographentisch versenkt und mit einem 9adrigen Kabel über Steckdosen mit den drei Verstärkern verbunden. Im Schaltschema Abbildung 6 sind oben die Verstärker, unten das Schaltpult dargestellt. Die senkrechten Linien am rechten Rande bilden das Verbindungskabel, mit dem ein bis drei Verstärker angeschlossen werden können.

Vor der Messung wird die Linearität der Verstärker eingestellt: Vom Schaltpult aus werden alle Relais *R* angezogen, welche alle Gitter mit dem Stufenpotentiometer P_1 verbinden. Mit dem Stufenpotentiometer werden gleiche Spannungsintervalle überstrichen und damit kann in einigen Sekunden die Spannungsempfindlichkeit und Linearität geprüft werden. Nötigenfalls wird die Ruhestromkompensation *G* so eingestellt, daß der lineare Teil der Verstärkercharakteristik die ganze Oszillogrammbreite von 120 mm einnimmt.

Schaltet man die Relais wieder aus, so bleibt der Lichtzeiger einige Zeit an derselben Stelle, d. h. der Kondensator bleibt einige Zeit mit dem zuletzt eingestellten Potential aufgeladen. Infolge schlechter Isolation entlädt er sich im Verlaufe einiger Minuten. Periodische Druckkurven verschieben sich deshalb in Richtung der Oszillogrammbreite, bis der zeitliche Mitteldruck mit dem Nullpunkt des Kondensators übereinstimmt. Will man nun im Beharrungszustande die ganze Oszillogrammbreite überschreiben, so muß dieser Nullpunkt je nach der Kurvenform passend eingestellt werden können. Zu diesem Zwecke kann das Potential sämtlicher Kathoden mit dem Potentiometer P_2 verschoben werden. Allerdings verschieben sich dann alle drei Kurven gleichzeitig. Eine individuelle Nullpunktseinstellung erhält man durch Zwischenschaltung je einer einstellbaren Gittervorspannung zwischen Kondensator und Erde.

Vor dem Einschalten der Oszillographenmeßschleifen werden die Schutzwiderstände *S* sukzessive weggeschaltet, damit die Meßschleifen bei falsch eingestelltem Kompensationsstrom nicht überlastet werden.

Als Anodenstromquelle wurde eine Akkumulatorenbatterie von 150 Volt gewählt. Netzanschluß ist ebenfalls möglich, wenn man durch Siebketten den Strom genügend glättet. Entnimmt man dem

Netz plötzlich mehr Strom, so kann sich dieser infolge der Siebdrosseln nicht sofort voll einstellen. Er muß deshalb mit Glimmstrecken und genügend großem Kondensator stabilisiert werden.

Theorie der Wanderwellen in Ventilfedern.

In folgenden Ableitungen werden nachstehende Bezeichnungen verwendet:

d = Mittlerer Windungsdurchmesser
J = Polares Trägheitsmoment
F = Querschnitt des Federdrahtes
δ = Durchmesser runder Federdrähte
p = Anzahl der wirksamen Federwindungen
l = Abgewickelte Federlänge
μ = Reduzierte Federmasse pro cm Drahtlänge $= \left(F + 4\frac{J}{d^2}\right)\frac{\gamma}{g} \cong F\frac{\gamma}{g}$
k = Dämpfungskonstante pro cm Drahtlänge
t = Zeit, als Variable
y = Ausschlag einer Federwindung im Abstande x
x = Abstand vom festen Federende
γ = Spezifisches Gewicht der Federmasse
g = Erdbeschleunigung
G = Torsionsmodul des Federstahles
v = Geschwindigkeit der Federwindung
τ = Beanspruchung der Feder
τ_0 = Beanspruchung der Feder beim Hub h_0
M = Torsionsmoment entsprechend τ
h = Ventilhub als Funktion des Nockenwinkels
h_0 = Maximaler Ventilhub
T_0 = Zeit, in der eine Störung in der Feder hin und her läuft
w_s = Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer elastischen Störung längs der Drahtachse
ω = Winkelgeschwindigkeit des Nockens
φ = Winkelstellung des Nockens
ω_0 = Eigenschnelle der Feder

Die bekannte Differentialgleichung der elastischen Störung der Schraubenfeder lautet:[5]

$$1)\qquad \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k\frac{\partial y}{\partial t} = c\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \qquad c = \frac{4J}{d^2}G$$

Die Geschwindigkeit, mit der sich eine elastische Störung ohne Dämpfung dem Federdraht entlang fortbewegt, beträgt:

$$2)\qquad w_s = \sqrt{\frac{c}{\mu}} = 2\sqrt{\frac{J/d^2}{F + 4J/d^2}\cdot\frac{Gg}{\gamma}} \cong$$
$$\cong 2\sqrt{\frac{J}{Fd^2}\cdot\frac{Gg}{\gamma}}$$

Man beachte, daß der Wert $\sqrt{\frac{Gg}{\gamma}}$ identisch ist mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Torsionsstörungen in glatten Stäben.

Eine nach einer Richtung unendlich lange Feder werde nun am Federanfang nach einem bestimmten Geschwindigkeitsgesetz bewegt. Dementsprechend bewegen sich Geschwindigkeitswellen mit der Störungsgeschwindigkeit der Drahtachse entlang. Mit der Geschwindigkeitswelle untrennbar verbunden, läuft eine entsprechende Verteilung der Beanspruchung (Torsionsspannung) mit.

Folgende Anwendung des Impulssatzes zeigt, wie die Geschwindigkeits- und Beanspruchungsverteilung zusammenhängen:

In der sehr kurzen Zeit dt werde die Geschwindigkeit des Federanfanges um den Betrag Δv verändert, wofür eine Aenderung der bewegenden Kraft um ΔP notwendig ist. Diese Geschwindigkeitsänderung hat sich in der Zeit dt um die Strecke $w_s \cdot dt$ fortgepflanzt. Der Impulssatz ergibt

$$\Delta P \cdot dt = \mu w_s\, dt \cdot \Delta v$$
$$\Delta P = \frac{\Delta M}{d/_2} = \mu w_s \Delta v$$

μ und w_s eingesetzt, folgt ein dynamisches Torsionsmoment

$$3)\qquad \Delta M_{dyn} = \sqrt{JF\frac{G\gamma}{g}}\cdot\Delta v$$

Die dynamische Beanspruchung wird für alle Querschnitte

$$3a)\qquad \tau_{dyn} = \beta\cdot\sqrt{\frac{G\gamma}{g}}\cdot\Delta v$$

wobei der dimensionslose Zahlenfaktor β nur von der Querschnittsform abhängt.

Für Stahlfedern mit rundem Drahtquerschnitt wird $\Delta\tau$ = ca. 360 · Δv (kg/cm²; m/sec.).

Bei einer Geschützfeder z. B. richtet sich demnach die allererste Beanspruchung nicht nach den Dimensionen der Feder, sondern nach der Anfangsgeschwindigkeit des zurückprallenden Geschützrohres, nach der Art des Drahtquerschnittes und nach dem Material.

Reflexion der Wanderwellen an den Enden der Ventilfeder.

Auch bei einer endlich langen Feder besteht Proportionalität zwischen der erregenden Geschwindigkeitsänderung und der Beanspruchungswelle. Die totale Beanspruchung an einem bestimmten Punkte der Feder entsteht aber durch Ueberlagerung aller hin und her reflektierten Beanspruchungswellen.

[5] Fröhlich, Z. f. Mathematik und Physik, 1908, S. 379. Magg, Verh. d. Ver. z. Beförd. d. Gewerbefleißes 1912, S. 480.

Die Reflexion einer Störung, bestehend aus der Geschwindigkeitswelle und der Beanspruchungswelle an einer festen Wand, geht folgendermaßen vor sich (Abb. 7):

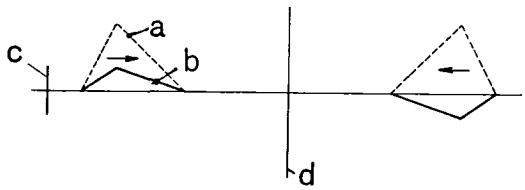

Abb. 7. Reflexion einer Störung an einer festen Wand.

a = Beanspruchung
b = Geschwindigkeit
c = erregender Federteller
d = reflektierende Wand

Die feste Wand verlangt, daß die angrenzenden Federteilchen jederzeit die Geschwindigkeit Null haben. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn der zu reflektierenden Störung eine zur Wand spiegelbildlich fortschreitende Störung überlagert wird. (In Abbildung 7 wurde die Geschwindigkeitswelle zentrisch symmetrisch eingezeichnet, weil die Geschwindigkeiten als Skalar betrachtet, umgekehrte Vorzeichen haben; die Geschwindigkeitsvektoren sind natürlich auch spiegelbildlich symmetrisch.)

Infolge der zentrischen Symmetrie verschwindet durch die Ueberlagerung zu jeder Zeit die Geschwindigkeit an der Wand. Die linke Welle wandert nach rechts und fällt für jede weitere Untersuchung außer Betracht. Die rechte Welle bewegt sich nach links, um am erregenden Federteller wieder in ähnlicher Weise reflektiert zu werden und wird so mehrmals hin und her geworfen.

Die gleiche Erscheinung würde auftreten, wenn sich ein zweiter erregender Federteller spiegelbildlich zur weggedachten Wand bewegen würde. Beide würden eine spiegelbildliche Beanspruchungswelle erzeugen, die sich während der Durchdringungszeit an der Wand d verdoppelt.

In Abbildung 7 sind die Wellen kürzer gezeichnet als die Federlänge. Es kommen deshalb immer nur zwei Wellen in Ueberlagerung. In Wirklichkeit ist jedoch die Erregung sehr langsam im Verhältnis zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störung; die Oeffnung eines Ventils dauert sehr lang im Verhältnis zur Laufzeit T_0, worunter die Zeit verstanden sei, in welcher eine Welle in der Feder hin und her läuft. Dies ändert durchaus nichts am Vorgange der Reflexion; es wird nur die Ueberlagerung etwas unübersichtlicher.

Die an der ruhenden Wand reflektierte Welle wird nun am bewegten Federteller wiederum reflektiert und gelangt nach Ablauf einer Laufzeit wieder an die feste Wand. An der Wand addieren sich demnach die verdoppelte Beanspruchungswelle, die verdoppelte reflektierte Welle, welche nach der Laufzeit T_0 wieder eintrifft, die zweimal hin und her geworfene Welle nach einer Verspätung von $2T_0$, die dreimal hin und her laufende Welle nach $3T_0$ usw.

Die dynamische Beanspruchung der Ventilfeder bei einmaligem Ventilhub.

Nach den vorstehenden Ausführungen setzt sich die dynamische Beanspruchung am ruhenden Federende zusammen aus den in gleichen Intervallen (nach jeder Laufzeit T_0) eintreffenden Beanspruchungswellen, welche sich infolge der Reflexion verdoppeln.

Bezeichnen wir die erregende Geschwindigkeitsfunktion mit v_t, so beträgt das totale Torsionsmoment an der festen Wand nach Gleichung 3) für eine einmalige Hubbewegung und für Federn mit beliebigem Querschnitt:

$$M_{dyn} = \sqrt{JF\frac{G\gamma}{g}}\,(2v_t + 2v_{t-T_0} + 2v_{t-2T_0} + \\ + 2v_{t-3T_0} \ldots\ldots)$$

Um für die Berechnung möglichst einfache Beziehungen zu erhalten, soll diese Gleichung in eine dimensionslose Form gebracht werden. Da der Nockenwinkel $\varphi = \omega t$ beträgt, kann vorstehende Gleichung mit den Indices φ; $\varphi - \omega T_0$; $\varphi - 2\,\omega T_0$; $\varphi - 3\,\omega T_0$; $\varphi - 4\,\omega T_0$ usw. versehen werden.

Der bewegliche Federteller bewege sich mit dem Hub h = Funktion von φ, dann ist die Geschwindigkeit

$$v_\varphi = \omega\,\frac{dh}{d\varphi}$$

Obige Gleichung verwandelt sich damit in

$$4)\quad M_{dyn} = \sqrt{JF\frac{G\gamma}{g}}\,\omega\left[2\left(\frac{dh}{d\varphi}\right)_\varphi + 2\left(\frac{dh}{d\varphi}\right)_{\varphi-\omega T_0} + \\ + 2\left(\frac{dh}{d\varphi}\right)_{\varphi-2\omega T_0} \ldots\ldots\right]$$

Beim langsamen Zusammendrücken der Feder wird das Torsionsmoment nach der Festigkeitslehre

$$5)\qquad M = \frac{2JG}{ld}\,h$$

Die Beanspruchungsdifferenz zwischen unterer und oberer Rast beträgt also

$$6) \qquad M_0 = \frac{2JG}{ld} h_0$$

Die Schwingungsdauer, zugleich Laufzeit der Feder, beträgt

$$T_0 = \frac{2l}{w_s} = l \sqrt{\frac{Fd^2}{J} \frac{\gamma}{Gg}}$$

und die Kreisfrequenz ω_0 der Grundschwingung

$$7) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{J}{Fd^2} \cdot \frac{Gg}{\gamma}} = \frac{2JG}{ld} \pi \sqrt{\frac{g}{JFG\gamma}}$$

Durch Kombination der Gleichungen 6 und 7 erhält man

$$8) \qquad M_0 = \frac{h_0 \omega_0}{\pi} \sqrt{JF \frac{G\gamma}{g}}$$

Aus Gleichung 4 entsteht durch Division mit Gleichung 8

$$\frac{M_{dyn}}{M_0} = \frac{\tau_{dyn}}{\tau_0} = \pi \frac{1}{h_0} \frac{\omega}{\omega_0} \left[2 \left(\frac{dh}{d\varphi} \right)_{\varphi} + 2 \left(\frac{dh}{d\varphi} \right)_{\varphi - wT_0} + 2 \left(\frac{dh}{d\varphi} \right)_{\varphi - 2\omega T_0} + \ldots \right]$$

Als Zeitmaß setzen wir noch $\frac{\omega_0}{\omega} = z$ ein, das ist die Anzahl Eigenschwingungen, welche auf eine Nockenumdrehung entfällt. Ferner setzen wir

$$\omega \, T_0 = \frac{2\pi}{z}$$

$$9) \qquad \frac{\tau_{dyn}}{\tau_0} = \frac{\pi}{h_0 z} \left[2 \left(\frac{dh}{d\varphi} \right)_{\varphi} + 2 \left(\frac{dh}{d\varphi} \right)_{\varphi - \frac{2\pi}{z}} + 2 \left(\frac{dh}{d\varphi} \right)_{\varphi - 2\frac{2\pi}{z}} + \ldots \right]$$

Die Beanspruchung am bewegten Federende lautet dann sinngemäß:

$$10) \qquad \frac{\tau_{dyn}}{\tau_0} = \frac{\pi}{h_0 z} \left[1 \cdot \left(\frac{dh}{d\varphi} \right)_{\varphi} + 2 \left(\frac{dh}{d\varphi} \right)_{\varphi - \frac{2\pi}{z}} + 2 \left(\frac{dh}{d\varphi} \right)_{\varphi - 2\frac{2\pi}{z}} + \ldots \right]$$

Die erste Welle geht nicht verdoppelt in die Gleichung 10 ein, da sie durch Geschwindigkeitserregung und nicht durch Reflexion entstanden ist.

Beide Kurven nach 9 und 10 unterscheiden sich von der Gleichung 5 nur durch Ueberlagerung der dynamischen Zusatzbeanspruchung. Nach Ablauf der Hubdauer werden die Funktionen 9 und 10 periodisch.

Aus den abgeleiteten Beziehungen ergibt sich eindeutig, daß die Größe der bei einmaligem Hub entstandenen Eigenschwingung nur von der Nockenform und von der Eigenschwingung der Feder abhängt. Dimensionen und Material der Feder haben nur Einfluß auf die Eigenschwingungszahl. Die Berechnung der dynamischen Beanspruchung ist damit auf die Addition gleichmäßig um $2\pi/z$ verschobener $dh/d\varphi$ Kurven zurückgeführt. Eine ähnliche, jedoch nicht dimensionslose Formel hat Magg 1912 auf anderem Wege abgeleitet.

Messung der $dh/d\varphi$-Kurve des Versuchsnockens.

Die $dh/d\varphi$-Kurve aus der graphischen Differentiation einer gemessenen h-Kurve zu gewinnen, ist nicht empfehlenswert, da die graphische Differentiation bekanntlich sehr ungenau durchführbar ist. Die Geschwindigkeitskurve ist zwar meistens aus der Nockenberechnung, wonach die Werkstattzeichnung hergestellt wird, bekannt. Allein die Herstellung der Schleifschablone führt infolge der Bearbeitungsfehler zu Abweichungen vom theoretischen Verlauf, welche nicht vernachlässigt werden können. Es wurde deshalb mit Erfolg versucht, die Differentiation an der Versuchsmaschine experimentell durchzuführen.

Auf eines der Schwungräder (Abb. 4) von 370 mm Durchmesser wurde in der Umfangsrichtung ein Streifen Millimeterpapier aufgeklebt und darauf ein permanenter Hufeisenmagnet gestellt. Am Gestell wurde eine Präzisions-Tasteruhr befestigt, so daß der Fühler beim Drehen des Schwungrades durch den Magnet als Anschlag bewegt wurde. Die Mitte des Fühlers hatte einen Abstand von 220 mm von der Drehachse. Nun wurde das Schwungrad einige Male um genau $\pm$ 2,50 mm = $\pm$ 0,65° gedreht (5 Tasteruhrumdrehungen). Mit einer zweiten Tasteruhr wurde die Hubänderung Δh bestimmt, welche zwischen 0 und 0,80 mm variierte. Die Messung wurde wiederholt, nachdem der Magnet auf dem Millimeterpapier jeweils um 5 mm = 1,55° versetzt wurde. Die Quotienten $\Delta h/\Delta\varphi$ konnten ohne Streuung durch eine glatte Kurve als Funktion von φ dargestellt werden (Abb. 8). Die Genauigkeit ist so groß wie die Meßgenauigkeit der Hubänderung, denn die Aenderung des Winkels $\pm$ 0,65° entsprach $\pm$ 250 Teilstrichen, so daß der Fehler für $\Delta\varphi$ neben den Fehlern für Δh vernachlässigt werden kann.

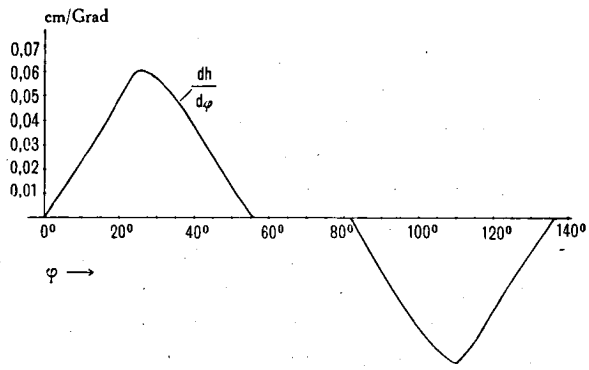

Abb. 8. Ventilgeschwindigkeitskurve.

Die positive und die negative Fläche der $dh/d\varphi$-Kurve wichen unter sich nur um 2 % ab und ergaben unter Berücksichtigung der Maßstäbe den Maximalhub.

Es wurde zunächst versucht, die Geschwindigkeitskurve (in Abb. 9 gestrichelt dargestellt) durch eine dreieckförmige Kurve (Abb. 9) anzunähern. Die Ueberlagerung der Dreiecke im Sinne der Gleichung 9 ergab aber einen eckigen Verlauf, wie er in den später zu besprechenden Oszillogrammen nicht auftrat. Nimmt man hingegen die genaue Kurve, so erhält man die schwach ausgezogene, punktierte Ueberlagerung, welche wesentlich anders verläuft.

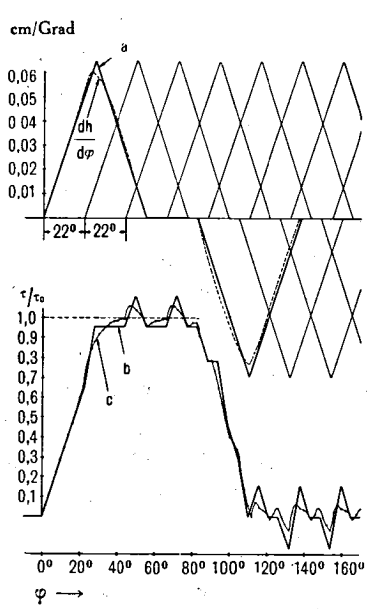

Abb. 9. Beanspruchungsverlauf bei einmaligem Hub für z = 16,4.

a = Ersatzkurve für die genaue $dh/d\varphi$-Kurve
b = Verlauf nach Ersatzkurve berechnet
c = Verlauf nach genauer Kurve

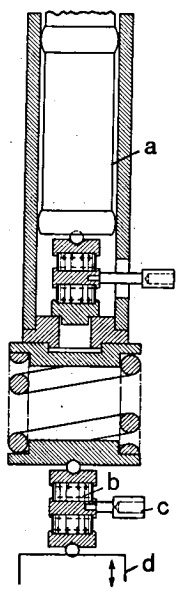

Abb. 10. Schnitt durch die Feder mit den Quarzindikatoren.

a = feste Stütze
b = Quarzkristall
c = Elektrode zum Verstärker
d = bewegliche Führung

Gleichzeitige Registrierung der Beanspruchung an beiden Federenden.

Je ein Quarzpaar wurde auf beiden Seiten der Feder in den Kraftfluß eingeschaltet. (Bei Quarzdruckmessungen werden allgemein zwei Quarze verwendet, um eine Isolierung der einen Elektrode zu umgehen.) Abb. 10.

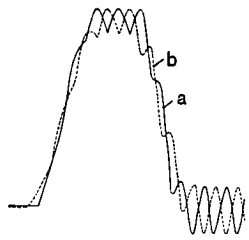

Abb. 11. Berechneter Verlauf der Beanspruchungen.

a = am ruhenden Federteller
b = am bewegten Federteller

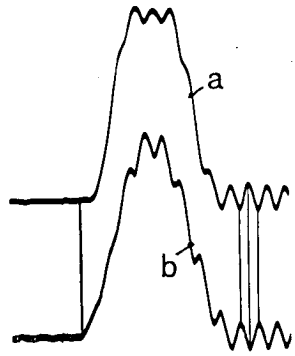

Abb. 12. Gleichzeitig oszillographierter Verlauf der Beanspruchungen.

a = am ruhenden Federteller
b = am bewegten Federteller

Auf einer Seite der Feder wurde die Uebertragung der Kraft auf den Quarz mit einer Führungshülse verbunden, weil sonst längere Federn leichter ausknicken. Auch auf der bewegten Seite war eine derartige Führung vorgesehen. Ihr Gewicht mußte jedoch über den Quarzindikator beschleunigt werden, so daß sich die Beschleunigungskraft der Federkraft überlagerte. Die Führung wurde deshalb weggelassen.

Um die von Magg erstmals aufgestellte Theorie des einmaligen Hubes zu prüfen, wurden die Beanspruchungen der beiden Federenden nach Gleichung 9 und 10 berechnet für $z = 20$ Schwingungen pro Umdrehung und die gleichen Kurven oszillographisch aufgenommen (Abb. 11 u. 12).

Die Aufnahme eines *einmaligen* Hubes wurde dadurch erreicht, daß eine in Resonanz schwingende Feder durch Berührung mit der Hand abgebremst wurde. Der erste Hub nach dem Loslassen der Feder verhält sich, wie aus Abbildung 12 ersichtlich ist, wie ein einmaliger Hub.

Aus den berechneten Kurven und ihrer Uebereinstimmung mit den Oszillogrammen geht der Wellencharakter der Federschwingung deutlich hervor. Der erste Druckanstieg ist wie das Geschwindigkeitsdiagramm linear und nicht parabolisch wie der Hub. Der Anstieg am ruhenden Ende erfolgt erst nach einer halben Schwingungsdauer, d. h. nach der Laufzeit der Störung vom

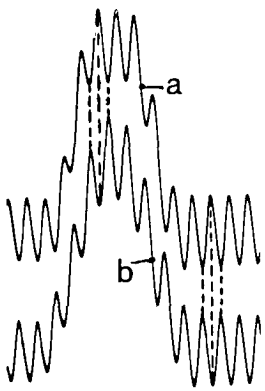

Abb. 13. Federbeanspruchungen an beiden Enden der Feder, synchron registriert.

(z = 20 Umdrehungen)

a = ruhendes Ende

b = bewegtes Ende

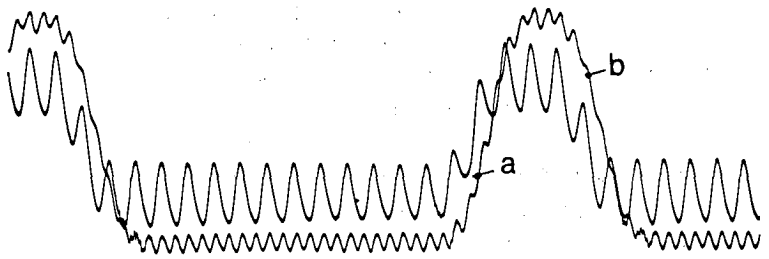

Abb. 14.

a = Nachweis der zweiten (genauer der geradzahligen) Harmonischen durch elektrische Addition der Endkräfte

b = Vergleich mit Kraftverlauf am ruhenden Ende (z = 19). Beide Kurven wurden nacheinander aufgenommen

bewegten bis zum festen Ende. Abbildung 13 zeigt demgegenüber die Beanspruchung an beiden Federenden im *Resonanzfalle*. Man beachte, daß hauptsächlich die erste Harmonische angeregt wurde. Die Schwingungen an beiden Enden sind um 180° phasenverschoben.

Währenddem die Eigenschwingungen mit 1, 3, 5, 7, ... Schwingungsbäuchen an beiden Federenden Drücke erzeugen, welche um 180° verschoben sind, schwingen die Kurven der 2., 4., 6., ... Ordnung in gleicher Phase. Der Beweis hiefür liegt in folgendem Versuch:

Statt die erzeugten statischen Elektrizitätsladungen der beiden Quarze je einem Verstärker zuzuführen, wurden sie überlagert und nur einem Verstärker zugeführt. Das so erhaltene Oszillogramm stellt dann die momentane Summe oder das arithmetische Mittel der Federendkräfte dar. Aus dem Oszillogramm verschwinden also die ungeradzahligen Ordnungen. Abbildung 14 enthält z. B. eine solche Aufnahme bei z = 19/Umdr. In der Tat wurden die 38 Schwingungen pro Umdrehung der zweiten Ordnung registriert. Unmittelbar nachher wurde vergleichsweise die Druckkurve am ruhenden Federende auf Abbildung 14 aufgenommen.

Wird eines der Kristallpaare umgepolt und die Ladungen auf beiden Seiten der Feder addiert, so erscheint im Oszillogramm die Differenz der Federkräfte. Die Differenz enthält jedoch nur noch die ungeradzahligen Ordnungen. Die Hubbeanspruchung ist im Oszillogramm (Abb. 15) nicht mehr enthalten. Man sieht nur noch die abklingende erste Ordnung, welche während der Hubzeit wieder aufgebaut wird.

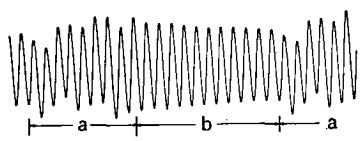

Abb. 15. Differenz der Enddrücke.

a = Wiederaufbau der gedämpften Schwingung während des Hubes

b = Abklingen während der untern Rast

Die Federschwingung bei einmaligem Hub in Abhängigkeit von der Drehzahl.

Um die oben abgeleitete Theorie der Wanderwellen in Federn empirisch nachzuprüfen, wurde die dynamische Beanspruchung der Feder für z = 12 bis 23 Schwingungen pro Umdrehung berechnet. Da eine Schwingung innerhalb dieser Grenzen 15 bis 30° dauert, muß die Addition der Geschwindigkeitskurven mindestens von 2 Grad zu 2 Grad durchgeführt werden, um eine genügende Genauigkeit zu erzielen. Die Verschiebungen $\left(= \frac{360^\circ}{z}\right)$, d. h. die Beträge, um welche die Geschwindigkeitskurven verschoben und addiert werden müssen, betragen:

Schwingungen pro Umdr. z =	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
Verschiebung, genau	30	27,7	25,7	24	22,5	21,2	20	18,9	18	17,2	16,4	15,7	Grad
abgerundet . .	30	27,5	25,5	24	22,5	21,0	20	19	18	17,0	16,5	15,5	Grad

Zur Vereinfachung der Rechnung wurden jedoch die genauen Werte der Verschiebung auf eine ganze oder halbe Gradzahl abgerundet. Die Ordinaten der Geschwindigkeitskurve, welche in großem Maßstabe aufgezeichnet vorlag, wurden dann für jedes halbe Grad tabellarisch festgelegt. Nebenstehende Zahlentabelle zeigt beispielsweise den Gang der Berechnung für $z = 20$ Schwingungen pro Umdrehung. Die Kolonne $(dh/d\varphi)_\varphi$ wiederholt sich in den übrigen Kolonnen jeweils mit einer Verschiebung von 18°. In der Kolonne $\Sigma\, dh/d\varphi$ wurden die vorhergehenden Kolonnen unter Berücksichtigung des Vorzeichens addiert und schließlich in der letzten Kolonne mit $\frac{180^\circ}{h_0\, z} \cdot 2$ multipliziert, in der sie zugleich in dimensionslosen τ_{dyn}/τ_0 Einheiten erscheinen.

Aus der Tabelle ist ersichtlich, daß nach dem ersten Hub eine Schwingung zurückbleibt zwischen $\tau_{dyn}/\tau_0 = +\,0{,}139$ und $-\,0{,}116$. In Wirklichkeit beträgt dies $\pm\,0{,}125$. Die Abweichung wurde verursacht durch die früher erwähnte Ungleichheit der Geschwindigkeitsflächen. In den spätern Diagrammen wird der Fehler jedesmal ausgeglichen.

Die Durchführung dieser Rechnung ist für praktische Zwecke nur teilweise notwendig. Zur Berechnung der Federschwingungen genügt die Kenntnis einer ganzen Schwingungsperiode in der untern Rast, also im vorliegenden Beispiel etwa von 120° bis 140°.

Die berechneten Kurven für $z = 12$ bis 23 sind in Abbildung 17 dargestellt. Der Uebersichtlichkeit wegen wurden die Maßstäbe weggelassen, da der Abstand der Mittellinien der untern und obern Rast immer $\tau_{dyn}/\tau_0 = 1$ entspricht.

Dieselben Diagramme wurden oszillographisch gewonnen und in Abbildung 16 durch Ineinanderkleben der Oszillogramme zusammengestellt. Damit die Oszillogramme einem einmaligen Hube entsprechen, wurde wiederum, wie früher beschrieben, die gewünschte Resonanz eingestellt, die Schwingung gedämpft und das Aufschaukeln der Schwingung registriert. Der erste Hub nach dem Aufheben der Dämpfung entspricht einem einmaligen Hub. Berechnung und Versuche wurden für das ruhende Federende durchgeführt und stimmen miteinander befriedigend überein[6]. Die Oszillogramme bestätigen demnach den von Magg eingeschlagenen Weg.

[6] Da die Dämpfung nicht plötzlich und oft nicht genau zwischen zwei Hüben aufgehoben werden konnte, sind die Zacken der Oszillogramme etwas kleiner.

	$\left(\frac{dh}{d\varphi}\right)_m$								$\Sigma\left(\frac{dh}{d\varphi}\right)$	$\frac{180^\circ}{h_0 z}\cdot\Sigma 2\frac{dh}{d\varphi} = \frac{\tau_{dyn}}{\tau_0}$
$m =$	φ	φ-18	φ-36	φ-54	φ-72	φ-90	φ-108	φ-126		
Grad	in Hundertstel cm pro Grad									
0	0								0	0
2	0,46								0,46	0,046
4	0,92								0,92	0,092
6	1,38								1,38	0,138
8	1,85								1,85	0,185
10	2,31								2,31	0,231
12	2,85								2,85	0,285
14	3,38								3,38	0,338
16	3,85								3,85	0,385
18	4,31	0							4,31	0,431
20	4,92	0,46							5,38	0,538
22	5,38	0,92							6,30	0,630
24	5,92	1,38							7,30	0,730
26	6,00	1,85							7,85	0,785
28	5,85	2,31							8,16	0,816
30	5,70	2,85							8,55	0,855
32	5,38	3,38							8,76	0,876
34	5,00	3,85							8,85	0,885
36	4,61	4,31	0						8,92	0,892
38	4,23	4,92	0,46						9,61	0,961
40	3,77	5,38	0,92						10,07	1,007
42	3,23	5,92	1,38						10,53	1,053
44	2,77	6,00	1,85						10,62	1,062
46	2,31	5,85	2,31						10,47	1,047
48	1,77	5,70	2,85						10,32	1,032
50	1,31	5,38	3,38						10,07	1,007
52	0,85	5,00	3,85						9,70	0,970
54	0,38	4,61	4,31	0					9,30	0,930
56	0	4,23	4,92	0,46					9,61	0,961
58	0	3,77	5,38	0,92					10,07	1,007
60	0	3,23	5,92	1,38					10,53	1,053
62	0	2,77	6,00	1,85					10,62	1,062
64	0	2,31	5,85	2,31					10,47	1,047
66	0	1,77	5,70	2,85					10,32	1,032
68	0	1,31	5,38	3,38					10,07	1,007
70	0	0,85	5,00	3,85					9,70	0,970
72	0	0,38	4,61	4,31	0				9,30	0,930
74	0	0	4,23	4,92	0,46				9,61	0,961
76	0	0	3,77	5,38	0,92				10,07	1,007
78	0	0	3,23	5,92	1,38				10,53	1,053
80	0	0	2,77	6,00	1,85				10,62	1,062
82	−0,08	0	2,31	5,85	2,31				10,39	1,039
84	−0,62	0	1,77	5,70	2,85				9,70	0,970
86	−1,15	0	1,31	5,38	3,38				8,92	0,892
88	−1,69	0	0,85	5,00	3,85				8,01	0,801
90	−2,23	0	0,38	4,61	4,31	0			7,07	0,707
92	−2,69	0	0	4,23	4,92	0,46			6,92	0,692
94	−3,23	0	0	3,77	5,38	0,92			6,84	0,684
96	−3,69	0	0	3,23	5,92	1,38			6,84	0,684
98	−4,07	0	0	2,77	6,00	1,85			6,55	0,655
100	−4,54	−0,08	0	2,31	5,85	2,31			5,85	0,585
102	−4,92	−0,62	0	1,77	5,70	2,85			4,78	0,478
104	−5,23	−1,15	0	1,31	5,38	3,38			3,69	0,369
106	−5,54	−1,69	0	0,85	5,00	3,85			2,47	0,247
108	−5,85	−2,23	0	0,38	4,61	4,31	0		1,22	0,122
110	−6,00	−2,69	0	0	4,23	4,92	0,46		0,92	0,092
112	−5,69	−3,23	0	0	3,77	5,38	0,92		1,16	0,116
114	−5,38	−3,69	0	0	3,23	5,92	1,38		1,46	0,146
116	−4,92	−4,07	0	0	2,77	6,00	1,85		1,63	0,163
118	−4,38	−4,54	−0,08	0	2,31	5,85	2,31		1,47	0,147
120	−3,85	−4,92	−0,62	0	1,77	5,70	2,85		0,93	0,093
122	−3,38	−5,23	−1,15	0	1,31	5,38	3,38		0,31	0,031
124	−2,92	−5,54	−1,69	0	0,85	5,00	3,85		−0,45	−0,045
126	−2,38	−5,85	−2,23	0	0,38	4,61	4,31	0	−1,16	*−0,116*
128	−1,92	−6,00	−2,69	0	0	4,23	4,92	0,46	−1,00	−0,100
130	−1,46	−5,69	−3,23	0	0	3,77	5,38	0,92	−0,31	−0,031
132	−1,00	−5,38	−3,69	0	0	3,23	5,92	1,38	0,45	0,045
134	−0,53	−4,92	−4,07	0	0	2,77	6,00	1,85	1,10	0,110
136	−0,08	−4,38	−4,54	−0,08	0	2,31	5,85	2,31	1,39	*0,139*
138	0	−3,85	−4,92	−0,62	0	1,77	5,70	2,85	0,93	0,093
140	0	−3,38	−5,23	−1,15	0	1,31	5,38	3,38	0,31	0,031

von hier aus periodisch ←—

Beispiel für die Berechnung des Kraftverlaufes bei einmaligem Hub. ($z = 20$)

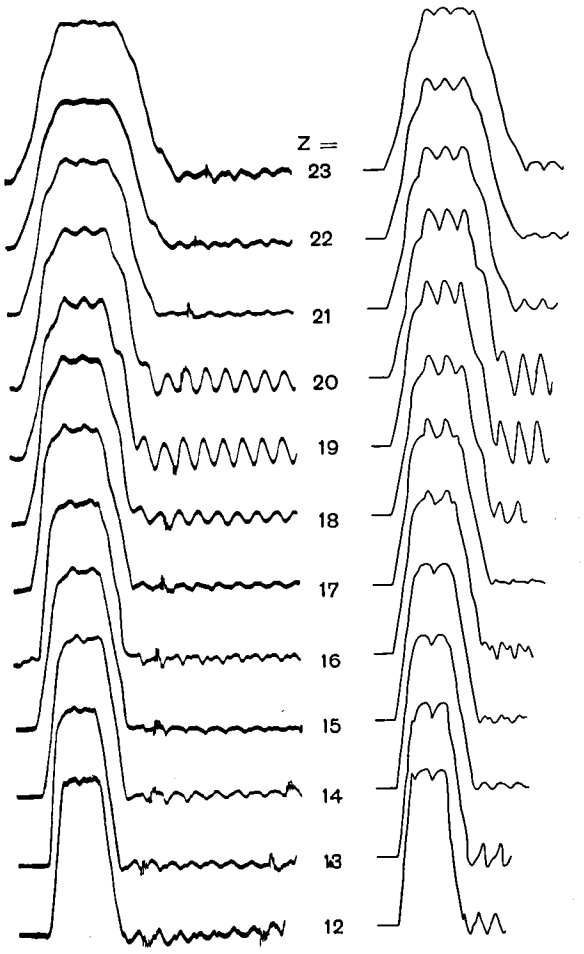

Abb. 16. Oszillogramme bei einmaligem Hub. **Abb. 17. Dieselben Kurven, berechnet.**

Berechnung der Schwingungsamplitude eines einmaligen Hubes aus der harmonischen Analyse.

Man denke sich die Geschwindigkeitskurve in folgende Fouriersche Reihe zerlegt:

$$\frac{dh}{d\varphi} = \left\{ \begin{array}{l} a_1 \sin\varphi + a_2 \sin 2\varphi + a_3 \sin 3\varphi \ldots\ldots \\ + b_1 \cos\varphi + b_2 \cos 2\varphi + b_3 \cos 3\varphi \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

Die Rechenvorschrift nach Gleichungen 9 und 10 kann für jede Harmonische einzeln durchgeführt werden, weil man die Teilresultate für die einzelnen Harmonischen überlagern darf.

Die Ueberlagerung des ersten Sinusgliedes nach Gleichung 9:

$$a_1 \sin\varphi + a_1 \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{z}\right) + a_1 \sin\left(\varphi - 2\frac{2\pi}{z}\right) + \\ + \ldots\ldots a_1 \sin\left(\varphi - [z-1]\,\frac{2\pi}{z}\right)$$

wird Null, wie man sich anhand einer sternförmigen vektoriellen Skizze überzeugen kann. Die z Vektoren bilden Winkel von $2\pi/z$ und halten sich gegenseitig im Gleichgewicht. Dasselbe gilt für das erste Cosinusglied.

Die Vektoren a_2 und b_2 bilden Winkel von $2 \cdot 2\pi/z$ und ihre vektorielle Summe verschwindet ebenfalls.

Man findet schließlich, daß die Ueberlagerungen der Harmonischen 1 bis $z-1$; $z+1$ bis $2z-1$; $2z+1$ bis $3z-1$ usw. sich aufheben und nur die Harmonischen z, $2z$, $3z$, $4z$ usw. eine Ueberlagerungssumme geben, nämlich:

$$z a_z \sin 2\varphi + z a_{2z} \sin 2z\varphi + z a_{3z} \sin 3z\varphi + \ldots + \\ + z b_z \cos 2\varphi + z b_{2z} \cos 2z\varphi + z b_{3z} \cos 3z\varphi + \ldots$$

In die Gleichung 9 eingesetzt, erhalten wir die Beziehung:

$$11)\quad \frac{\tau_{dyn}}{\tau_0} = \frac{2\pi}{h_0} \left\{ \begin{array}{l} a_z \sin z\varphi + a_{2z} \sin 2z\varphi + a_{3z} \sin 3z\varphi \ldots \\ + b_z \cos z\varphi + b_{2z} \cos 2z\varphi + b_{3z} \cos 3z\varphi \ldots \end{array} \right.$$

Gleichung 11 ist der Ausdruck dafür, daß die Eigenschwingungen der Feder mit den Harmonischen der erregenden Geschwindigkeiten in Resonanz geraten und zwar bedeutet der Koeffizient der Indices die Anzahl der Schwingungsbäuche. Die Amplitude der angefachten Schwingung ist proportional der erregenden Harmonischen der $dh/d\varphi$-Kurve.

Um die Gleichung 11 mit den frühern Resultaten zu vergleichen, wurde die Geschwindigkeitskurve des Versuchsnockens in eine Fouriersche Reihe zerlegt nach der Methode von Runge und mit Hilfe von 72 Ordinaten. Eine kleinere Ordinatenzahl ist nach den Erfahrungen am Beispiel Abbildung 9 nicht zu empfehlen. Man kann bei der Analyse jedoch die höhern Ordnungen vernachlässigen und die nach einem einmaligen Hub angestoßene Schwingung in erster Annäherung als Sinusschwingung ansprechen.

Die Uebereinstimmung des nach den beiden Methoden gewonnenen „Schwingungsspektrums" ist befriedigend (Abb. 18). Nur führt die Addition von z um $360°/z$ verschobenen Kurven schneller zum Ziel als die harmonische Analyse.

Einfluß der Nockenform.

Aus der Gleichung 9 geht hervor, daß die Nockenform über die Größe der Schwingungsausschläge entscheidet.

Ein Beispiel einer vereinfachten Geschwindigkeitskurve zeigt, welche Punkte man beachten soll, um konstruktiv die Entstehung der Federschwingungen zu erschweren. Interessante Aufschlüsse ergeben sich, wenn man zunächst nur die Folgen der Erhebung aus der untern in die obere Rast untersucht. (Dynamische Kompression einer elastischen Säule.) Es fällt dann vorläufig

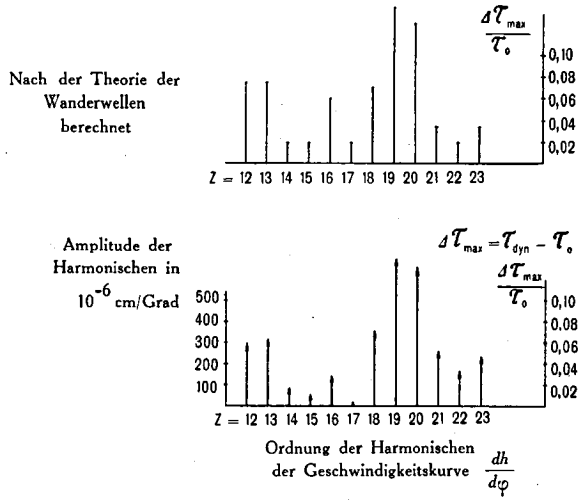

Abb. 18. Relative dynamische Ueberspannung für einmaligen Hub. (Uebereinstimmung der harmonischen Analyse mit den Ergebnissen der Wellentheorie).

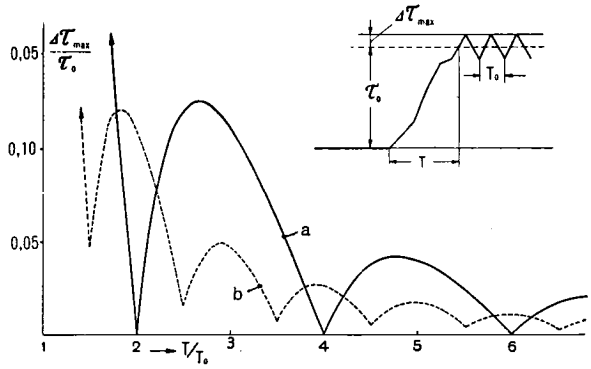

Abb. 19. Schwingungen nach der Kompression einer Feder.

a = bei dreieckförmiger Geschwindigkeitskurve
b = mit Geschwindigkeitskurve nach einer Sinushalbwelle

der Einfluß der obern Rastdauer außer Betracht. Zu dieser Untersuchung sollen zwei Geschwindigkeitskurven herangezogen werden, eine, bestehend aus einem gleichschenkligen Dreieck und eine aus einer Sinushalbwelle. Anstelle von z Schwingungen pro Umdrehung wird das Verhältnis $\varepsilon = T'/T_0$ eingeführt. Darin bedeutet T_0 die Eigenschwingungsdauer erster Ordnung und T' die Hubdauer gleich der Basis des Dreiecks oder der Sinushalbwelle. In der obersten Rast bleibt die Feder in schwingendem Zustande. Die maximale Schwingungsamplitude sei $\Delta\tau_{max}$ und ins Verhältnis zur Hubbeanspruchung τ_0 gesetzt.

Für die dreieckförmige Geschwindigkeitskurve werden die Beanspruchungsspitzen

$$12)\quad \frac{\Delta\tau_{max}}{\tau_0} = \frac{4}{\varepsilon}\left(0{,}5 + m - 2\frac{1+2+3\ldots m}{\varepsilon}\right) - 1$$

worin für $\varepsilon =$	0 bis 2	2 bis 4	4 bis 6	6 bis 8 etc.
$m =$	0	1	2	3

einzusetzen ist.

Für die Sinushalbwelle gelten in kurzen Bereichen folgende Formeln:

$$13)\quad \frac{\Delta\tau_{max}}{\tau_0} = \frac{a\pi}{2\varepsilon} - 1$$

für $\varepsilon =$ 0 bis 1,5 gilt $a = 1$

1,5 „ 2,5 „ $a = 2\sin\pi\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}$

2,5 „ 3,5 „ $a = 1 + 2\sin\pi\frac{\varepsilon-2}{2\varepsilon}$

3,5 „ 4,5 „ $a = 2\sin\pi\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon} + 2\sin\pi\frac{\varepsilon-3}{2\varepsilon}$

4,5 „ 5,5 „ $a = 1 + 2\sin\pi\frac{\varepsilon-2}{2\varepsilon} + 2\sin\frac{\varepsilon-4}{2\varepsilon}$

Die beiden Formeln sind in Abbildung 19 graphisch dargestellt und folgendermaßen entstanden: Die Kurven wurden im Sinne der Gleichung 9 graphisch überlagert. Diese Darstellung diente jedoch nur zur Orientierung und die Addition der Maxima erfolgte der größern Genauigkeit wegen analytisch. Dabei ergibt sich für jedes Gebiet zwischen zwei Tangentensprüngen der Abbildung 19 eine spezielle Formel. Die Formeln für alle Unterteilungen untereinandergereiht zeigten einen gesetzmäßigen Aufbau, woraus die Formeln 12 und 13 entstanden sind.

Es gibt danach gewisse Abstimmungsverhältnisse von $\varepsilon = T'/T_0$ bei denen durch die Kompression keine oder nur eine geringe Schwingung angefacht wird *(Nullpunkt erster Art)*.

Wenn die Geschwindigkeitszeitkurve des Federtellers während des Auflaufes in bezug auf die Mitte des Hubes symmetrisch verläuft und wenn zugleich Auflauf und Ablauf unter sich symmetrisch sind, so treten folgende Eigentümlichkeiten auf:

Form und Amplitude der angefachten Schwingung sind für den Auf- und Ablauf kongruent und unterscheiden sich durch eine Phasenverschiebung, welche vom zeitlichen Abstand T'' zwischen Auf- und Ablauf abhängt. (Gemessen an der Eigenschwingungsdauer T_0). Je nach der Phasenverschiebung überlagern sich die Schwingungen des Auflaufes denjenigen des Ablaufes, oder sie heben sich gegenseitig vollständig auf. *(Nullpunkt zweiter Art.)*

Um dieses Verhalten zu illustrieren, wurden für die dreieckförmige Geschwindigkeitskurve mit $T'' = 1{,}5\ T'$ in Abbildung 20 einige Schwingungsfiguren dargestellt. Bei $z = 26{,}2$ und 13,1 oder $T'/T_0 = 4$ und 2 treten in der oberen Rast keine Schwingungen auf, also auch in der untern nicht.

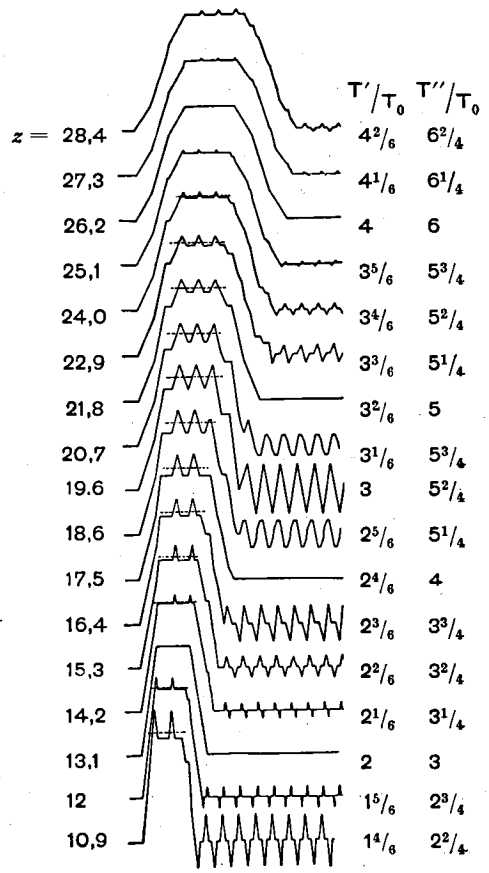

Abb. 20. Berechnete Beanspruchungskurven einer dreieckförmigen Geschwindigkeitskurve.

Bei $z = 21{,}8$ und $z = 17{,}5$ treten zwar Schwingungen nach dem Auflauf ein, werden hingegen während des Ablaufes wieder aufgehoben. Dieser Fall tritt immer ein, wenn T'' ein ganzzahliges Vielfaches der Eigenschwingungsdauer T_0 beträgt.

Die größte Amplitude im untersuchten Gebiete liegt bei $z = 19{,}6$: Die Anfachung ist an und für sich am größten und die Phasenverschiebung derart, daß sich die Amplitude verdoppelt.

Die untersuchte dreieckförmige Geschwindigkeitskurve deckt sich annähernd mit der Kurve Abbildung 8; weil diese nicht genau dreieckförmig ist, konnte auch bei $z = 13{,}1$; 17,5 und 21,8 nicht vollständig schwingungsfreies Verhalten erreicht werden.

Es wäre naheliegend, einen schwingungsfreien Nocken dadurch herzustellen, daß man aus einer harmonischen Analyse die ersten 12 Harmonischen wieder durch Synthese zusammensetzt. Dieser Nocken wäre für $z > 12$ vollständig schwingungsfrei. Allein die geraden Linien der obern und untern Rast würden nach der Synthese einen welligen Verlauf annehmen. Aussichtsreicher ist ein schwingungsarmes Gebiet, wie z. B. $z = 21{,}8$ bis 28,4. (Kombination eines Nullpunktes erster Art mit zwei Nullpunkten zweiter Art.) Bemerkenswert ist auch, daß die Schwingungsamplituden bei der Sinushalbwelle kleiner ausfallen als beim Dreieck.

Dieselben Nullpunkte wie in Abbildung 19 treten auf, wenn man die Erregung einer masselosen Feder mit einer Punktmasse in der Federmitte untersucht. Wir dürfen also die berechtigte Annahme treffen, daß eine lange Feder mit einem mittleren Führungskolben dieselben Nullpunkte aufweist, wie eine Feder ohne Einzelmasse, wenn man die Eigenschwingung f nach Dunkerley berechnet:

$$\frac{1}{f^2} = \frac{1}{f_m^{\,2}} + \frac{1}{f_f^{\,2}} \tag{14}$$

f_m = Eigenschwingung der Einzelmasse bei masselos gedachter Feder.

f_f = Eigenschwingung der Feder ohne Einzelmasse.

Die Entstehung der Resonanz.

Wenn auf eine federnd aufgehängte Masse plötzlich eine sinusförmige Kraft mit gleicher Frequenz wie ihre Eigenschwingung einwirkt, so nimmt die Amplitude der in Resonanz geratenden Masse stetig zu, um nach einer gewissen Zeit asymptotisch einen Beharrungszustand zu erreichen. Aehnlich entsteht die Aufschaukelung der Federschwingungen. Wenn die Drehzahl der Welle mit der Eigenschwingung in ein ganzzahliges Verhältnis gerät, so würde ohne Dämpfung bei jedem Hub ein gleicher Zuwachs der Schwingungsamplitude hinzukommen. Infolge innerer Materialdämpfung und Luftreibung klingt jedoch zwischen den einzelnen Hüben die Schwingung teilweise wieder ab. Beharrung wird erreicht, wenn der Dämpfungsverlust pro Umdrehung gleich der Amplitude bei einmaligem Hub ist.

Rechnerisch kann die Anfachung der Schwingung folgendermaßen erfaßt werden:

Die Schwingungsamplitude nimmt, wie später experimentell gezeigt wird, nach einer Exponentialkurve ab, wobei das Verhältnis von zwei aufeinanderfolgenden Amplituden konstant bleibt

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \alpha$$

Nach Verlauf einer Nockenumdrehung, d. h. nach z Schwingungen beträgt das Amplitudenverhältnis

$$\frac{A_{n+z}}{A_n} = \alpha^z$$

Die gedämpfte harmonische Schwingung kann durch einen Vektor dargestellt werden, dessen Spitze eine logarithmische Spirale beschreibt. Im Resonanzfalle dreht sich der Vektor während einer Nockenumdrehung genau z mal um je 360°. Beträgt die bei einmaligem Hube angefachte Schwingungsamplitude A (in dimensionslosen τ_{dyn}/τ_0-Einheiten), so überlagert sie sich der abgeklungenen Amplitude $A\,\alpha^z$ des vorgängigen Hubes. Die frühern Hübe liefern noch die Beiträge $A\alpha^{2z}$, $A\alpha^{3z}$, $A\alpha^{4z}$ usw. und ihre Summe beträgt

$$15)\quad A(1+\alpha^z+\alpha^{2z}+\alpha^{3z}\ldots)=\frac{A}{1-\alpha^z}=AR$$

Um die Amplitude der aufgeschaukelten Resonanzschwingung zu erhalten, muß die Amplitude A bei einmaligem Hub mit dem Resonanzfaktor $R=\frac{1}{1-\alpha^z}$ multipliziert werden.

In Abbildung 21 ist der Resonanzfaktor für $z = 5$ bis 50 und $A_n/A_{n+1} = 1{,}005$ bis 1,10 dargestellt. Die Tabelle reicht für praktische Berechnungen vollständig aus.

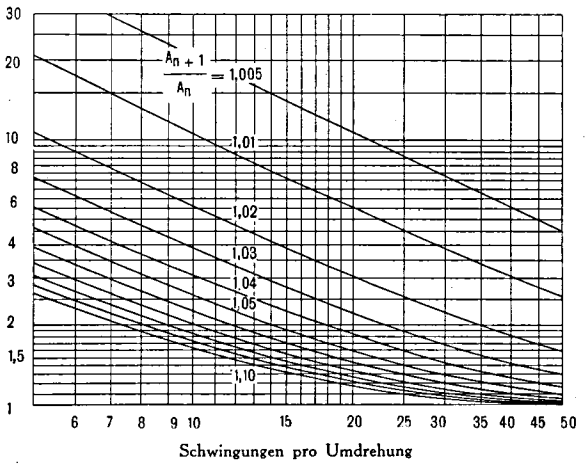

Abb. 21. Resonanzfaktor.

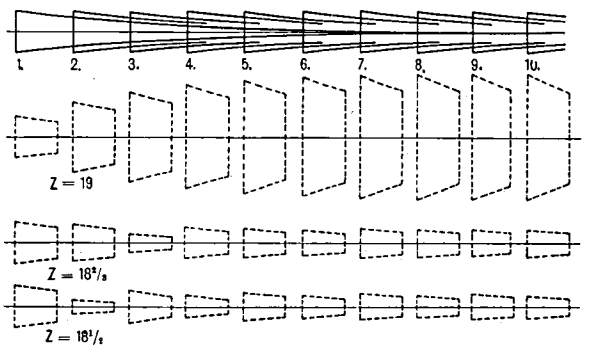

Abb. 22. Aufschaukeln der Federschwingung nach dem ersten Hub (berechnet).

Zwischen zwei Resonanzstellen, d. h. für $z = a + 0{,}5$ (a = ganze Zahl) beträgt die Phasenverschiebung der zu überlagernden Vektoren nicht mehr 360° wie oben, sondern $(a + 0{,}5)\ 360°$. Jeder Vektor wirkt daher entgegengesetzt zum Vorhergehenden und der „Zwischenresonanzfaktor" wird gleich

$$A(1-\alpha^z+\alpha^{2z}-\alpha^{3z}+\alpha^{4z}\ldots)=\frac{A}{1+\alpha^z}$$

$$1>\frac{1}{1+\alpha^z}>0{,}5$$

In Abbildung 22 wurde das Aufschaukeln einer Federschwingung für $z = 19$ berechnet. Die Zwischenräume symbolisieren den Hub, welcher der Einfachheit halber nicht eingezeichnet wurde. Nach jedem Hub erfährt die Schwingung den konstanten Zuwachs A, bis der Dämpfungsverlust gleich A wird und der stationäre Zustand erreicht ist.

Für $z = a + 0{,}5$ würde ohne Dämpfung immer eine Umdrehung mit einer Amplitude $2\,A$ und einer schwingungsfreien Umdrehung abwechseln. Infolge Dämpfung tritt dies nicht ein, sondern wie in Abbildung 22 für $z = 18{,}5$ gezeichnet. Je nach Größe der Dämpfung wird im Beharrungszustande ein Wert zwischen A und $A/2$

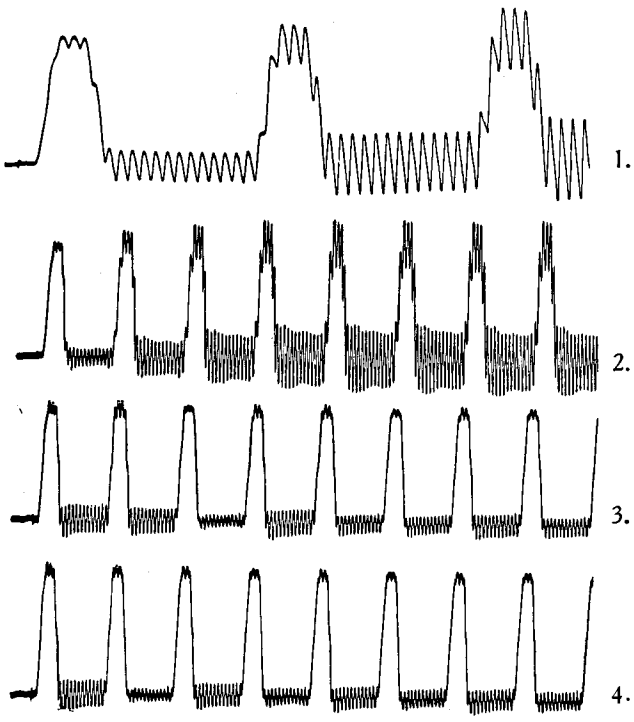

Abb. 23. Aufschaukeln der Federschwingung, oszillographiert.

1. und 2. Oszillogramm: $z = 19$
3. Oszillogramm: $z = 18^2/_3$
4. Oszillogramm: $z = 18^1/_2$

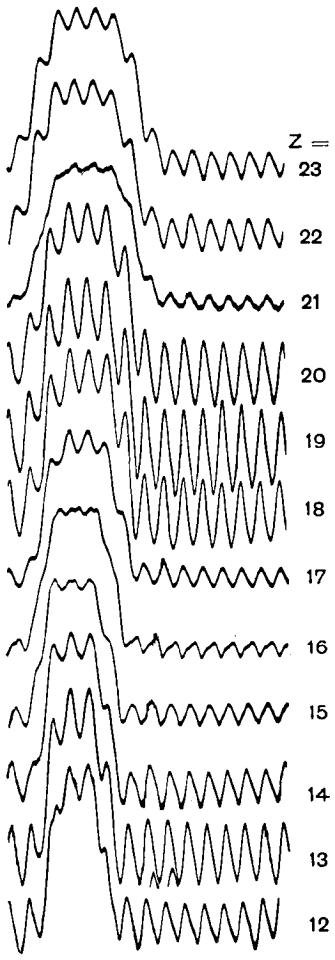

Abb. 24. Oszillogramme der Resonanzstellen.

erreicht. Aehnlich verhält sich die Aufschaukelung bei $z = \alpha + {}^2/_3$; z. B. $z = 18^2/_3$. Man vergleiche die entsprechenden Oszillogramme der Abb. 23 mit Abb. 22.

Oszillogramme der aufgeschaukelten Resonanzstellen für $z = 12$ bis 23 sind in Abbildung 24 in ähnlicher Darstellung wiedergegeben wie die ihnen entsprechenden Oszillogramme der Abbildungen 16 und 17.

Multipliziert man die theoretisch berechneten Amplituden bei einmaligem Hub (Abbildung 18) mit dem Resonanzfaktor nach Abbildung 21, so erhält man die theoretischen Resonanzamplituden

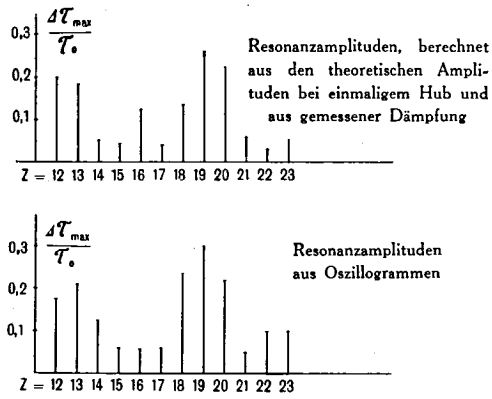

Abb. 25. Relative dynamische Ueberspannung bei Resonanz. (Vergleich des theoretischen und gemessenen Schwingungsspektrums).

der Abbildung 25, welche mit den oszillographierten Amplituden der Abbildung 24 befriedigend übereinstimmen. Die für die Bestimmung des Resonanzfaktors benötigte Dämpfung wurde nach den später zu beschreibenden Ausschwingversuchen bestimmt.

Die gedämpfte, erzwungene Federschwingung.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung der gedämpften Federschwingung lautet nach Hort, „Die Differentialgleichungen des Ingenieurs" 1925, S. 585:

$$y = e^{-bx}\,[C_1 \sin(\omega t - ax) + C_2 \cos(\omega t - ax)] + \\ + e^{+bx}\,[C_3 \sin(\omega t + ax) + C_4 \cos(\omega t + ax)]$$

Am festen Federteller sei $x = 0$ und $y = 0$, woraus sich ergibt

$$C_1 = -C_3 \qquad C_2 = -C_4$$

Der Federteller $x = l$ werde durch einen Exzenter nach dem Gesetz

$$(y)_{x=l} = r \sin \omega t$$

bewegt. Diese Randbedingung gibt zwei weitere Bestimmungsgleichungen für die Konstanten. Wir erhalten nach Durchführung der Rechnung die Bewegungsgleichung für die gedämpfte, erzwungene Federschwingung:

$$16)\qquad \frac{y}{r} = \frac{e^{-bx}\left\{[e^{-bl} - e^{bl}]\cos al \sin(\omega t - ax) + [e^{-bl} + e^{bl}]\sin al \cos(\omega t - ax)\right\}}{e^{-2bl} - 2\cos 2al + e^{2bl}} - \\ - \frac{e^{bx}\left\{[e^{-bl} - e^{bl}]\cos al \sin(\omega t + ax) + [e^{-bl} + e^{bl}]\sin al \cos(\omega t + ax)\right\}}{e^{-2bl} - 2\cos 2al + e^{2bl}}$$

Aus dieser Gleichung entsteht durch Vernachlässigung der Dämpfungszahl b die einfache Beziehung

$$17) \qquad y = r \frac{\sin \omega t \sin ax}{\sin al}$$

welche zuerst von Fröhlich angegeben wurde.

Die Konstanten a und b können durch Einsetzen eines Teilintegrales in die partielle Differentialgleichung bestimmt werden:

$$18) \qquad \begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}(\mu^2\omega^2+k^2)}+\frac{\mu}{c}\omega^2\right\}} \cong \frac{\omega}{w_s} \\ b &= \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}(\mu^2\omega^2+k^2)}-\frac{\mu}{c}\omega^2\right\}} \cong \frac{k}{2\mu}\cdot\frac{1}{w_s} \end{aligned}$$

Den Kraftverlauf der Feder am festen Federteller erhalten wir aus der partiellen Differentiation der Gleichung 16

$$(P)_{x=o} = c\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=o}$$

Da uns nur die Amplitude im Resonanzfalle interessiert, setzen wir in Gleichung 16 überall näherungsweise

$$al \cong \frac{\omega}{w_s} l = \pi$$

als Bedingung für Resonanz. Das Resultat beider Operationen ergibt

$$(P)_{x=o} = P_{dyn} = \frac{r\omega c}{w_s} \cdot \frac{2}{e^{bl}-e^{-bl}} \sin(\omega t + \psi)$$

Der Kraftverlauf bei sehr langsamer Bewegung ist gleich

$$P_o = \frac{r}{l} c \sin \omega t$$

und das Amplitudenverhältnis wird

$$19) \qquad \left|\frac{P_{dyn}}{P_o}\right| = \left|\frac{\tau_{dyn}}{\tau_o}\right| = \frac{\omega}{w_s} l \cdot \frac{2}{e^{bl}-e^{-bl}} = \pi \frac{2}{e^{bl}-e^{-bl}}$$

Nach Gleichung 9 erhalten wir für eine einmalige Sinusbewegung des Federtellers ($z = 1$, $h = r$)

$$\frac{\tau_{dyn}}{\tau_o} = 2\pi$$

Der Resonanzfaktor (für $z = 1$)

$$R = \frac{1}{1-\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)^z} = \frac{1}{1-\frac{A_{n+1}}{A_n}}$$

wird vermittelst der Beziehung

$$2\,bl = 2\frac{k}{2\mu}\frac{l}{w_s} = \frac{k}{2\mu}T_0 = ln \cdot \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

umgeformt in

$$R = \frac{1}{1-e^{-2bl}} = \frac{e^{bl}}{e^{bl}-e^{-bl}}$$

Die Näherungsgleichung lautet dann

$$20) \qquad \frac{\tau_{dyn}}{\tau_o} = 2\pi \frac{e^{bl}}{e^{bl}-e^{-bl}}$$

und unterscheidet sich von der Gleichung 19 nur durch den Faktor e^{bl}, welcher bei luftgedämpften Federn auf einige Prozente genau gleich 1 gesetzt werden darf. Der Unterschied entsteht dadurch, daß bei der Näherungslösung die Dämpfung während des Hubes vernachlässigt wird.

Die Eigenschwingung der Feder.

Die Grundschwingung pro sec der runden Stahlfeder berechnet sich aus der Formel

$$f = 358\,000 \frac{\delta}{pd^2}$$

δ = Drahtstärke in mm
d = mittl. Windungsdurchmesser in mm
p = Windungszahl

Um die Genauigkeit der Vorausberechnung zu prüfen, wurden die Eigenfrequenzen von 10 Federn verschiedener Dimensionen gemessen. Die Federn wurden in Eigenschwingung versetzt und ein Oszillogramm des Abklingens aufgenommen. Durch Vergleich mit der genau geeichten 500-periodigen Sinuslinie des Zeitschreibers wurden folgende Eigenschwingungen festgestellt:

δ =	3	4	4,5	5,5	6	mm
d =	36	38	38	40	40	mm
p =	9	12,5	9,5	9	4	Windungen
f gemessen =	104	85	114	141	348	/sec.
f berechnet =	92	79	117	137	335	/sec.

δ =	6	6	6,5	7	8	mm
d =	38	42	44	43	40	mm
p =	11	14	9	7	15	Windungen
f gemessen =	135	87	152	198	119	/sec.
f berechnet =	135	87	133	194	119,5	/sec.

Die Abweichungen sind derart, daß eine Vermeidung der Resonanz durch Vorausberechnung der Eigenschwingung erfolglos ist. Zum Beispiel lauten die Resonanzdrehzahlen bei einer Eigenschwingung von 6000/min.

..... 300, 316, 333, 353, 375/min. .....

Die kritischen Drehzahlen liegen so nahe beieinander, daß an einem Motor praktisch bei jeder Drehzahl eine der Federn in Resonanz gerät, weil die Eigenschwingungen gleicher Federn infolge

der Herstellungsungenauigkeiten etwas voneinander abweichen. Für die Vermeidung der Federschwingungen kommt deshalb nur die Berechnung der schwingungsarmen Gebiete in Frage, wenn keine Möglichkeit einer ausreichenden Dämpfung besteht.

Die Dämpfung der Federschwingungen.

Die allgemeine Differentialgleichung der gedämpften Federschwingung nach Gleichung 1 enthält folgende Lösung für die abklingende Eigenschwingung:

$$y = e^{-\frac{k}{2\mu}t} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left\{ \left[A_\nu \sin \omega_\nu t + B_\nu \cos \omega_\nu t \right] \sin \frac{\nu\pi}{e} x + \right.$$

$$\left. + \left[C_\nu \sin \omega_\nu t + D_\nu \cos \omega_\nu t \right] \cos \frac{\nu \pi}{l} x \right\}$$

worin

$$\omega_\nu = \sqrt{\nu^2 \omega_0{}^2 - \left(\frac{k}{2\mu}\right)^2} \qquad \omega_o = \frac{w_s}{l} \pi$$

Je nach der Art der Anregung kann sich die abklingende Schwingung aus stehenden Wellen mit verschiedenen Ordnungszahlen zusammensetzen. Die Laufzeit der Wellen ändert sich sehr wenig mit der Ordnungszahl.

Beispiel $\omega_0 \cong 1200$; $k/2\mu \cong 5$
$\omega_1 = 0{,}9992\ \omega_0$; $\omega_\infty = 1{,}000\ \omega_0$

Nach einer vollendeten Grundschwingung entsteht zwischen der Grundschwingung und einer Oberschwingung eine Phasenverschiebung von höchstens 0,3 Grad. Die Kurvenform verändert sich deswegen ein wenig während dem Abklingen, wie Fröhlich an einem einfachen Versuch zeigte.

Der Aufbau der Lösung zeigt aber auch, daß die Schwingungsausschläge, also auch die Beanspruchung am Federende, bei allen Ordnungen in der gleichen Zeit gleich stark abnehmen je nach dem Betrag des Quotienten $k/2\mu$.

μ die reduzierte Masse pro cm Federdraht hängt nur vom Drahtdurchmesser und dem spezifischen Gewicht ab. Auch k ist nur eine Funktion des Drahtdurchmessers. Es ist demnach zu erwarten, daß $k/2\mu$ ebenfalls nur vom Drahtdurchmesser abhängt.

Um diese vorläufige Annahme zu überprüfen, wurde die Dämpfung der Ausschwingoszillogramme, welche der Frequenzbestimmung dienten, ausgewertet. Bei der Aufnahme der Abklingungskurven war die Empfindlichkeit des Indikators und die Anregung so eingestellt, daß die Federn der Größenordnung nach mit einer Beanspruchung ausklangen, wie sie bei den Federschwingungen auftreten.

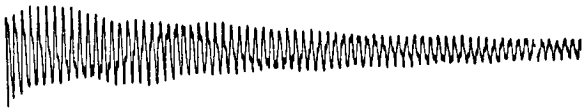

Abb. 26. Abklingen einer Federschwingung.

Im Oszillogramm (Abb. 26) eines solchen Abklingens traten schwebungsartige Erscheinungen auf, deren Ursache nicht abgeklärt werden konnte. Zuerst wurden Biegungsschwingungen senkrecht zur Federachse vermutet, deren Frequenz jedoch für eine Schwebungsbildung nicht in Frage kam. Aehnliche Erscheinungen zeigten sich in geringerem Maße bei den andern Federn.

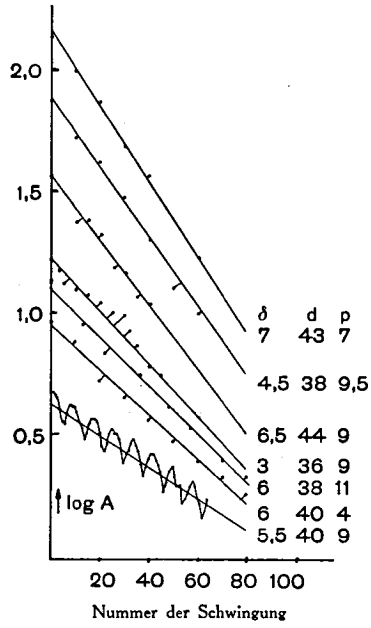

Abb. 27. Graphische Bestimmung der Dämpfung.

Abbildung 27 enthält für einige Federn die Logarithmen der Amplituden über der Schwingungsnummer aufgetragen. Die Streuung wurde durch eine Gerade ausgeglichen. (Die gewellte Punktreihe gehört zu Oszillogramm Abb. 26.) Die Neigung der Geraden bestimmt den Wert der Dämpfung:

Der Wert

$$\frac{k}{2\mu} = f \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}$$

über dem Drahtdurchmesser aufgetragen (Abb. 28) zeigt, daß er noch von einem weiteren Faktor beeinflußt wird.

Es fiel auf, daß vier Federn mit gleichem Drahtdurchmesser und annähernd gleichem Windungsdurchmesser um so weniger gedämpft werden, je länger die Feder ist.

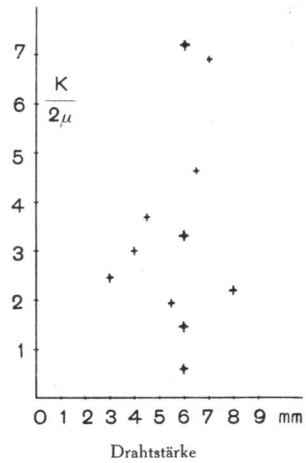

Abb. 28. Dämpfung der Versuchsfedern.

Die Dämpfungswerte betragen:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{Windungszahl } p = & 4 & 11 & 14 & 17 \\ k/2\mu = & 7{,}2 & 3{,}3 & 1{,}45 & 0{,}58 \end{array}\right\} \delta = 6;\ d \cong 40\,\text{mm}$$

Dieser Effekt kann nicht anders erklärt werden als durch eine zusätzliche Dämpfung am Ende der Feder, die wir mit Reflexionsverlust bezeichnen können, welcher sich aus folgenden Anteilen zusammensetzt:

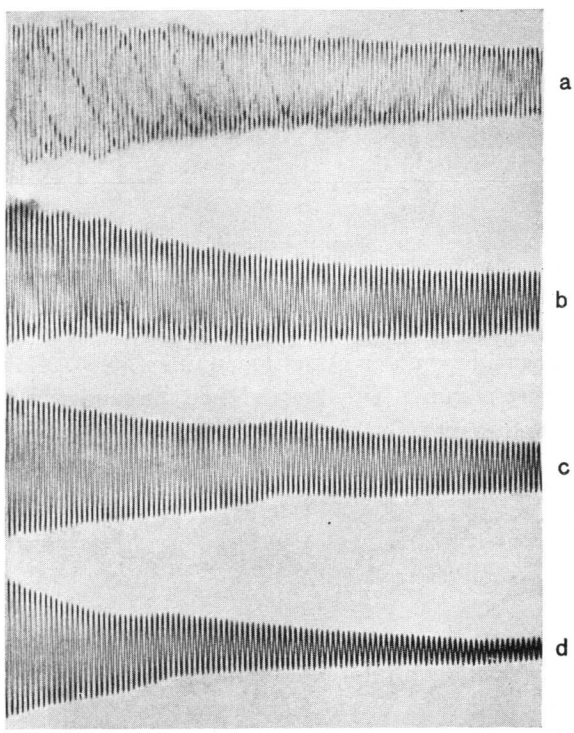

Abb. 29. Einfluß weicher Unterlagen auf die Dämpfung.

a = ohne Unterlage
b = Polyperitscheiben
c = Lederscheiben
d = Gummischeiben

1. Reibung des Federdrahtes am Federteller;
2. Reibung zwischen den Federwindungen beim Abrollen der letzten Windung;
3. Abstrahlung von Schallenergie über die Federteller in die Motormasse.

Daß Reflexionsverluste in unberechenbarer Weise auftreten, konnte durch folgenden Versuch nachgewiesen werden:

Ein und dieselbe Feder ($\delta = 6$; $d = 40$; $p = 17$) wurde unter genau gleichen Bedingungen mit Gummi-, Leder- und Polyperitunterlagen auf Dämpfung untersucht. Die Unterlagen bestanden aus Ringen von 5 mm Dicke und gleichem Innen- und Außendurchmesser wie die Feder. Die Ringe wurden beidseitig der Feder zwischen Feder und Federteller eingefügt. Abbildung 29 zeigt die Gegenüberstellung der Oszillogramme mit annähernd gleicher Anfangsamplitude. (Je weicher die Unterlage, desto größer der Reflexionsverlust.)

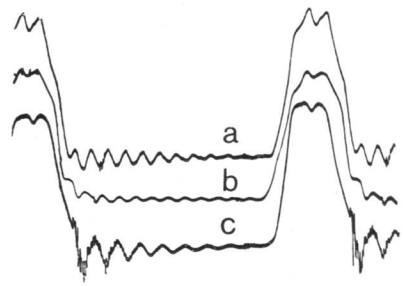

Abb. 30. Federschwingung bei starker Dämpfung.

Eine intensive Dämpfung kann erreicht werden durch Anpressung federnder Blechzungen. Je nach dem Anpreßdruck konnte jede beliebige Dämpfung eingestellt werden, z. B. klingt in Abbildung 30 a die Schwingung während einer Umdrehung vollständig ab. Die Federschwingung 30 b wurde in Schmieröl (ca. 50° Engler) aufgenommen. In Zylinderöl (ca. 300° Engler) konnten keine Schwingungen zwischen $z = 12$ und 24 beobachtet werden. Um die große Dämpfung sichtbar zu machen, wurde die Feder soweit entspannt, daß ein Schlagen der Rolle eintrat und eine Schwingung angestoßen wurde (Abb. 30 c).

Einfluß der Federvorspannung.

Nach der entwickelten Theorie sollten die Amplituden der Resonanzschwingungen unabhängig von der Vorspannung bleiben. Swan und Savage fanden hingegen eine Zunahme der Amplitude mit zunehmender Vorspannung. Der Verfasser hat deshalb bei $z = 20$ die Vorspannung vom klopfenden Zustande bis fast zum Anliegen

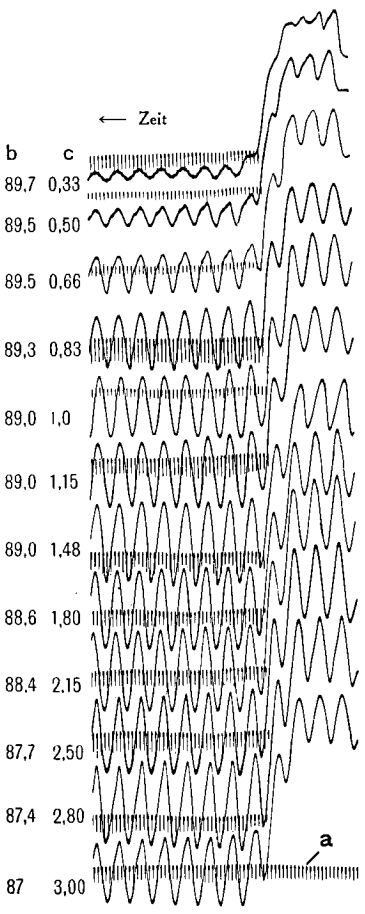

Abb. 31. Einfluß der Vorspannung.

a = Vergleichsfrequenz = 500/sec
b = Eigenfrequenz der Feder pro sec.
c = Spiel zwischen zwei Windungen in mm während der obern Rast

der Windungen variiert (Abb. 31). Als Parameter wurde das mittlere Spiel zwischen den Windungen gewählt, wie es in der obern Rast noch übrig bleibt (Zahlen *c*). In Uebereinstimmung mit Swan und Savage nimmt die Eigenschwingung bei zunehmender Vorspannung etwas zu, weil die Feder durch das Aufrollen des Federendes etwas verkürzt wird (Zahlen *b*).

Bei 3 mm Spiel klopft die Federrolle und wird deshalb vermutlich etwas gedämpft. Mit kleiner werdendem Spiel verkleinert sich die Amplitude fast unmerklich und nimmt zwischen 1 bis 0,33 mm stark ab. Die Dämpfung nimmt hier zu, weil sich die Federwindungen beim Schwingen in der obern Rast gegenseitig berühren. Man hört einen zwitschernden Ton, während bei kleinerer Vorspannung nur ein tiefes Brummen entsprechend der Eigenfrequenz vernehmbar ist.

Einfluß des Rollenspiels.

Swan und Savage fanden ebenfalls eine starke Veränderung des Schwingungsspektrums mit der Größe des Rollenspiels. Dies ist begreiflich, da sich mit dem Rollenspiel der Geschwindigkeitsverlauf des Federendes verändert. Swan und Savage steigerten das Rollenspiel bis auf 1,5 mm bei einem Hub von ca. 9 mm. Vorliegende Versuchsanordnung besaß einen Hub von 18 mm und klopfte bei 0,8 mm Rollenspiel so stark, daß eine weitere Steigerung nicht mehr möglich war. Innerhalb dieser Grenze wurden bei 4 Rollenspielen Diagramme bei einmaligem Hube gewonnen und mit theoretischen verglichen ($z = 20$). Der Vergleich zeigt, daß sich die Amplitude innerhalb einem Rollenspiel zwischen 0 und 0,8 mm nicht wesentlich ändert (Abb. 32).

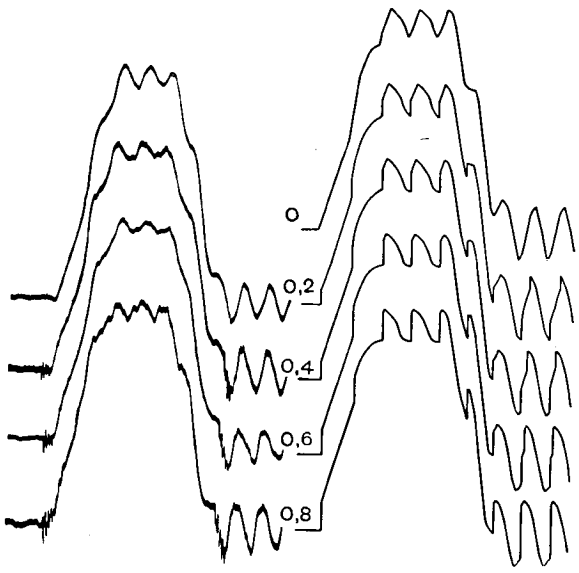

Abb. 32. Vergleich berechneter und oszillographierter Federkräfte bei Rollenspielen von 0 bis 0,8 mm ($z = 20$).

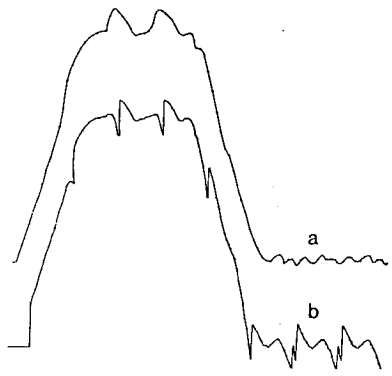

Abb. 33. Vergrößerung der Schwingungen durch das Rollenspiel.

a = ohne Spiel, *b* = mit 0,8 mm Spiel ($z = 17$)

Anders verhält es sich bei schwingungsarmen Gebieten, z. B. $z = 17$. Nach dem Durchlaufen des Rollenspiels setzt plötzlich eine bestimmte Geschwindigkeit ein, d. h. am Anfang und am

Ende der Geschwindigkeitskurve wird je ein kleines Dreieck abgeschnitten. Diese Dreiecke nach Gleichung 9 überlagert, ergeben nun ein spitzenreiches Schwingungsbild (Abb. 33). Eine Uebereinstimmung mit dem Oszillogramm ergab sich jedoch nicht, da die Erschütterungen des Schlages sich ebenfalls auf den Quarz übertrugen und die Details im Oszillogramm verdeckten.

Zusammenfassung.

Man denke sich die ruhende Nockenwelle während der untern Rast und vor Beginn des ersten Hubes auf eine konstante Drehzahl beschleunigt. Zu Beginn des ersten Anhubes wächst die Beanspruchung linear mit der Geschwindigkeit des Federtellers, bis zur Rückkehr der am ruhenden Ende reflektierten Störung, welche sich dem ersten Vorgang überlagert. Der weitere Verlauf der Beanspruchung entspricht der Ueberlagerung aller hin und her laufenden Störungswellen und schwankt um eine, mit dem Hub linear ansteigende Mittellinie.

Nach dem ersten Hub bleibt eine Schwingung zurück, welche z. B. bei 10 Eigenschwingungen pro Umdrehung die 10., 20., 30. Harmonische usw. der Ventilgeschwindigkeitskurve enthält. Die Schwingungsamplitude berechnet sich schneller mit Hilfe der Ueberlagerungen, als mittelst harmonischer Analyse. Die Größe der nach dem ersten Hube angefachten Schwingung in Abhängigkeit der Anzahl Eigenschwingungen pro Umdrehung zeigt dem Konstrukteur, in welchem Drehzahlgebiet besonders große Resonanzschwingungen auftreten. An einem Beispiel wird gezeigt, wie man vorgehen muß, um ein möglichst breites, schwingungsarmes Drehzahlgebiet zu erhalten.

Beträgt die Eigenschwingungszahl genau ein Vielfaches der Nockendrehzahl, so würde sich die Schwingungsamplitude nach jedem Hub um denselben Betrag vergrößern. Infolge der Dämpfung wird jedoch Beharrung erreicht, sobald der Zuwachs pro Umdrehung gleich dem Dämpfungsverlust geworden ist. In einer Kurvenschar wird ein Resonanzfaktor angegeben, mit dem die berechnete Amplitude des ersten Hubes multipliziert wird, um die Beharrungsamplitude zu erhalten. Der Resonanzfaktor verändert sich mit der Größe der Dämpfung und mit der Anzahl Schwingungen pro Umdrehung.

Die Dämpfung hängt nicht nur vom Luftwiderstand und von der inneren Materialreibung ab, sondern auch von der Art der Federabstützung (Reflexionsverlust). In Schmieröl ist die Dämpfung so groß, daß die Schwingungen bis zum nächsten Hub abklingen.

Die beschriebenen Vorgänge wurden durch zahlreiche Versuche mit Nocken und Federn bestätigt. Oszillographische Messungen des Kraftverlaufes an den Federenden stimmen befriedigend mit den vorausberechneten Kurven überein.

Vorliegende Arbeit ist während meiner freien Zeit im physikalischen Laboratorium der Firma Gebrüder Sulzer A.-G., Winterthur, entstanden. Die Firma hat mir für die Versuche in zuvorkommender Weise den Federprüfapparat, den Siemens-Universaloszillographen und die Quarzindikatoren zur Verfügung gestellt, wofür ich auch an dieser Stelle der Firma meinen besten Dank ausspreche.

Meinem Referenten, Herrn Prof. Dr. Eichelberg, danke ich für die liebenswürdige Aufmerksamkeit, welche er während der Entstehung dieser Arbeit meinen Untersuchungen entgegengebracht hat.

Lebenslauf.

Ich wurde 1905 in meinem Heimatort Aarberg (Kt. Bern) geboren und besuchte daselbst die Primar- und Sekundarschule. Nach einem Jahreskurs in der Mechanikerschule Biel und nach anderthalbjähriger Vorbereitung durch das Institut Minerva, Zürich, bestand ich 1923 die Aufnahmeprüfung an die Eidg. Technische Hochschule in Zürich. Nach dem Diplom als Maschineningenieur (1927) trat ich in die Firma Gebrüder Sulzer A.-G., Winterthur, ein (Studienbüro). Im Winter- und Sommersemester 1929/30 besuchte ich im Auftrage der Firma das physikalische Praktikum am Physikalischen Institut der Eidg. Technischen Hochschule. Seither arbeite ich bei Gebrüder Sulzer in der Abteilung für Studien und Entwicklung auf dem Gebiete physikalischer Forschung, u. a. auch in der Anwendung des Oszillographen bei maschinendynamischen Problemen.