ETH zürich

ETH Library

Analogieverfahren für die Bestimmung elektromagnetischer Wechselfelder in Leitern und Halbleitern

Doctoral Thesis

Author(s):
Vuilleumier, Raymond

Publication date:
1961

Permanent link:
https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-a-000089813

Rights / license:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection.
For more information, please consult the Terms of use.

Prom. Nr. 3131

Analogieverfahren für die Bestimmung elektromagnetischer Wechselfelder in Leitern und Halbleitern

Von der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften
genehmigte

PROMOTIONSARBEIT

vorgelegt von

RAYMOND VUILLEUMIER
dipl. El.-Ing. E. T. H.
von La Sagne / NE und Tramelan / BE

Referent: Herr Prof. Dr. M. Strutt
Korreferent: Herr P.-D. Dr. A. P. Speiser

Juris-Verlag Zürich
1961

Leer - Vide - Empty

Meinen lieben Eltern

in Dankbarkeit

Leer - Vide - Empty

VORWORT

Die vorliegende Arbeit wurde in den Jahren 1960 - 1961 am Institut für höhere Elektrotechnik der Eidgenössischen Technischen Hochschule durchgeführt.

Herrn Prof. Dr. M. J. O. Strutt möchte ich meinen besonderen Dank aussprechen für sein ständiges Interesse und seine positive Kritik, die das gute Gelingen dieser Arbeit erst ermöglichten.

Auch Herrn P.-D. Dr. A. P. Speiser danke ich für das Interesse, das er durch Uebernahme des Korreferates der vorliegenden Arbeit entgegengebracht hat.

Meinen lieben Kollegen und Mitarbeitern am Institut, insbesondere den Herren Dipl.-Ing. H. Baggenstos, Dipl.-Ing. F. K. Reinhart, Dipl.-Ing. E. Suter, Dipl.-Ing. P. Tschopp, Dipl.-Ing. W. Wunderlin, die mir durch aufrichtige Freundschaft und kameradschaftliche Hilfsbereitschaft die Arbeit oft erleichtert haben, bleibe ich in herzlicher Dankbarkeit verbunden.

Ebenso möchte ich den Herren der Werkstatt der elektrotechnischen Institute danken, die sich um die Arbeit verdient machten, sowohl als auch Herrn cand. Ing. H. Menzi, der sich mit Sorgfalt und Umsicht der Zeichnungen annahm.

Zürich, März 1961 Raymond Vuilleumier

Leer - Vide - Empty

INHALTSVERZEICHNIS

Symbolliste 9

1. GRUNDGLEICHUNGEN ELEKTROMAGNETISCHER FELDER 13

1.1 Grundformeln 13

1.1.1 Krummlinige Koordinaten (Einführung der E - und H - Welle) 13

1.1.2 Beschränkung auf Cartesische und zylindrische Koordinaten 16

1.2 Analogie-Grundformeln 18

1.2.1 Differenzengleichungen 18

1.2.2 Bedeutung der Netzwerkströme 23

2. BESTIMMUNG ELEKTROMAGNETISCHER WECHSELFELDER IN HALBLEITENDEN PLATTEN 26

2.1 Problemstellung 26

2.1.1 Berechnung der elektrischen und magnetischen Feldstärke 26

2.1.2 Berechnung der Impedanz 27

2.1.3 Berechnung der Jouleschen Wärme 29

2.2 Aufbau der Kette 29

2.2.1 Messung der elektrischen Feldstärke 31

2.2.2 Messung der Impedanz 32

2.2.3 Messung der Jouleschen Wärme 33

3. BESTIMMUNG ELEKTROMAGNETISCHER WECHSELFELDER IN HALBLEITENDEN VOLL- UND HOHLZYLINDERN 34

3.1 Problemstellung 34

3.1.1 Berechnung der elektrischen und magnetischen Feldstärke 34

3.1.2 Berechnung der Impedanz 36

3.1.3 Berechnung der Jouleschen Wärme 37

3.2 Aufbau der Kette 38

3.2.1 Messung der elektrischen Feldstärke 41

3.2.2 Messung der Impedanz 41

3.2.3 Messung der Jouleschen Wärme 42

4. BESTIMMUNG ELEKTROMAGNETISCHER FELDER IN ZYLINDRISCHEN LEITERN MIT RECHTECKIGEM QUERSCHNITT 43

4.1 Problemstellung 43

4.1.1 Einfluss der Seitenverhältnisse rechteckiger Grundgebiete auf die Feldverteilung 43

4.1.2 Annahme zur Lösung des Problems 45

4.2 Aufbau des Analogienetzwerkes 45

4.2.1 Messung der elektrischen Feldstärke 46

4.2.2 Messung der Impedanz 48

5. ANHANG: UEBER DIE ANWENDUNG VON ITERATIONSVERFAHREN AUF RAUMLADUNGSPROBLEME 50

Literaturverzeichnis 52

Tabellen und Figuren 57

SYMBOLLISTE

A, B, ψ	=	Integrationskonstanten
$(\Delta A)_n$	=	Differenzen-Flächenelement
$A(u,v) = A(n,m)$	=	Funktion zur Erfüllung der Kontinuitätsbedingung
a, b	=	Dicke, Breite der halbleitenden Platte
α, β	=	Realteil, Imaginärteil von $j\varkappa d_0$
C_0	=	Netzwerkkapazität
$C_{n,m}$	=	Ableitkapazitäten des Netzwerkes
γ	=	Verhältnis von Verschiebungsstrom zu Leitungsstrom
d	=	Maschenweite
d_0	=	Eindringtiefe in einem Leiter
δ	=	d/d_0
$\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$	=	Vektor der elektrischen Feldstärke und seine Komponenten
e_i	=	Linienelementfaktor, $i = 1, 2, 3$
ε	=	Dielektrizitätskonstante
ε_0	=	Dielektrizitätskonstante des leeren Raumes
F	=	Potentialfehler des Abschnittes 4.1.1
f	=	Frequenz
f_N	=	Netzwerkfrequenz
$\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$	=	Vektor der magnetischen Feldstärke und seine Komponenten
η	=	modifiziertes $\varkappa$
I	=	Gesamtstrom des Halbleiters der in z-Richtung fliesst
$(i_3)_{n,m}$	=	Strom in x_3-Richtung durch das Differenzen-Flächenelement an der Stelle (n,m)
$(i_N)_{n,m}$	=	Netzwerkstrom, der durch die Parallelschaltung von $R_{n,m}$ und $C_{n,m}$ fliesst
$(i_N)_{n+1/2,m}$, $(i_N)_{n,m+1/2}$	=	Netzwerkströme, die durch die Maschenindukti vitäten $L_{n+1/2,m}$, $L_{n,m+1/2}$ fliessen

$(i_L)_{n,m}$	=	Netzwerkstrom, der durch die Induktivität $L_{n,m}$ fliesst
J_p	=	allgemeine Besselfunktion
j	=	$(-1)^{1/2}$
k	=	Netzwerkkonstante, welche P in V überführt
$\varkappa$	=	komplexe Wellenzahl
L_0	=	Netzwerkinduktivität
$L_{n,m}$	=	Ableitinduktivitäten des Netzwerkes
$L_{n\pm1/2,m}$, $L_{n,m\pm1/2}$	=	Mascheninduktivitäten
l	=	Länge der halbleitenden Platte
λ	=	b; d; $2\pi d$ je nach Koordinatensystem
n, m	=	Maschenzahlen, $x_1 = nd$, $x_2 = md$
μ	=	Permeabilitätskonstante
μ_0	=	Permeabilitätskonstante des leeren Raumes
ν, τ, q	=	Zahlen (siehe Glg. (1.1.2,4))
$\vec{P}$	=	$\vec{E}$ oder $\vec{H}$
P_p^q	=	Kugelfunktion
p	=	mittlere spezifische Wirkleistung des Halbleiters
Q_e, Q_h	=	skalare Wellenpotentiale der E-, H-Welle
R_0	=	Netzwerkwiderstand
$R_{n,m}$	=	Ableitwiderstände des Netzwerkes
$R_=$	=	Gleichstromwiderstand des Halbleiters
$(R_N)_=$	=	Gleichstromwiderstand des Netzwerkes
$R_1 = (N_{11}+1/2)d_1$	=	Aussen-, bzw. Innenradius des Voll-, bzw. Hohlzylinders
$R_2 = (N_{22}+1/2)d_2$	=	Aussenradius des Hohlleiters
ϱ	=	elektrische Raumladungsdichte
S	=	Schirmfaktor des Hohlzylinders
s	=	Proportionalitätsfaktor des Netzwerkes
σ	=	Leitfähigkeit

t	=	Zeit
$V_{n,m}$	=	Netzwerkpotential
V_R	=	Referenzpotential des Netzwerkes
u, v	=	Ersatzkoordinaten (siehe Glg. (1.1.2,4))
Z	=	Impedanz des Halbleiters
Z_N	=	Impedanz des Netzwerkes
Z_q	=	allgemeine Zylinderfunktion
x_1, x_2, x_3	=	orthogonale, krummlinige Koordinaten
x, y, z	=	Cartesische Koordinaten
r, φ, z	=	Zylinderkoordinaten
φ, ϑ, r	=	Kugelkoordinaten
ω	=	Kreisfrequenz
ω_N	=	Netzwerkkreisfrequenz

Leer - Vide - Empty

1. GRUNDGLEICHUNGEN ELEKTROMAGNETISCHER FELDER

1.1 Grundformeln

Wir betrachten ein Stück homogenes, isotropes, halbleitendes Material der Leitfähigkeit σ, der Dielektrizitätskonstante ε und der Permeabilität μ, welches durch ein elektrisches bzw. magnetisches Wechselfeld angeregt ist. Sämtliche Feldgrössen sollen von der Zeit nach einer Sinus- oder Cosinusfunktion abhängen, so dass in der komplexen Schreibweise $\partial / \partial t = j\omega$ gesetzt werden kann. Weiter sei im Material keine freie elektrische Raumladungsdichte ϱ vorhanden. Dann lauten die Maxwell'schen Gleichungen:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -j\omega\mu\,\vec{H} \qquad (1.1,1) \qquad\qquad \mathrm{div}\,\varepsilon\,\vec{E} = \varrho = 0 \;(\mathrm{div}\,\vec{E} = 0) \qquad (1.1,2)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\,\vec{E} \;(1.1,3) \qquad\qquad \mathrm{div}\,\mu\,\vec{H} = 0 \qquad (\mathrm{div}\,\vec{H} = 0) \qquad (1.1,4)$$

wo $\sigma\,\vec{E}$ der Leitungsstromdichte und
$j\omega\varepsilon\,\vec{E}$ der Verschiebungsstromdichte entspricht.

Auf Grund der vektoriellen Differentialgleichung $\mathrm{rot\,rot}\,\vec{P} = \mathrm{grad\,div}\,\vec{P} - \nabla^2\vec{P}$ angewandt auf (1.1,1), bzw. (1.1,3), mit Berücksichtigung von (1.1,2) bzw. (1.1,4), erhalten wir die Wellengleichung:

$$\nabla^2\vec{P} = \omega\mu\sigma\left(j - \frac{\omega\varepsilon}{\sigma}\right)\vec{P} = \frac{2}{d_0^{\,2}}(j - \gamma)\,\vec{P} = -\varkappa^2\vec{P} \;, \qquad (1.1,5)$$

wobei $\vec{E}$, bzw. $\vec{H}$, gleich $\vec{P}$ gesetzt wird.

Es gilt also die gleiche Differentialgleichung für die Lösung der elektrischen und der magnetischen Felder. Beide werden sich durch Einsetzen der Randbedingungen unterscheiden. In Glg. (1.1,5) werden die bekannten Grössen eingesetzt:

$d_0^{\,2} = 2/\omega\mu\sigma$ = Eindringtiefe in einem Leiter mit der Leitfähigkeit σ und der Permeabilität μ,

$\gamma = \omega\varepsilon/\sigma$ = Verhältnis von Verschiebungsstrom zu Leitungsstrom.

1.1.1 Krummlinige Koordinaten (Einführung der E- und H-Welle)

Wir legen ein orthogonales, krummliniges Koordinatensystem mit den allgemeinen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) zugrunde. Das Linienelement sei gegeben durch:

$$ds^2 = e_1^2 dx_1^2 + e_2^2 dx_2^2 + e_3^2 dx_3^2 .$$

Die Komponenten von $\vec{P}$ seien mit P_1 in x_1-Richtung, P_2 in x_2-Richtung, P_3 in x_3-Richtung, also $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$ bezeichnet. Dann drücken sich die drei Komponenten des ∇^2-Operators wie folgt aus:

$$(\nabla^2 \vec{P})_1 = \frac{1}{e_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left\{ \frac{\partial e_2 e_3 P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial e_1 e_3 P_2}{\partial x_2} + \frac{\partial e_1 e_2 P_3}{\partial x_3} \right\} \right]$$

$$- \frac{1}{e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{e_3}{e_1 e_2} \left(\frac{\partial e_2 P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial e_1 P_1}{\partial x_2} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \frac{e_2}{e_1 e_3} \left(\frac{\partial e_1 P_1}{\partial x_3} - \frac{\partial e_3 P_3}{\partial x_1} \right) \right\} \right] , \qquad (1.1.1,1a)$$

$(\nabla^2 \vec{P})_2$ = aus (1.1.1,1a) durch zyklische Vertauschung der Indices: $1 \to 2,\ 2 \to 3,\ 3 \to 1$, (1.1.1,1b)

$(\nabla^2 \vec{P})_3$ = aus (1.1.1,1a) durch zyklische Vertauschung der Indices: $1 \to 3,\ 2 \to 1,\ 3 \to 2$. (1.1.1,1c)

Je nach Koordinatensystem sind für $x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3$ entsprechende Werte einzusetzen, wie z.B.:

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3
Cartesische Koordinaten	x	y	z	1	1	1
Zylinderkoordinaten	r	φ	z	1	r	1
Kugelkoordinaten	φ	ϑ	r	$r \sin\vartheta$	r	1

Diese Beispiele gehören zu der Untergruppe der krummlinigen Koordinatensysteme, für welche $e_3 = 1$ und e_1/e_2 von x_3 unabhängig ist. Für diese Untergruppe kann gezeigt werden, dass die Felder sich mit Hilfe von nur zwei skalaren Wellenpotentialen Q_e und Q_h darstellen lassen[1, 7, 14, 16].

$$E_1 = \frac{1}{e_1} \frac{\partial^2 Q_e}{\partial x_1 \partial x_3} - j\omega\mu \frac{1}{e_2} \frac{\partial Q_h}{\partial x_2} , \qquad (1.1.1,2a)$$

$$E_2 = \frac{1}{e_2} \frac{\partial^2 Q_e}{\partial x_2 \partial x_3} + j\omega\mu \frac{1}{e_1} \frac{\partial Q_h}{\partial x_1} , \qquad (1.1.1,2b)$$

$$E_3 = \frac{\partial^2 Q_e}{\partial x_3^2} + \varkappa^2 Q_e ; \qquad (1.1.1,2c)$$

$$H_1 = (\sigma + j\omega\varepsilon)\,\frac{1}{e_2}\,\frac{\partial Q_e}{\partial x_2} + \frac{1}{e_1}\,\frac{\partial^2 Q_h}{\partial x_1\,\partial x_3}\,, \qquad (1.1.1,3a)$$

$$H_2 = -\,(\sigma + j\omega\varepsilon)\,\frac{1}{e_1}\,\frac{\partial Q_e}{\partial x_1} + \frac{1}{e_2}\,\frac{\partial^2 Q_h}{\partial x_2\,\partial x_3}\,, \qquad (1.1.1,3b)$$

$$H_3 = \frac{\partial^2 Q_h}{\partial x_3^{\,2}} + \varkappa^2\,Q_h\,. \qquad (1.1.1,3c)$$

Die skalaren Wellenpotentiale müssen folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\frac{1}{e_1 e_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{e_2}{e_1}\,\frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\,\frac{e_1}{e_2}\,\frac{\partial Q}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_3^{\,2}} + \varkappa^2 Q = \left(\Delta_{x_1,x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3^{\,2}} + \varkappa^2\right)Q = 0\,. \qquad (1.1.1,4)$$

Der Beweis beruht auf der Möglichkeit, das Feld in zwei Teilfelder zu zerlegen, für die einmal $H_3 \equiv 0$ (E- oder T.M.-Welle), und ein andermal $E_3 \equiv 0$ (H- oder T.E.-Welle) ist. Die Aufspaltung des Feldes in E- und H-Welle führt auf die Linearität aller Differentialgleichungen und ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, da durch geeignete Superposition beider Teilfelder sich stets die allgemeine Lösung bilden lässt. Neben der Linearität der Differentialgleichungen wird die weitere Tatsache benützt, dass beim Verschwinden von H_3, bzw. E_3, die dritte Komponente der Glg. (1.1,1), bzw. (1.1,3), Null ist, was erlaubt, die Komponenten E_1 und E_2, bzw. H_1 und H_2, als Gradienten eines Skalars darzustellen.

Wir können die zu $\vec{E}$, bzw. $\vec{H}$, senkrechten Vektoren in diesem speziellen Falle auch als Gradienten einer skalaren Grösse darstellen.

Die Lösung des Problems reduziert sich also auf die Lösung der Glg. (1.1.1,4), für welche mit Vorteil die Separationsmethode der Variablen verwendet wird.

Die Lösungen in den drei gebräuchlichsten Koordinatensystemen lauten:

Cartesische Koordinaten:

$$Q = A\cos({}^1\varkappa x + \psi_1)\,\cos({}^2\varkappa y + \psi_2)\,\cos({}^3\varkappa z + \psi_3),$$

$$\text{mit } {}^1\varkappa^2 + {}^2\varkappa^2 + {}^3\varkappa^2 = \varkappa^2\;; \qquad (1.1.1,5)$$

Zylinderkoordinaten:

$$Q = Z_q\left[(\varkappa^2 - {}^3\varkappa^2)^{1/2} r\right]\cos(q\varphi + \psi_2)\,\cos({}^3\varkappa z + \psi_3)\,, \qquad (1.1.1,6)$$

wo Z_q die allgemeine Zylinderfunktion mit dem Index q ist. Da φ eine zyklische Koordinate ist, muss q ganzzahlig sein;

Kugelkoordinaten:

$$Q = (\varkappa r)^{1/2} J_{p+1/2}(\varkappa r)\, P_p^{\,q}(\cos\vartheta)\, \cos(q\varphi + \psi_1) \quad , \qquad (1.1.1,7)$$

$P_p^{\,q}(\cos\vartheta)$ ist die zugeordnete Kugelfunktion, q, p sind ganzzahlig und $q \leqslant p$.

Man beachte, dass in den Glgn. (1.1.1,5) bis (1.1.1,7) die Integrationskonstanten A, ψ_i sowie die Grössen ${}^i\varkappa$ im allgemeinen komplex sind.

1.1.2 Beschränkung auf Cartesische und zylindrische Koordinaten

Wir wollen in die Glgn. (1.1.1,2c) und (1.1.1,3c) das Ergebnis der Integration einsetzen. Dabei beschränken wir uns auf Cartesische und auf zylindrische Koordinaten. Da $\partial^2 Q/\partial^2 x_3^{\,2} = -\,{}^3\varkappa^2 Q$ ist, wird zwischen E_3 und Q_e, bzw. H_3 und Q_h, folgender linearer Zusammenhang bestehen:

$$E_3 = (\varkappa^2 - {}^3\varkappa^2)\, Q_e \quad , \qquad H_3 = (\varkappa^2 - {}^3\varkappa^2)\, Q_h \quad . \qquad (1.1.2,1)$$

E_3, bzw. H_3, können als Lösung einer Differentialgleichung gleicher Gestalt betrachtet werden, wie die unter (1.1.1,4) für Q angegebenen. Diese Differentialgleichung lautet nach Einsetzen der entsprechenden Grössen x_1, x_2, x_3, e_1, e_2 e_3 für die Cartesischen Koordinaten:

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_3}{\partial y^2} + (\varkappa^2 - {}^3\varkappa^2)\, P_3 = 0, \text{ mit } \frac{\partial^2 P_3}{\partial z^2} = -\,{}^3\varkappa^2\, P_3 \;; \qquad (1.1.2,2)$$

Zylinderkoordinaten:

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P_3}{\partial \varphi^2} + (\varkappa^2 - {}^3\varkappa^2)\, P_3 = 0, \text{ mit } \frac{\partial^2 P_3}{\partial z^2} = -\,{}^3\varkappa^2\, P_3, \qquad (1.1.2,3)$$

wobei E_3, bzw. H_3, gleich P_3 gesetzt wird.

Die Bestimmungsgleichung für ${}^3\varkappa$ resultiert aus der Erfüllung der Randbedingungen bei der Lösung des Problems im ganzen Raum [16], so dass sich das Problem auf eine partielle Differentialgleichung mit nur zwei Variablen reduzieren lässt (zweidimensionaler Fall).

Wird weiter versucht, das Problem eindimensional zu erhalten, dann soll angenommen werden, dass die Grösse ${}^2\varkappa$, bzw. q, für Cartesische, bzw. zylindrische Koordinaten bekannt ist. Dies folgt aus den Glgn. (1.1.1,5), bzw. (1.1.1,6), wo gilt: $\partial^2 Q/dy^2 = -{}^2\varkappa^2 Q$, bzw. $\partial^2 Q/\partial\varphi^2 = -q^2 Q$. Dies führt auf $\partial^2 P_3/\partial y^2 = -{}^2\varkappa^2 P_3$, bzw. $\partial^2 P_3/\partial\varphi^2 = -q^2 P_3$, mit Hilfe der Glg. (1.1.2,1).

Die Glgn. (1.1.2,2) und (1.1.2,3) sind Spezialfälle der folgenden Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial u^2} + \frac{\nu}{u}\frac{\partial P_3}{\partial u} + \tau\frac{\partial^2 P_3}{\partial v^2} + \left(\eta^2 - \frac{q^2}{u^2}\right) P_3 = 0 . \qquad (1.1.2,4)$$

Fall	u	v	η^2	ν	τ	q	v-Abhängigkeit	w-Abhängigkeit
1	$x\equiv x_1$	$y\equiv x_2$	$\varkappa^2 - {}^3\varkappa^2$	0	1	0	y- unbekannt (τ=1)	z- bekannt, ${}^3\varkappa$
2	"	"	$\varkappa^2$	0	1	0	y- unbekannt (τ=1)	z- keine, ${}^3\varkappa = 0$
3	"	"	$\varkappa^2 - ({}^2\varkappa^2 + {}^3\varkappa^2)$	0	0	0	y- bekannt, ${}^2\varkappa$	z- bekannt, ${}^3\varkappa$
4	"	"	$\varkappa^2 - {}^2\varkappa^2$	0	0	0	y- bekannt, ${}^2\varkappa$	z- keine, ${}^3\varkappa = 0$
5	"	"	$\varkappa^2 - {}^3\varkappa^2$	0	0	0	y- keine, ${}^2\varkappa = 0$	z- bekannt, ${}^3\varkappa$
6	"	"	$\varkappa^2$	0	0	0	y- keine, ${}^2\varkappa = 0$	z- keine, ${}^3\varkappa = 0$
7	$r\equiv x_1$	$z\equiv x_3$	$\varkappa^2$	1	1	q	z- unbekannt (τ=1)	φ- bekannt, q
8	"	"	$\varkappa^2$	1	1	0	z- unbekannt (τ=1)	φ- keine, q = 0
9	"	"	$\varkappa^2 - {}^3\varkappa^2$	1	0	q	z- bekannt, ${}^3\varkappa$	φ-bekannt, q
10	"	"	$\varkappa^2$	1	0	q	z- keine, ${}^3\varkappa = 0$	φ- bekannt, q
11	"	"	$\varkappa^2 - {}^3\varkappa^2$	1	0	0	z- bekannt, ${}^3\varkappa$	φ- keine, q = 0
12	"	"	$\varkappa^2$	1	0	0	z- keine, ${}^3\varkappa = 0$	φ- keine, q = 0

Wie die obige Tabelle zeigt, lassen sich die zwölf Fälle formal auf die Fälle 2,6,7,8,10,12 mit $\eta^2 = \varkappa^2$ reduzieren. Die übrigen Fälle erhalten wir durch die einfache Transformation $\eta^2 = \varkappa^2 - {}^3\varkappa^2$, bzw. $\varkappa^2 - ({}^2\varkappa^2 + {}^3\varkappa^2)$. Durch diese Transformation wird die Form der Differentialgleichung nicht geändert. Betrachten wir als Beispiel einen in z-Richtung sich erstreckenden Koaxialleiter und nehmen wir an, dass die z-Abhängigkeit durch die Ausbreitung der Welle in Luft zwischen zwei idealen Leitern ($\sigma = \infty$) gegeben ist, so gilt ${}^3\varkappa^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$. Wenn wir diese z-Ab-

hängigkeit als Näherung für einen nicht idealen Leiter, mit $\varkappa^2 = \omega^2\mu_0(\varepsilon_0 - j\sigma/\omega)$ einsetzen, dann erhalten wir $\eta^2 = \varkappa^2 - {}^3\varkappa^2 = -j\omega\mu_0\sigma$, was einem Leiter mit gleicher Leitfähigkeit, aber verschwindender Dielektrizitätskonstanten entspricht [16].

1.2 Analogie-Grundformeln

Die Glg. (1.1.2,4) beschreibt im wesentlichen das Verhalten der elektromagnetischen Felder, wie in Abschnitt 1.1.2 bereits diskutiert worden ist. Diese Differentialgleichung wird in ihre Differenzenform umgewandelt. Dabei beschränken wir uns wiederum auf Cartesische und zylindrische Koordinaten. Eine analoge Differenzengleichung, welche das Verhalten eines elektrischen Netzes beschreibt, wird aufgestellt, so dass die elektromagnetischen Felder auf dem elektrischen Netze nachgebildet werden können [9, 4].

1.2.1 Differenzengleichungen

Die Differenzengleichung der Glg. (1.1.2,4) wird erhalten durch Einführung eines Maschennetzes in der u-v-Ebene und durch Erteilung von Wellenpotentialwerten an die Maschenpunkte gemäss Figur 1. Einfachheitshalber wird auf die Mitführung des Index 3 bei P_3 verzichtet.

Wir betrachten den Punkt (n, m) als Zentrum einer Taylor-Entwicklung und erhalten für $P_{n-1,m}$, $P_{n+1,m}$ und $P_{n,m-1}$, $P_{n,m+1}$ folgende Werte (n, m = 1, 2, 3...):

$$P_{n\pm1,m} = P_{n,m} \pm \frac{\partial P}{\partial u} d + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} d^2 \pm \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 P}{\partial u^3} d^3 + \ldots\ldots \qquad (1.2.1,1)$$

$$P_{n,m\pm1} = P_{n,m} \pm \frac{\partial P}{\partial v} d + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} d^2 \pm \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 P}{\partial v^3} d^3 + \ldots\ldots \qquad (1.2.1,2)$$

Durch Addition und Division durch d^2 entstehen die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} = \frac{P_{n-1,m} - P_{n,m}}{d^2} + \frac{P_{n+1,m} - P_{n,m}}{d^2} - 2\sum_{l=2}^{\infty} \frac{d^{2(l-1)}}{(2l)!} \frac{\partial^{2l} P}{\partial u^{2l}} , \qquad (1.2.1,3)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = \frac{P_{n,m-1} - P_{n,m}}{d^2} + \frac{P_{n,m+1} - P_{n,m}}{d^2} - 2\sum_{l=2}^{\infty} \frac{d^{2(l-1)}}{(2l)!} \frac{\partial^{2l} P}{\partial v^{2l}} . \qquad (1.2.1,4)$$

Wir setzen voraus, dass:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial (u,v)^2} \gg 2 \left| \sum_{l=2}^{\infty} \frac{d^{2(l-1)}}{(2l)!} \frac{\partial^{2l} P}{\partial (u,v)^{2l}} \right| , \qquad (1.2.1,5)$$

was die obigen Gleichungen wesentlich vereinfacht und die folgenden auch in einfacherer Form schreiben lässt:

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{P_{n+1,m} - P_{n-1,m}}{2d} , \qquad \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{P_{n,m+1} - P_{n,m-1}}{2d} . \qquad (1.2.1,6 \text{ und } 7)$$

Durch geeignete Kombination der Glgn. (1.2.1,3) bis (1.2.1,7) kann die Glg. (1.1.2,4) in die Differenzenform übergeführt werden. Wir multiplizieren die Gleichung mit $A(u,v) \cdot k/L_0$, wobei $A(u,v) \equiv A(n,m)$ eine noch zu bestimmende Funktion ist:

$$k(P_{n-1,m} - P_{n,m}) \frac{A(n,m)}{L_0 d^2}(1 - \frac{\nu}{2n}) + k(P_{n+1,m} - P_{n,m}) \frac{A(n,m)}{L_0 d^2}(1 + \frac{\nu}{2n}) +$$

$$+ k(P_{n,m-1} - P_{n,m}) \frac{A(n,m)}{L_0 d^2} \tau + k(P_{n,m+1} - P_{n,m}) \frac{A(n,m)}{L_0 d^2} \tau +$$

$$+ k\, P_{n,m} \frac{A(n,m)}{L_0} \eta^2 - k\, P_{n,m} \frac{A(n,m)}{L_0 d^2} \frac{q^2}{n^2} = 0 . \qquad (1.2.1,8)$$

Es wird $\eta^2 = \varkappa^2 = -j\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\varepsilon$ in die obige Gleichung eingesetzt, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet (siehe Abschnitt 1.1.2).

Betrachten wir nun ein Netzwerk, wie es in Figur 2 dargestellt wird, d.h. ein Netzwerk, in dem die einzelnen Maschenpunkte durch Induktivitäten $L_{n-1/2,m}$ miteinander verbunden werden und von jedem Maschenpunkt ein Ableitwiderstand $R_{n,m}$, eine Ableitkapazität $C_{n,m}$ und eine Ableitinduktivität $L_{n,m}$ auf das Referenzpotential V_R führen, so gilt im Punkte (n, m), nach Kirchoff'scher Regel, über die Summe aller zufliessenden Ströme folgende Gleichung:

$$\frac{V_{n-1,m}-V_{n,m}}{L_{n-1/2,m}} + \frac{V_{n+1,m}-V_{n,m}}{L_{n+1/2,m}} + \frac{V_{n,m-1}-V_{n,m}}{L_{n,m-1/2}} + \frac{V_{n,m+1}-V_{n,m}}{L_{n,m+1/2}} +$$

$$+ (V_{n,m}-V_R)\left(-j\omega_N \frac{1}{R_{n,m}} + \omega_N^2 C_{n,m}\right) - (V_{n,m}-V_R)\frac{1}{L_{n,m}} = 0. \quad (1.2.1,9)$$

Es ist zu beachten, dass in die obige Gleichung für die Elemente des Netzwerkes die Ableitung nach der Zeit gleich $j\omega_N$ gesetzt worden ist.

Damit die Analogie der Glgn. (1.2.1,8) und (1.2.1,9) vollständig wird, müssen wir setzen:

$$V_{n,m} - V_R = kP_{n,m}, \qquad L_{n\pm1/2,m} = \frac{L_0 d^2}{A(n,m)(1 \pm \nu/2n)},$$

$$R_{n,m} = \frac{\omega_N L_0}{\omega\mu\sigma}\frac{1}{A(n,m)}, \qquad L_{n,m\pm1/2} = \frac{L_0 d^2}{A(n,m)\tau}, \qquad (1.2.1,10)$$

$$C_{n,m} = \frac{\omega^2\mu\varepsilon}{\omega_N^2 L_0} A(n,m), \qquad L_{n,m} = \frac{L_0 d^2 n^2}{A(n,m) q^2}.$$

Alle Maschenpunkte sollen um ganzzahlige Vielfache von d von der Achse entfernt sein, damit die Beziehungen $u = nd$, $v = md$ und $A(u,v) = A(n,m)$ mit $n, m = 1, 2, 3, \ldots$ gelten. Wir haben bis jetzt die Gleichungen für den allgemeinen Punkt (n, m) aufgestellt. Um die Ortsfunktion A(n, m) abzuleiten, müssen wir die folgenden Kontinuitätsbedingungen erfüllen:

$$L_{n+1/2,m}\Big|_{n,m} \equiv L_{n-1/2,m}\Big|_{n+1,m}, \quad L_{n,m+1/2}\Big|_{n,m} \equiv L_{n,m-1/2}\Big|_{n,m+1}. \quad (1.2.1,11)$$

Diese Beziehungen gelten für alle Netzinduktivitäten. Aus Glg. (1.2.1,10), zweite Formel, geht sofort hervor, dass A(n, m) unabhängig von m sein muss, damit die zweite Kontinuitätsgleichung erfüllt wird $A(n,m) \longrightarrow A(n)$. Die erste Kontinuitätsgleichung führt auf die Rekursionsformel für A(n):

$$A(n) = |n|^{\nu} A, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 2. \qquad (1.2.1,12)$$

Setzen wir für die Konstante A den Wert d^2 ein, so gehen die Glgn. (1.2.1,10) über in:

$$V_{n,m} - V_R = k\, P_{n,m}\,, \qquad L_{n\pm 1/2,\,m} = L_0 \frac{1}{|n|^{\nu}(1 \pm \frac{\nu}{2n})}\,,$$

$$R_{n,m} = \frac{\omega_N L_0}{\omega\mu\sigma d^2}\,\frac{1}{|n|^{\nu}} = R_0 \frac{1}{|n|^{\nu}}\,, \quad L_{n,\,m\pm 1/2} = L_0 \frac{1}{|n|^{\nu}\tau}\,, \tag{1.2.1,13}$$

$$C_{n,m} = \frac{\omega^2 \mu\, \varepsilon\, d^2}{\omega_N^{\,2} L_0}\,|n|^{\nu} = C_0\,|n|^{\nu}\,, \quad L_{n,m} = L_0 \frac{|n|^{2-\nu}}{q^2}\,,$$

$$0 \leqslant \nu \leqslant 2\,, \qquad n \neq 0\,,$$

mit den eingeführten Abkürzungen:

$$R_0 = \frac{\omega_N L_0}{2\delta^2}\,, \qquad C_0 = \frac{2\gamma\delta^2}{\omega_N^2 L_0}\,, \qquad \delta = \frac{d}{d_0}\,.$$

Daraus lassen sich die für alle betrachteten Fälle allgemeinen, gültigen Analogiegleichungen angeben:

$$\gamma = \omega_N R_0 C_0\,, \qquad \frac{\delta^2}{\gamma} = \frac{L_0}{2R_0^2 C_0}\,. \tag{1.2.1,14}$$

Auf der v-Achse wird der Ausdruck $(\nu/u)\,(\partial P/\partial u)$ unbestimmt, denn $\partial P/\partial u$ für $u = 0$ wird aus Gründen der achsialen Symmetrie gleich Null. Nach Bernoulli-L'Hospital ergibt sich:

$$\frac{\nu}{u}\,\frac{\partial P}{\partial u}\bigg|_{u=0} = \frac{0}{0} = \nu \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}\bigg|_{u=0}\,.$$

Somit wird die Glg. (1.1.2,4) in ihrer Form geändert. Ihre Differenzenform (1.2.1,8) geht entsprechend über in:

$$k(P_{-1,m} - P_{0,m})\,\frac{A(0,m)}{L_0 d^2}(1+\nu) + k(P_{+1,m} - P_{0,m})\,\frac{A(0,m)}{L_0 d^2}(1+\nu) +$$

$$+ k(P_{0,m-1} - P_{0,m})\,\frac{A(0,m)}{L_0 d^2}\,\tau + k(P_{0,m+1} - P_{0,m})\,\frac{A(0,m)}{L_0 d^2}\,\tau +$$

$$+ k\,P_{0,m}\,\frac{A(0,m)}{L_0}\,\eta^2 - k\,P_{0,m}\,\frac{A(0,m)}{L_0 d^2}\,\frac{q^2}{0^2} = 0\,. \tag{1.2.1,15}$$

Setzen wir:

$$A(n = 0) = \frac{2-\nu}{2(1+\nu)} \, d^2 , \qquad (1.2.1,16)$$

so wird die Kontinuitätsgleichung:

$$L_{n+1/2,\,m}\Big|_{0,\,m} \equiv L_{n-1/2,\,m}\Big|_{1,\,m} ,$$

erfüllt und wir erhalten für die Netzwerkelemente auf der v-Achse:

$$R_{0,\,m} = R_0 \frac{2(1+\nu)}{2-\nu} , \qquad L_{\pm 1/2,\,m} = L_0 \frac{2}{2-\nu} ,$$

$$C_{0,\,m} = C_0 \frac{2-\nu}{2(1+\nu)} , \qquad L_{0,\,m\pm 1/2} = L_0 \frac{2(1+\nu)}{(2-\nu)\tau} , \qquad (1.2.1,17)$$

$$L_{0,\,m} = \begin{matrix} \infty \; (q=0) \\ 0 \; (q\neq 0) \end{matrix} .$$

Ist das Problem symmetrisch in Bezug auf eine Achse und beschränken wir uns auf die Abbildung einer Halbebene, so müssen die Impedanzen der Schaltelemente des Netzwerkes auf der Symmetrieachse verdoppelt werden [9].

Als Beispiel für die Anwendung der allgemeinen Glgn. (1.2.1,13) und (1.2.1,17) betrachten wir die Darstellung mit einem Netzwerk der Glg. (1.1.2,4, Fall 10). Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind die bekannten Zylinderfunktionen $Z_q(\eta r)$. Um die Elemente des Netzwerkes aus den Glgn. (1.2.1,13) und (1.2.1,17) zu bestimmen, muss $\nu = 1$ und $\tau = 0$ gesetzt werden, zudem soll q als bekannt angenommen werden. Aus $\tau = 0$ folgt: $L_{n,\,m\pm 1/2} = \infty$. Das Netzwerk reduziert sich auf eine Kette.

$$V_n - V_R = k\, P_n ,$$

$$n \neq 0 : L_{n\pm 1/2} = L_0 \frac{1}{|n\pm 1/2|} , \; L_n = L_0 \frac{|n|}{q^2} , \; R_n = R_0 \frac{1}{|n|} , \; C_n = C_0 |n| \qquad (1.2.1,18a)$$

$$n = 0 : L_{n=\pm 1/2} = 2L_0 , \; L_{n=0} = \begin{matrix} \infty \; (q=0) \\ 0 \; (q\neq 0) \end{matrix} , \; R_{n=0} = 4R_0 , \; C_{n=0} = \frac{1}{4} C_0 \qquad (1.2.1,18b)$$

Da die allgemeinen Zylinderfunktionen für komplexe Argumente nicht tabelliert sind, ist diese abgeleitete Kette auch für die angewandte Mathematik von Interesse.

1.2.2 Bedeutung der Netzwerkströme

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang abgeklärt, der zwischen den Strömen im Netzwerk und den physikalischen Vorgängen besteht.

Wir setzen P (= P_3) gleich der elektrischen Feldstärke in z-Richtung E_3 (vergl. Glg. (1.1,5)). Gemäss Glg. (1.1,3) lässt sich die z-Komponente der Stromdichte j_3 als komplexe Grösse wie folgt anschreiben:

$$j_3 = (\sigma + j\omega\varepsilon)\, E_3 \,. \qquad (1.2.2,1)$$

Unter Berücksichtigung der Glg. (1.2.1,13) und angewendet auf den allgemeinen Punkt (n, m) lautet Glg. (1.2.2,1):

$$(j_3)_{n,m} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\, P_{n,m} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\frac{V_{n,m} - V_R}{k} = \frac{1}{k}\,\frac{\sigma + j\omega\varepsilon}{1/R_{n,m} + j\omega_N C_{n,m}}\,(i_N)_{n,m} \,. \qquad (1.2.2,2)$$

Berechnen wir nun aus der Stromdichte den Strom, der durch das Differenzen-Flächenelement $(\Delta A)_n = d\cdot\lambda\,|n|^\nu$ fliesst, und setzen wir aus der Glg. (1.2.1,13) die Grössen $R_{n,m}$ und $C_{n,m}$ ein, so erhalten wir:

$$(i_3)_{n,m} = (j_3)_{n,m}\cdot d\lambda\,|n|^\nu = \frac{\lambda}{k}\,\frac{(\sigma + j\omega\varepsilon)\, d}{1/R_0 + j\omega_N C_0}\,(i_N)_{n,m} \,. \qquad (1.2.2,3)$$

λ hat wie k die Dimension einer Länge. Die Grösse λ geht je nach Koordinatensystem in folgende Grössen über:

Cartesisches Koordinatensystem $\begin{cases} \text{eindimensional: } \lambda = b \text{ (Breite)}, \\ \text{zweidimensional: } \lambda = d, \end{cases}$

Zylinderkoordinatensystem : $\lambda = 2\pi d$.

Wir sehen, dass die Ableitströme, die in den Widerständen $R_{n,m}$, bzw. in den Kapazitäten $C_{n,m}$ fliessen, proportional zu den Leitungsströmen, bzw. den Verschiebungsströmen, in den Differenzen-Flächenelementen sind. Der Proportionalitätsfaktor ist:

$$s = \frac{\lambda}{k}\,\frac{(\sigma + j\omega\varepsilon)\, d}{1/R_0 + j\omega_N C_0} = \frac{\lambda}{k}\,\sigma d\, R_0 = \frac{\lambda}{k}\,\frac{\omega\varepsilon d}{\omega_N C_0} = \frac{\lambda}{k}\,\frac{\omega_N L_0}{\omega\mu d} = \frac{L_0}{R_0 C_0}\,\frac{\varepsilon}{\mu\sigma d} \,. \qquad (1.2.2,4)$$

Im Falle der Darstellung in Zylinderkoordinaten treten Induktivitäten $L_{n,m}$ auf, wobei $u = x_1 = r$ und $v = x_3 = z$ ist. Die Ableitströme i_L, die durch diese Induk-

tivitäten fliessen, geben ein Mass für die x_2- oder φ-Abhängigkeit pro Differenzen-Flächenelement $(\Delta A)_n = d\lambda|n|^\nu$.

$$\frac{1}{\mu}\, d\lambda|n|^\nu \int \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 E_3}{\partial\varphi^2}\, dt = -\,\frac{\lambda q^2 |n|^{\nu-2}}{j\omega\mu\, d}\, P_{n,m} =$$

$$= -\frac{\lambda}{k}\,\frac{\omega_N L_0}{\omega\,\mu\, d}\,(i_L)_{n,m} = -\,s\,(i_L)_{n,m}\,. \qquad (1.2.2,5)$$

Nach Gauss wird die Integralform der Gleichung (1.1,1) auf das Differenzen-Volumenelement $\Delta\mathrm{Vol.} = d^2\cdot 1$ angewendet:

$$\begin{aligned} (E_3)_{n,m} - (E_3)_{n,m+1} &= j\omega\mu d(H_1)_{n,m+1/2}\,, \\ (E_3)_{n,m} - (E_3)_{n+1,m} &= -j\omega\mu d(H_2)_{n+1/2,m}\,. \end{aligned} \qquad (1.2.2,6)$$

Die gleichen Formeln lassen sich auch aus der Glg. (1.1.1,3) unter Berücksichtigung der Glg. (1.1.2,1a) herleiten. Die erste Formel gilt nicht, wenn $v = md = x_3 = z$ ist. Dieser Fall wird speziell behandelt.

Bezeichnen wir die Ströme, die durch die Induktivitäten $L_{n+1/2,m}$, bzw. $L_{n,m+1/2}$, fliessen, mit $(i_N)_{n+1/2,m}$, bzw. $(i_N)_{n,m+1/2}$, und berücksichtigen wir dabei die Glg. (1.2.1,13), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \lambda|n|^\nu\,\tau\,(H_1)_{n,m+1/2} &= \frac{\lambda}{k}\,\frac{|n|^\nu\tau}{j\omega\mu\, d}(V_{n,m} - V_{n,m+1}) = s(i_N)_{n,m+1/2}\,, \\ \lambda|n|^\nu\,(1+\frac{\nu}{2n})(H_2)_{n+1/2,m} &= -\frac{\lambda}{k}\,\frac{|n|^\nu(1+\nu/2n)}{j\omega\mu\, d}\,(V_{n,m} - V_{n+1,m}) = \\ &= -\,s(i_N)_{n+1/2,m}\,. \end{aligned} \qquad (1.2.2,7)$$

Die Koeffizienten von H_1, bzw. H_2, lauten in den verschiedenen Koordinatensystemen:

Cartesisches Koordinatensystem $\begin{cases} \text{eindimensional}: & 0, \text{ bzw. } b, \\ \text{zweidimensional}: & d, \text{ bzw. } d, \end{cases}$

Zylinderkoordinatensystem $\begin{cases} \text{eindimensional}: & 0, \text{ bzw. } 2\pi d\cdot|n+1/2|\,, \\ \text{zweidimensional}: & -, \text{ bzw. } 2\pi d\cdot|n+1/2|\,. \end{cases}$

Also sind die Ströme, welche durch die Induktivitäten $L_{n,m+1/2}$, $L_{n+1/2,m}$ fliessen, proportional zu den Linienintegralen eines zur magnetischen Feldstärke

senkrechten Vektors mit der gleichen Dimension wie H, über das Differenzen-Flächenelement $(\Delta A)_{n+1/2} = d\lambda |n+1/2|^{\nu}$. Der Proportionalitätsfaktor ist wiederum s.

Ist $v = md = x_3 = z$, so stimmt die Beziehung zwischen $(H_1)_{n,\, m+1/2}$ und $(i_N)_{n,\, m+1/2}$ nicht. Die Ströme $(i_N)_{n,\, m+1/2}$ geben dann ein Mass für die z-Abhängigkeit:

$$\frac{1}{\mu} \lambda\, |n|^{\nu} \tau \int \frac{\partial E_3}{\partial z}\, dt = - s (i_N)_{n,\, m+1/2} \quad . \qquad (1.2.2,8)$$

Die Glgn. (1.2.2,1) bis (1.2.2,8) sind unter der Annahme $P = E_3$ abgeleitet worden. Falls $P = H_3$ gesetzt würde, würden wir entsprechende Analogiegleichungen zwischen den Netzströmen und den physikalischen Vorgängen erhalten. Setzen wir beispielsweise:

$$V_{n,\, m} - V_R = k'(H_3)_{n,\, m} \quad \text{mit } k' = \frac{k}{(\sigma + j\omega\varepsilon) d} \quad , \qquad (1.2.2,9)$$

dann finden wir unter Berücksichtigung der Glgn. (1.2.1,13) und (1.1.1,2) die wichtigsten Analogiegleichungen:

$$\lambda |n|^{\nu} (H_3)_{n,\, m} = s\, (i_N)_{n,\, m} \, , \qquad (1.2.2,10)$$

$$V_{n,\, m} - V_{n,\, m+1} = - k\, (E_1)_{n,\, m+1/2} \text{ oder } V_{n,\, m-1} - V_{n,\, m+1} = - \frac{k}{2} (E_1)_{n,\, m} \, ,$$

$$V_{n,\, m} - V_{n+1,\, m} = k\, (E_2)_{n+1/2,\, m} \text{ oder } V_{n-1,\, m} - V_{n+1,\, m} = \frac{k}{2} (E_2)_{n,\, m} \, .$$

2. BESTIMMUNG ELEKTROMAGNETISCHER WECHSELFELDER IN HALBLEITENDEN PLATTEN

2.1 Problemstellung

Der Fall, den wir in diesem Abschnitt behandeln wollen, entspricht dem Fall 6 der Glg. (1.1.2,4). Wir wiederholen, dass er formal die Fälle 3 bis 6 zusammenfasst. Betrachten wir nun gemäss Figur 3 eine halbleitende Platte von der Dicke 2a, bzw. a, in einem symmetrischen E-Feld, bzw. mit kurzgeschlossener Fläche in der y-z-Ebene. Die Breite b sowie die Länge l der Platte sollen sehr gross gegenüber ihrer Dicke angenommen werden. Das angelegte Wechselfeld soll so sein, dass allein die z-Komponente der elektrischen Feldstärke E_3 von Null verschieden ist. E_3 ist nur von x und t abhängig [6].

2.1.1 Berechnung der elektrischen und magnetischen Felstärke

Wir setzen in die Glg. (1.1.2,4) die Grössen $u = x$, $v = y$, $\eta^2 = \varkappa^2$, $\nu = 0$, $\tau = 0$ und $q = 0$ (Fall 6 der Tabelle) ein;

$$\frac{d^2 P_3}{dx^2} + \varkappa^2 P_3 = 0 . \qquad (2.1.1,1)$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$P_3 = A \cos(\varkappa x + \psi_1) , \qquad (2.1.1,2)$$

wobei E_3, bzw. H_3, gleich P_3 gesetzt ist.

Beschränken wir uns gemäss Figur 3 auf E-Felder und setzen wir die Randbedingungen ein, so erhalten wir mit $E_0 = \hat{E}_0 \exp(j\omega t)$ für die Fälle:

6,1: $E_3 = E_0 \cos(\varkappa x) = E_0 \, Ch(j\varkappa x)$, (2.1.1,3a)

6,2: $E_3 = jE_0 \sin(\varkappa x) = E_0 \, Sh(j\varkappa x)$. (2.1.1,3b)

Die magnetische Felstärke beträgt nach Glg. (1.1,1) oder (1.1.1,3) im Falle

6,1: $H_2 = \frac{j\varkappa E_0}{\omega\mu} \sin(\varkappa x) = \frac{\varkappa E_0}{\omega\mu} Sh(j\varkappa x)$, (2.1.1,4a)

$$6,2: \quad H_2 = \frac{\varkappa E_0}{\omega\mu} \cos(\varkappa x) = \frac{\varkappa E_0}{\omega\mu} \mathrm{Ch}(j\varkappa x) , \qquad (2.1.1,4b)$$

wobei

$$\varkappa x = \left[2(\gamma - j)\right]^{1/2} \frac{x}{d_0} , \quad j\varkappa x = \left[2(j - \gamma)\right]^{1/2} \frac{x}{d_0} \quad \text{sind.}$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden wesentlichen Funktionen $\mathrm{Ch}(j\varkappa x)$ und $\mathrm{Sh}(j\varkappa x)$ sind nach Grösse und Phase für $0 \leqslant \gamma \leqslant 4$ (Schritt 0,5) in Funktion der dimensionslosen Grösse x/d_0 tabelliert (Tabellen 1 bis 4) und in die Figuren 9 bis 12 eingetragen worden. Die Kurven mit dem Parameter $\gamma = 0$ stellen den Verlauf der elektrischen Feldstärke in Metallen dar. Die Abweichungen zwischen den verschiedenen Kurven sind für die Amplituden beträchtlich. Interpolation ist mit Vorsicht anzuwenden, da sich die Kurven überschneiden (Mehrdeutigkeit).

Die gezeichneten Kurven schneiden die Ordinatenachse auf der Höhe:

Werte im Nullpunkt:

$$\lim_{x/d_0 \to 0} |\mathrm{Ch}(j\varkappa x)| = 1 , \qquad \lim_{x/d_0 \to 0} \measuredangle \mathrm{Ch}(j\varkappa x) = 0 , \qquad (2.1.1,5)$$

$$\lim_{x/d_0 \to 0} |\mathrm{Sh}(j\varkappa x)| = 0 , \qquad \lim_{x/d_0 \to 0} \measuredangle \mathrm{Sh}(j\varkappa x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\,\gamma\right) ;$$

Nullpunkttangenten:

$$\lim_{x/d_0 \to 0} \frac{d}{d(x/d_0)} |\mathrm{Ch}(j\varkappa x)| = 0 , \qquad \lim_{x/d_0 \to 0} \frac{d}{d(x/d_0)} \measuredangle \mathrm{Ch}(j\varkappa x) = 0 , \qquad (2.1.1,6)$$

$$\lim_{x/d_0 \to 0} \frac{d}{d(x/d_0)} |\mathrm{Sh}(j\varkappa x)| = \left[2(1+\gamma^2)^{1/2}\right]^{1/2}, \qquad \lim_{x/d_0 \to 0} \frac{d}{d(x/d_0)} \measuredangle \mathrm{Sh}(j\varkappa x) = 0 .$$

2.1.2 Berechnung der Impedanz

Als Impedanz des Halbleiterquaders mit den Längen 2a (bzw. a), b und l definieren wir das Verhältnis $Z = U/I$. I ist der Strom, der senkrecht zur Fläche 2ab (bzw. ab) der x-y-Ebene fliesst. Im Falle 6.2 muss der Oberflächenstrom $H_2(x=0)$ b

der Kurzschlussplatte berücksichtigt werden. Die Spannung U erhalten wir durch Integration des E-Vektors in z-Richtung an der Oberfläche (x = a) des Halbleiters. Es gilt im Falle:

$$6,1: \quad Z = -\frac{j\omega\mu}{\varkappa}\,\frac{1}{2b}\,\mathrm{cotg}(\varkappa a) = \frac{\omega\mu}{\varkappa}\,\frac{1}{2b}\,\mathrm{Cth}(j\varkappa a)\,, \qquad (2.1.2,1a)$$

$$6,2: \quad Z = \frac{j\omega\mu}{\varkappa}\,\frac{1}{b}\,\mathrm{tg}\,(\varkappa a) = \frac{\omega\mu}{\varkappa}\,\frac{1}{b}\,\mathrm{Th}(j\varkappa a)\,. \qquad (2.1.2,1b)$$

Der Gleichstromwiderstand des Quaders hat die Grösse $R_= = 1/2ab\sigma$ im Falle 6,1 und $R_= = 1/ab\sigma$ im Falle 6,2. Damit erhalten wir für die mittlere spezifische Impedanz des Halbleiterplättchens im Falle:

$$6,1: \quad \frac{Z}{R_=} = \frac{1}{1+j\gamma}\,\frac{\varkappa a}{\mathrm{tg}(\varkappa a)} = \frac{1}{1+j\gamma}\,\frac{j\varkappa a}{\mathrm{Th}(j\varkappa a)}\,, \qquad (2.1.2,2a)$$

$$6,2: \quad \frac{Z}{R_=} = -\frac{1}{1+j\gamma}\,\frac{\varkappa a}{\mathrm{cotg}(\varkappa a)} = \frac{1}{1+j\gamma}\,\frac{j\varkappa a}{\mathrm{Cth}(j\varkappa a)}\,. \qquad (2.1.2,2b)$$

Die dimensionslose Grösse $Z/R_=$ hängt nur von der Dicke 2a (bzw. a), von der Eindringtiefe d_0 und vom Verhältnis γ ab. Die Funktionen $Z/R_=(a/d_0)$ sind für $0 \leqslant \gamma \leqslant 4$ durch die Tabellen 5 bis 8 und Figuren 13 bis 16 gegeben. Die Kurven $|Z/R_=|$ und $\measuredangle\, Z/R_=$ schneiden die Ordinatenachse je nach Fall in den folgenden Punkten:

$$6,1: \quad \lim_{a/d_0 \to 0} |Z/R_=| = (1+\gamma^2)^{-1/2}, \quad \lim_{a/d_0 \to 0} \measuredangle\, Z/R_= = -\mathrm{arctg}\,\gamma\,, \qquad (2.1.2,3a)$$

$$6,2: \quad \lim_{a/d_0 \to 0} |Z/R_=| = 0\,, \quad \lim_{a/d_0 \to 0} \measuredangle\, Z/R_= = \pi/2\,. \qquad (2.1.2,3a)$$

Die Tangenten im Nullpunkt sind für beide Fälle gleich Null.

2.1.3 Berechnung der Jouleschen Wärme

Die Joulesche Wärme, verursacht durch die Leitungsströme, kann nach Figur 3 leicht ermittelt werden. Wird die Joulesche Wärme pro Volumeneinheit berechnet, so erhalten wir die mittlere spezifische Wirkleistung p [17]. Sie lautet im Falle:

6,1:
6,2:
$$p = \frac{\sigma \hat{E}_0^2}{2a} \int_0^a \left| \begin{matrix} Ch \\ Sh \end{matrix} (j\varkappa x) \right|^2 dx \; . \qquad (2.1.3,1a \text{ und } b)$$

Führen wir die neuen Grössen ein:

$$j\varkappa a = (\alpha + j\beta)\frac{a}{d_0} \; , \quad \alpha = \left[(1+\gamma^2)^{1/2} - \gamma\right]^{1/2} = \frac{1}{\beta} \, , \quad \beta = \left[(1+\gamma^2)^{1/2} + \gamma\right]^{1/2} \; , \qquad (2.1.3,2)$$

dann ergibt sich für p:

6,1:
6,2:
$$p = \frac{\sigma \hat{E}_0^{\,2}}{2} \left[\frac{1}{2} \left\{ \frac{Sh(2\alpha a/d_0)}{2\alpha a/d_0} \pm \frac{\sin(2\beta a/d_0)}{2\beta a/d_0} \right\} \right] \; . \qquad (2.1.3,3a \text{ und } b)$$

Die Grösse $2p/\sigma \hat{E}_0^{\,2}$ ist als Funktion von a/d_0 für verschiedene Parameter $0 \leqslant \gamma \leqslant 4$ berechnet (Tabellen 9 und 10) und in den Figuren 17 und 18 zur Darstellung gebracht worden. Die Kenngrössen im Nullpunkt sind im Falle:

6,1:
$$\lim_{a/d_0 \to 0} p = \frac{\sigma \hat{E}_0^2}{2} \; , \quad \lim_{a/d_0 \to 0} \frac{dp}{d(a/d_0)} = 0 \; , \qquad (2.1.3,4a)$$

6,2:
$$\lim_{a/d_0 \to 0} p = 0 \; , \quad \lim_{a/d_0 \to 0} \frac{dp}{d(a/d_0)} = 0 \; . \qquad (2.1.3,4b)$$

2.2 Aufbau der Kette

Die Grössen der Bauelemente für die Nachbildung der Glg. (2.1.1,1) werden erhalten durch Einsetzen der Grössen der Glg. (1.1.2,4, Fall 6) in die Glgn. (1.2.1,13) und (1.2.1,17). Aus $\tau = 0$ folgt $L_{n,m^{\pm 1/2}} = \infty$. Das Netzwerk reduziert

sich auf eine Kette. Der Index m kann deshalb weggelassen werden.

$$n \neq 0: \quad L_{n\pm 1/2} = L_0, \quad R_n = R_0, \quad C_n = C_0, \quad L_n = \infty \ . \qquad (2.2,1)$$

Die Grössen der Kettenelemente sind von der noch übriggebliebenen Variablen n unabhängig.

Beschränken wir uns weiter auf die Nachbildung der positiven x-Achse, so muss, wie in Abschnitt 1.2.1 erwähnt, der Widerstand $R_{n=0} = 2R_0$ und $C_{n=0} = C_0/2$ gesetzt werden.

Bei der Wahl der Werte von L_0, R_0, C_0 müssen die folgenden Gesichtspunkte berücksichtigt werden. Die Glg. (1.2.1,14) gibt an, dass γ proportional ω_N und δ^2 ist; also grosses γ entspricht einer hohen Netzfrequenz und einem grossen Verhältnis d/d_0. Dieser Sachverhalt ist ungünstig, da für eine grosse Netzfrequenz der Streufluss der Induktivitäten und die Streukapazitäten der Kettenglieder das gewünschte Verhalten des Modells verfälschen. In einem grossen Frequenzbereich ist es schwierig, eine konstante Induktivität mit einer guten Güte zu bauen. Der Verlauf der zu messenden theoretischen Kurven zeigt einerseits, dass die Maschenweite d kleiner als die Eindringtiefe d_0 sein muss, wenn wir auf genügende Genauigkeit der Messungen Wert legen. Wird andererseits das Verhältnis $\delta = d/d_0$ sehr klein, so wird die Genauigkeit der Messungen befriedigend, aber die Anzahl der Kettenglieder wird sehr gross, was mit einem grossen Anschaffungspreis verknüpft ist. Deshalb muss das Anwendungsgebiet auf den Bereich:

$$1 \leqslant 10\delta \leqslant 2 \qquad (2.2,2)$$

beschränkt werden. Dies bedeutet für die Grössen γ und $\omega_N = 2\pi f_N$:

$$1 \leqslant 100 \frac{L_0}{2R_0{}^2C_0} \gamma \leqslant 4 \ , \qquad 1 \leqslant 100 \frac{L_0}{2R_0} \omega_N = (10\delta)^2 \leqslant 4 \ . \qquad (2.2,3)$$

Der Bereich von γ lässt sich beliebig ausdehnen, wie die vorletzte Ungleichung zeigt, wenn wir C_0 variieren. Die übrigen Ungleichungen werden durch diese Ausdehnung nicht beeinflusst. So ist ein erstes Ziel erreicht, d.h. γ beliebig, während δ und ω_N in einem kleinen Bereich variieren. Dies erlaubt eine gute Messgenauigkeit sowie einen einfachen Bau der Induktivitäten. Die Begingung, ω_N klein zu halten, ist ohne weiteres erfüllbar. Bei der Wahl der Grössen L_0, R_0, C_0 muss noch beachtet werden, dass die unvermeidbaren Reihenwiderstände der Induktivitäten klein gegenüber den Netzwerkwiderständen bleiben sollen und dass auch die unvermeidbaren Streukapazitäten klein gegenüber den Netzwerkkapazitäten sein sollen. Es wurde eine

Messkette gebaut mit:

$L_0 = 4{,}830$ mH $\pm$ 2 ‰ mit einer Güte $Q > 200$, wenn 3 kHz $< f_N <$ 15 kHz,

$R_{01} = 10{,}99$ kΩ $\pm$ 2 ‰ , $R_{02} = 2\,R_{01}$,

$C_{01} = 510$ pF $\pm$ 2 ‰ , $C_{02} = 4C_{01}$. (2.2,4)

Die Induktivitäten wurden mit Ferroxcube-Topfkernen mit abgleichbarem Regelstift (Philips K 3000.61) gebaut. Der Wickelraum wurde voll benützt, um eine möglichst grosse Güte zu erhalten. Die Widerstände R_0 wurden durch Parallelschaltung von zwei Widerständen oder Aussortieren, die Kapazitäten C_0 durch Serie- oder Parallelschaltung von zwei Kapazitäten erhalten. Da die geeigneten Kapazitäten nicht in nützlicher Frist erhältlich waren, mussten für die Widerstände R_0 zwei verschiedene Werte verwendet werden. Die Figur 4 zeigt die mit 50 Maschen gebaute Kette. Einige Werte von γ, f_N und δ gibt die nächste Tabelle an:

γ	R_{01}, C_{02}		R_{02}, C_{02}	
	f_N [kHz]	δ	f_N [kHz]	δ
0,5	3,549	0,700		
1,0	7,099	0,990		
1,5	10,648	1,212		
2,0	14,198	1,400	7,099	0,700
2,5			8,873	0,783
3,0			10,648	0,857
3,5			12,423	0,926
4,0			14,198	0,990
0,0	3,621	$0{,}1/(2)^{1/2}$	mit C_{02} = 0	
0,0	7,242	0,100		

(2.2,5)

2.2.1 Messung der elektrischen Feldstärke

Die elektrische Feldstärke ist nach Glg. (1.2.1,13) proportional zur Netzwerkspannung. In unserem Fall wurde die Kettenspannungsverteilung bei verschiedenen Frequenzen entsprechend verschiedenen γ-Werten gemessen. Die Messwerte sind in den Tabellen 11 bis 14 und in den Figuren 9 bis 12 aufgeführt. Die Ueber-

einstimmung mit der Theorie ist befriedigend. Die Abweichung liegt zwischen $\pm$ 5‰, was dem Fehler der Messanordnung entspricht. Die Messanordnung, als Blockschema, zeigt die Figur 5.

2.2.2 Messung der Impedanz

Die Impedanz Z_N der Kette an der Stelle a = (N+1/2)d ist gegeben durch:

$$Z_N \left[a = (N+\frac{1}{2})\,d\right] = -\frac{V_{n+1/2} - V_R}{(i_N)_{n+1/2}} \quad . \qquad (2.2.2,1)$$

Setzen wir die Glgn. (1.2.1,13) und (1.2.2,7) mit Berücksichtigung der Glg. (1.1.2,4; Fall 6) ein, dann erhalten wir im Falle der Figur 3:

6,1:
6,2: $$Z_N \left[a = (N+\frac{1}{2})\,d\right] = s\frac{k}{b}\,\frac{(E_3)_{N+1/2}}{(H_2)_{N+1/2}} = \begin{matrix}2\\1\end{matrix}\; s\frac{k}{l}\,Z\,[a] \; . \qquad (2.2.2,2)$$

Die Impedanz der Kette ist proportional zur Impedanz der Halbleiterquader der Figur 3.

Der Gleichstromfall ist ein Spezialfall der Glg. (2.2.2,2), also können wir schreiben:

$$\frac{Z_N}{(R_N)_=} = \frac{Z}{R_=} \quad . \qquad (2.2.2,3)$$

Die mittlere spezifische Impedanz der Kette ist gleich der mittleren spezifischen Impedanz der Halbleiterquader.

Messungen an der Kette sind für $\gamma = 1$ im Falle 6,1 und 6,2 der Figur 3 durchgeführt worden. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 15 eingetragen. Die Figuren 13 bis 16 zeigen die gute Uebereinstimmung zwischen den gemessenen und gerechneten Werten.

Als Messinstrument diente der Vectorlyzer Type 202 von der Firma AD-YU Electronics Lab. Inc. Der maximale Fehler des Messinstrumentes beträgt 2 %.

2.2.3 Messung der Joule schen Wärme

Die mittlere spezifische Wirkleistung p ergibt, unter Berücksichtigung der Glg. (1.2.1,13), das folgende Integral für die zwei Fälle der Figur 3:

$$\frac{2p(x=a)}{\sigma \hat{E}_0^{\,2}} = \frac{1}{a}\int_0^a \left| \frac{E_3}{E_0} \right|^2 dx = \frac{1}{a}\int_0^a \left| \frac{V_n - V_R}{kE_0} \right|^2 dx \ . \qquad (2.2.3,1)$$

Wir setzen a = (N+1/2)d und integrieren schrittweise, mit dem Resultat:

$$\frac{2p\,[a=(N+1/2)d]}{\sigma \hat{E}_0^{\,2}} = \frac{1}{N+1/2} \left\{ \frac{1}{2} \left| \frac{V_0 - V_R}{kE_0} \right|^2 + \sum_{n=1}^{N} \left| \frac{V_n - V_R}{kE_0} \right|^2 \right\} . \qquad (2.2.3,2)$$

Diese Gleichung erlaubt die mittlere spezifische Wirkleistung an Hand der Spannungsverteilung der Kette abzuleiten. Diese Rechnung führt für $\gamma = 1$ im Falle 6,1 und 6,2 der Figur 3 auf die in der Tabelle 15 angegebenen Werte. Die Figuren 17 und 18 zeigen wieder eine gute Uebereinstimmung der Messungen mit der Theorie.

3. BESTIMMUNG ELEKTROMAGNETISCHER WECHSELFELDER IN HALBLEITENDEN VOLL- UND HOHLZYLINDERN

3.1 Problemstellung

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Fall 12 der Glg. (1.1.2,4). Gemäss Figur 6 werden für Voll- und Hohlzylinder in einem symmetrischen E-Feld die elektrische Feldstärke, die Impedanz und die Joulesche Wärme berechnet. Die Länge l der Zylinder muss gross gegenüber ihren Querabmessungen R_1 und R_2 sein. Das angelegte Wechselfeld darf nur eine z-Komponente E_3, verschieden von Null, aufweisen. E_3 ist eine Funktion von r und t.

3.1.1 Berechnung der elektrischen und magnetischen Feldstärke

Die Differentialgleichung (1.1.2,4; Fall 12) lautet [18]:

$$\frac{d^2P_3}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dP_3}{dr} + \varkappa^2 P_3 = 0 \quad , \qquad (3.1.1,1)$$

und hat die allgemeine Zylinderfunktion $Z_0(\varkappa r)$ nullter Ordnung mit dem Argument $\varkappa r$ als Lösung:

$$P_3 = Z_0(\varkappa r) = A\, J_0(\varkappa r) + B\, N_0(\varkappa r) \quad , \qquad (3.1.1,2)$$

wo J_0 die Bessel- und N_0 die Neumannfunktion nullter Ordnung darstellt.

Die zwei Fälle der Figur 6 lassen sich bei Benützung eines geschichteten Kreiszylinders mit Kernradius R_1, Aussenradius R_2 und den Grössen $\varkappa_1$, bzw. $\varkappa_2$, zusammen diskutieren. Die elektrische Feldstärke im Kern wird mit $E_3(\varkappa_1 r)$, die in der Schicht mit $E_3(\varkappa_2 r)$ bezeichnet. An der Grenzfläche $r = R_1$ zwischen Kern und Schicht ist die Kontinuität der tangentialen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärken zu fordern. Diese Bedingungen schreiben sich:

$$E_3(\varkappa_1 R_1) = E_3(\varkappa_2 R_1) \quad , \qquad (3.1.1,3a)$$

$$\frac{1}{\mu_1}\left.\frac{dE_3(\varkappa_1 r)}{dr}\right|_{r=R_1} = \frac{1}{\mu_2}\left.\frac{dE_3(\varkappa_2 r)}{dr}\right|_{r=R_1} \quad . \qquad (3.1.1,3b)$$

Da $N_0(\varkappa_1 r)$ im Kern, d.h. für $r = 0$, unendlich wird, muss hier $B = 0$ gesetzt werden. In der Schicht kommen sowohl Bessel- als auch Neumannfunktionen vor. Also:

$$E_3(\varkappa_1 r) \;/\; E_0 = J_0(\varkappa_1 r) \quad , \qquad 0 \leqslant r \leqslant R_1 \quad , \tag{3.1.1,4a}$$

$$E_3(\varkappa_2 r) \;/\; E_0 \;=\; Z_0(\varkappa_2 r) \;=\; A\, J_0(\varkappa_2 r) + B\, N_0(\varkappa_2 r) \;,\; R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \;. \tag{3.1.1,4b}$$

Die Integrationskonstanten A und B sind nach Gleichung (3.1.1,3) bestimmt durch:

$$J_0(\varkappa_1 R_1) = Z_0(\varkappa_2 R_1) = A\, J_0(\varkappa_2 R_1) + B\, N_0(\varkappa_2 R_1) \;, \tag{3.1.1,5a}$$

$$\frac{\varkappa_1 \mu_2}{\varkappa_2 \mu_1}\, J_1(\varkappa_1 R_1) = Z_1(\varkappa_2 R_1) = A\, J_1(\varkappa_2 R_1) + B\, N_1(\varkappa_2 R_1) \;, \tag{3.1.1,5b}$$

und, unter der Berücksichtigung, dass $J_1(t)N_0(t) - J_0(t)N_1(t) = 2/\pi\, t$, durch die folgenden Formeln gegeben [8,14]:

$$A = \frac{\pi}{2}\varkappa_2 R_1 \left[\frac{\mu_2 \varkappa_1}{\mu_1 \varkappa_2}\, J_1(\varkappa_1 R_1) N_0(\varkappa_2 R_1) - J_0(\varkappa_1 R_1) N_1(\varkappa_2 R_1)\right] , \tag{3.1.1,6a}$$

$$B = -\frac{\pi}{2}\varkappa_2 R_1 \left[\frac{\mu_2 \varkappa_1}{\mu_1 \varkappa_2}\, J_1(\varkappa_1 R_1)\, J_0(\varkappa_2 R_1) - J_0(\varkappa_1 R_1) J_1(\varkappa_2 R_1)\right] . \tag{3.1.1,6b}$$

Durch die Glgn. (3.1.1,4) und (3.1.1,6) ist die elektrische Feldstärke im Kern und in der Schicht bestimmt.

Die magnetische Feldstärke beträgt dann nach Glg. (1.1,1) oder (1.1.1,3):

$$H_2 = \frac{j\varkappa_1 E_0}{\omega \mu_1}\, J_1(\varkappa_1 r) \quad , \qquad 0 \leqslant r \leqslant R_1 \quad , \tag{3.1.1,7a}$$

$$H_2 = \frac{j\varkappa_2 E_0}{\omega \mu_2}\, Z_1(\varkappa_2 r) \quad , \qquad R_1 \leqslant r \leqslant R_2 \quad , \tag{3.1.1,7b}$$

wobei $\varkappa_{1,2} r = [2(\gamma_{1,2} - j)]^{1/2}\, r/d_{01,2}$ ist.

Das Verhältnis der elektrischen Feldstärken $E_3(\varkappa_1 r)/E_0 = J_0(\varkappa_1 r)$ für den Vollzylinder ist in Funktion der dimensionslosen Grösse r/d_{01} für verschiedene Parameter γ berechnet und nach Grösse und Phase in den Tabellen 16 bis 20 und Figuren 19 und 20 aufgetragen worden. Da die zur Verfügung stehenden Tabellen

[13] für komplexe Argumente von fünf zu fünf Grad tabelliert sind, war es nicht möglich, für γ_1 ganze Zahlen zu wählen. Werte für γ_1: 0; 0,5774; 1,1918; 1,7321; 2,7475.

Das Verhältnis der elektrischen Feldstärken $E_3(\varkappa_2 r)/E_0 = Z_0(\varkappa_2 r)$ für Hohlzylinder mit Luft ($\varkappa_1{}^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$) im Innern ist für $\gamma_2 = 1,1918$; 2,7475 in Tabellen 21 und 22 und Figuren 24 und 25 nachzusehen. Die Berechnung ist unter den Annahmen: $R_2/R_1 = 2$, $R_2/d_{02} = 2$; 4, $\varepsilon_2 = 15,8\,\varepsilon_0$(Germanium) und $\mu_2 = \mu_0$ durchgeführt worden. Dabei gilt: $\varkappa_1 r = \varkappa_1 d_{02}\, r/d_{02} = (2\gamma_2 \varepsilon_1 \mu_1/\varepsilon_2 \mu_2)^{1/2} r/d_{02}$.

Die gezeichneten Kurven schneiden die Ordinatenachse auf der Höhe:

$$\lim_{r/d_{01} \to 0} \left| J_0(\varkappa_1 r) \right| = 1 , \quad \lim_{r/d_{01} \to 0} \measuredangle J_0(\varkappa_1 r) = 0 . \qquad (3.1.1,8)$$

Im Falle des Hohlzylinders können wir als Schirmwirkungsfaktor S, den Betrag des Verhältnisses der elektrischen Feldstärke am Aussenrand des Halbleiters ($r = R_2$) zur elektrischen Feldstärke im Zentrum ($r = 0$) definieren:

$$S = \left| \frac{E_3(\varkappa_2 R_2)}{E_3(\varkappa_1 \cdot 0)} \right| . \qquad (3.1.1,8)$$

Die Werte von S fallen mit den Werten von $|E_3(\varkappa_2 r)/E_0|$ zusammen, da $E_3(\varkappa_1 \cdot 0) = E_0$ normiert wurde [2,12].

3.1.2 Berechnung der Impedanz

Wie in Abschnitt 2.1.2 wird die Impedanz Z als Verhältnis der am Rand ($r = R_1$, bzw. $r = R_2$) erscheinenden Spannung zum gesamten Strom, der in z-Richtung innerhalb des Randes fliesst, definiert. Es gilt für den

Vollzylinder: $$Z = -\frac{j\omega\mu_1}{\varkappa_1} \frac{1}{2\pi R_1} \frac{J_0(\varkappa_1 R_1)}{J_1(\varkappa_1 R_1)} , \qquad (3.1.2,1a)$$

Hohlzylinder: $$Z = -\frac{j\omega\mu_2}{\varkappa_2} \frac{1}{2\pi R_2} \frac{Z_0(\varkappa_2 R_2)}{Z_1(\varkappa_2 R_2)} , \quad R_2 > R_1 . \qquad (3.1.2,1b)$$

Für den Gleichstromwiderstand $R_=$ gilt:

Vollzylinder: $R_= = 1/\pi\sigma_1 R_1^2$, (3.1.2, 2a)

Hohlzylinder: $R_= = 1/\pi\left[\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2(R_2^2 - R_1^2)\right]$, $R_2 \geqslant R_1$. (3.1.2, 2b)

Damit erhalten wir für die mittlere spezifische Impedanz des halbleitenden Voll-, bzw. Hohlzylinders:

$$\frac{Z}{R_=} = \frac{1}{(1+j\gamma_1)} \frac{\varkappa_1 R_1}{2} \frac{J_0(\varkappa_1 R_1)}{J_1(\varkappa_1 R_1)} , \qquad (3.1.2, 3a)$$

$$\frac{Z}{R_=} = \frac{1}{(1+j\gamma_2)} \frac{\varkappa_2 R_2}{2} \left[1 + \frac{R_1^2}{R_2^2}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} - 1\right)\right] \frac{Z_0(\varkappa_2 R_2)}{Z_1(\varkappa_2 R_2)} , \quad R_2 \geqslant R_1 . \qquad (3.1.2, 3b)$$

Das Verhältnis $Z/R_=$ ist in Funktion der dimensionslosen Grösse R_1/d_{01}, bzw. R_2/d_{02}, für die unter Abschnitt 3.1.1 angegebenen Fälle in den Tabellen 16 bis 22 und Figuren 21, 22, 24 und 25 angegeben. Die Kurven schneiden die Ordinatenachse in den folgenden Punkten:

$$\lim_{r/d_{01}\to 0} \left| Z/R_= \right| = (1+\gamma_1^2)^{1/2} , \qquad \lim_{r/d_{01}\to 0} \measuredangle\, Z/R_= = -\operatorname{arctg}\gamma_1 . \qquad (3.1.2, 4)$$

3.1.3 Berechnung der Joule schen Wärme

Die spezifische Wirkleistung p lässt sich in analoger Weise wie in Abschnitt 2.1.3 berechnen. Sie lautet im Falle des

Vollzylinders: $$\frac{2p}{\sigma_1 \hat{E}_0^2} = \frac{2}{R_1^2} \int_0^{R_1} |J_0(\varkappa_1 r)|^2 \, r dr, \quad 0 \leqslant r \leqslant R_1 , \qquad (3.1.3, 1a)$$

Hohlzylinders: $$\frac{2p}{\sigma_2 \hat{E}_0^2} = \frac{2}{R_2^2} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \int_0^{R_1} |J_0(\varkappa_1 r)|^2 \, r dr + \int_{R_1}^{R_2} |Z_0(\varkappa_2 r)|^2 \, r dr \right] , \quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2 . \qquad (3.1.3, 1b)$$

Die obigen Integrale sind mit Hilfe der Integralgleichung für zwei beliebige Zylinderfunktionen $Z_p(\alpha t)$ und $\bar{Z}_p(\beta t)$:

$$\int t\, Z_p(\alpha t)\, \bar{Z}_p(\beta t)\, dt = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left[\beta t\, Z_p(\alpha t)\, \bar{Z}_{p-1}(\beta t) - \alpha t\, Z_{p-1}(\alpha t)\, \bar{Z}_p(\beta t)\right]$$

lösbar [8] . Wählen wir $\bar{Z}_p(\beta t)$ als konjugiert komplexe Funktion von $Z_p(\alpha t)$ mit $\alpha = \beta^* = \varkappa$ und setzen wir $p = 0$, dann können wir schreiben für den

Vollzylinder:
$$\frac{2p}{\sigma_1 \hat{E}_0^{\,2}} = \frac{2}{(\varkappa_1^2 - \varkappa_1^{*2}) R_1} \left[\varkappa_1 J_0^*(\varkappa_1 r)\, J_1(\varkappa_1 r) - \varkappa_1^*\, J_0(\varkappa_1 r)\, J_1^*(\varkappa_1 r)\right], \tag{3.1.3, 2a}$$

Hohlzylinder:
$$\frac{2p}{\sigma_2 \hat{E}_0^{\,2}} = \frac{2}{(\varkappa_2^2 - \varkappa_2^{*2})\, R_2} \left[\varkappa_2\, Z_0^*(\varkappa_2 R_2)\, Z_1(\varkappa_2 R_2) - \right.$$
$$\left. - \varkappa_2^*\, Z_0(\varkappa_2 R_2)\, Z_1^*(\varkappa_2 R_2)\right], \quad R_2 \geqslant R_1 \ . \tag{3.1.3, 2b}$$

Der Stern bedeutet die konjugiert komplexe Grösse.

Die Grösse $2p/\sigma_{1;2}\, \hat{E}_0^{\,2}$ ist als Funktion von $R_{1;2}/d_{01;2}$ für die unter Abschnitt 3.1.1 angegebenen Fälle berechnet (Tabellen 16 bis 22) und in den Figuren 23 bis 25 zur Darstellung gebracht worden.

Im Nullpunkt gilt:
$$\lim_{R_1/d_{01} \to 0} 2p/\sigma_1 \hat{E}_0^{\,2} = 1 \ . \tag{3.1.3, 3}$$

3.2 Aufbau der Kette

Die Glg. (3.1.1, 1) wird durch eine Kette nachgebildet. Die Grössen ihrer Elemente finden wir durch Einsetzen der Grössen der Glg. (1.1.2, 4; Fall 12) in die Glgn. (1.2.1, 13) und (1.2.1, 17). Das Reduzieren des Netzwerkes auf eine Kette folgt aus $\tau = 0$: $L_{n,\, m \pm 1/2} = \infty$. Der Index m ist dann überflüssig.

$$n \neq 0: \ L_{n \pm 1/2} = L_0 \frac{1}{|n \pm 1/2|} \ , \ R_n = R_0 \frac{1}{|n|} \ , \ C_n = C_0 |n| \ , \ L_n = \infty \ , \tag{3.2, 1a}$$

$$n = 0: \ L_{\pm 1/2} = 2L_0 \ , \ R_{n=0} = 4R_0 \ , \ C_{n=0} = \frac{1}{4} C_0 \ . \tag{3.2, 1b}$$

Da nur die positive r-Achse nachgebildet werden soll, müssen noch die Impedanzgrössen an der Stelle n = 0 verdoppelt werden (vergl. Abschnitt 1.2.1).

$$n = 0: \; L_{1/2} = 2L_0, \quad R_{n=0} = 8R_0, \quad C_{n=0} = \frac{1}{8} C_0 \; . \qquad (3.2,2)$$

Die Wahl von L_0, R_0, C_0 erfolgt nach den gleichen Gesichtspunkten wie in Abschnitt 2.2 angegeben wurde. Es wurde eine Kette gebaut mit:

$$L_0 = 41{,}41 \text{ mH} \pm 5 \,‰ \text{ mit einer Güte } Q > 200, \text{ wenn } 3 \text{ kHz} < f_N < 15 \text{ kHz},$$

$$R_0 = 45{,}5 \text{ k}\Omega \pm 2 \,‰,$$

$$C_{01} = 250 \text{ pF} \pm 2 \,‰, \qquad C_{02} = 4C_{01} \; . \qquad (3.2,3)$$

Die Herstellung der Elemente der fünfzigmaschigen Kette (Figur 4) fand wie in Abschnitt 2.2 statt. Die Werte von γ, f_N und δ mit den zu benützenden Netzwerkkonstanten gibt die nächste Tabelle an:

γ	R_0, C_{01}		R_{01}, C_{02}	
	f_N [kHz]	δ	f_N [kHz]	δ
0,5	6,996	0,1414		
0,5774	8,077	0,1520		
1,0	13,992	0,2	3,498	0,1
1,1918	16,674	0,2183	4,169	0,1092
1,5			5,247	0,1225
1,7321			6,060	0,1316
2,0			6,996	0,1414
2,5			8,745	0,1581
2,7475			9,612	0,1658
3,0			10,494	0,1732
3,5			12,243	0,1871
4,0			13,992	0,2
0	3,498	0,1	7,870	0,15
	mit $C_{01} = 0$		mit $C_{02} = 0$	

(3.2,4)

Bei der Nachbildung eines geschichteten Körpers muss beachtet werden, dass die Randbedingungen für elektromagnetische Felder im Netzwerk erfüllt sein müssen, dass die charakteristischen Grössen μ, σ, ε, bzw. γ, d_0, welche mit den Netzwerkgrössen L_0, R_0, C_0, bzw. ω_N, δ, verknüpft sind, von Schicht zu Schicht sich ändern und dass die Grenzflächen normalerweise nicht mit den Netzwerkknoten zusammenfallen. Da dies bei der Nachbildung von Hohlzylindern auftritt, benützen wir den Hohlzylinder als Beispiel. Entsprechend nehmen wir an, dass die Feldvektoren tangential zu den Grenzflächen liegen. Wir setzen in den Formeln $\nu = 1$ und $\lambda = 2\pi d$ ein. Die Randbedingungen der elektromagnetischen Felder (Kontinuität der elektrischen und magnetischen Feldstärke) lassen sich nach den Glgn. (1.2.1,13) und (1.2.2,7) erfüllen, indem wir fordern, dass für beide Nachbarschichten k und s gleich gross sein sollen. Also ist $k_1 = k_2 = k$ und $s_1 = s_2 = s$ zu setzen. Die Aenderung der charakteristischen Grössen μ, σ, ε, bzw. γ, d_0, können wir laut Glg. (1.2.1,14) durch entsprechende Aenderungen der Netzwerkgrössen L_0, R_0, C_0, bzw. f_N, δ, berücksichtigen. Diese letzte Betrachtung ist in der obigen bereits enthalten. Die Bedingung $s_1 = s_2 = s$ bei Festhalten der Netzwerkfrequenz f_N in den beiden Schichten des Hohlzylinders erfordert:

$$\frac{L_{01}}{L_{02}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\,, \quad \frac{R_{01}}{R_{02}} = \frac{\sigma_2 d_2^{\,2}}{\sigma_1 d_1^{\,2}}\,, \quad \frac{C_{01}}{C_{02}} = \frac{\varepsilon_1 d_1^{\,2}}{\varepsilon_2 d_2^{\,2}} \quad \text{mit } f_{N1} = f_{N2} = f_N\,. \tag{3.2,5}$$

Der Hohlzylinder der Figur 6 mit Luft ($\sigma_1 = 0$) im Raum I und $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ (vergl. Abschnitt 3.1.1) lässt sich mit $L_{01} = L_{02} = L_0$, $R_{01} = \infty$ und $f_{N1} = f_{N2} = f_N$ nachbilden. Setzen wir das Verhältnis der Kapazitäten $C_{02}/C_{01} = 4$, dann gilt $(d_1/d_2)^2 = \varepsilon_2/4\,\varepsilon_1$. Fällt die Grenzfläche nicht mit einem Netzwerkknoten oder mit einem Mittelpunkt zweier benachbarter Netzwerkknoten zusammen, dann müssen wir die zu der Grenzfläche benachbarten Maschenweiten d so ändern, dass einer der zwei oben erwähnten Fälle entsteht. Die Aenderung der Maschenweite d in eine andere $d' = cd$ geht aus einer Aenderung der Netzwerkgrössen hervor. Die Ableitung der dadurch bedingten Aenderung der Netzwerkgrössen fordert die Konstanz des Proportionalitätsfaktors s. Die Netzwerkgrössen, die der Maschenweite d' entsprechen, sind mit einem Strich versehen.

$$\frac{d'}{d} = c, \quad \frac{L_0}{L_0'} = \frac{R_0}{R_0'} = \frac{C_0'}{C_0} = \frac{\lambda'}{\lambda}\,c = \frac{r'}{r}\,c\,. \tag{3.2,6}$$

Hier dürfen wir nicht $\lambda' = 2\pi d'$ setzen, da $r' = nd'$ auch nicht mehr stimmt. Vorteilhafter ist es, mit $\lambda'/\lambda = r'/r$ zu arbeiten.

3.2.1 Messung der elektrischen Feldstärke

Die elektrische Feldstärke ist proportional zur Netzwerkspannung (siehe Glg. (1.2.1,13)). Die Spannungsverteilung an der Kette wurde bei verschiedenen Frequenzen, entsprechend verschiedenen $\gamma_{1;2}$-Werten, gemessen. Die Messwerte sind in den Tabellen 23 und 25 und Figuren 19, 20, 24 und 25 nachzusehen. Die Abweichung zwischen den Messungen und der Theorie liegt unterhalb 2 %, d.h. unter dem Fehler der Messapparate. Die Figur 5 zeigt die Messanordnung. Die Apparate der Nullmessmethode können durch den Vektorlyzer Type 202 von der Firma AD-YU Electronics Lab. ersetzt werden.

3.2.2 Messung der Impedanz

Die Herleitung der Proportionalität zwischen den Impedanzen Z_N der Kette und des halbleitenden Voll- oder Hohlzylinders Z geht aus Abschnitt 2.2.2 hervor. Hierbei muss der Fall 12 der Glg. (1.1.2,4) beachtet werden.

$$Z_N \left[R_{\substack{1\\2}} = (N_{\substack{11\\22}} + 1/2)\, d_{\substack{1\\2}} \right] = s \frac{k}{l} Z \left[R_{\substack{1\\2}} \right] \qquad (3.2.2,1)$$

und damit:

$$\frac{Z_N}{(R_N)_=} = \frac{Z}{R_=} \quad , \qquad (3.2.2,2)$$

da der Gleichstromfall ein Spezialfall der Glg. (3.2.2,1) ist.

Messungen an der Kette sind für $\gamma_{1;2}$ = 1,1918 und 2,7475 für den Vollzylinder und für die Hohlzylinder des Abschnittes 3.1.1 durchgeführt worden.

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 24 und 25 eingetragen. Die gute Uebereinstimmung zwischen der Theorie und den Messungen zeigen die Figuren 21, 22, 24 und 25 deutlich an. Der Fehler liegt wieder im Fehlerbereich des Vectorlyzer-Messinstrumentes.

3.2.3 Messung der Jouleschen Wärme

Die Ermittlung der Jouleschen Wärme aus den Netzwerkmessungen kann analog wie in Abschnitt 2.2.3 vorgenommen werden. Wir setzen entsprechend $R_1 = (N_{11} + 1/2)d_1 = (N_{12} + 1/2)d_2$, $R_2 = (N_{22} + 1/2)d_2$ an und finden für das Verhältnis $2p/\sigma_{1;2}\hat{E}_0^2$, nach einer schrittweisen Integration, für den

Vollzylinder:

$$\frac{2p\,[R_1=(N_{11}+1/2)d_1]}{\sigma_1\hat{E}_0^{\,2}} = \frac{2}{(N_{11}+1/2)^2}\left[\frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{N_{11}} n\left|\frac{V_n-V_R}{V_0-V_R}\right|^2\right], \qquad (3.2.3,1a)$$

und für den

Hohlzylinder:

$$\frac{2p\,[R_2=(N_{22}+1/2)d_2]}{\sigma_2\hat{E}_0^{\,2}} = \frac{2}{(N_{22}+1/2)^2}\left[\frac{R_{02}}{R_{01}}\left(\frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{N_{11}} n\left|\frac{V_n-V_R}{V_0-V_R}\right|^2\right) + \sum_{n=N_{12}}^{N_{22}} n\left|\frac{V_n-V_R}{V_0-V_R}\right|^2\right]. \qquad (3.2.3,1b)$$

In dieser Formel wird von der Konstanz von s Gebrauch gemacht, so dass $\sigma_1 d_1^{\,2}/\sigma_2 d_2^{\,2} = R_{02}/R_{01}$ gesetzt werden kann.

Die Berechnung der spezifischen Wirkleistung p mit Hilfe der obigen Gleichungen für $\gamma_{1;2} = 1,1918$ und $2,7475$, im Falle des Voll- und Hohlzylinders, zeigen die Tabellen 24 und 25 und die Figuren 23 bis 25.

4. BESTIMMUNG ELEKTROMAGNETISCHER FELDER IN ZYLINDRISCHEN LEITERN MIT RECHTECKIGEM QUERSCHNITT

4.1 Problemstellung

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Fall 1 der Glg. (1.1.2,4). Dazu gehört die Figur 7 mit Index 1, bzw. 2, im Raum I, bzw. II. Die Länge l muss viel grösser sein als die Querschnittsabmessungen a und b, so dass wir uns ein E-Feld als Lösung des Problems vorstellen können. Ausserhalb des Leiters nehmen wir Luft an.

Die allgemeine analytische Lösung des Problems ist bis heute noch nicht bekannt. Die Lösungsschwierigkeiten kommen davon her, dass die Randbedingungen an der Zylinderoberfläche des Leiters nicht bekannt sind. Für die Lösung muss also die Umgebung des zylindrischen Leiters mitberücksichtigt werden. Auf einer vom leitenden Zylinder "genügend weit entfernten" (siehe Abschnitt 4.1.1) Kreiszylinderfläche wird die Feldstärke konstant. Eine solche Kreiszylinderfläche wird als Randbedingung bei der Netzwerknachbildung der Glg. (1.1.2,4; Fall 1) benützt. Die Lösung des Problems lässt sich auch mit Hilfe von Integralgleichungen angeben, wobei die Randbedingungen wegfallen. Die Lösung mittels dieser Integralgleichungen ist aber zeitraubend [20]. Die weitere Literaturquelle [15] gibt eine Näherungsmethode für die Lösung des Problems. Der rechteckige Leiter wird als Parallelschaltung mehrerer Teilleiter mit konstanter Stromdichte, die untereinander gleich sind, dargestellt. Die n Teilströme der n Teilleiter werden aus einem System von n Gleichungen berechnet.

4.1.1 Einfluss der Seitenverhältnisse rechteckiger Grundgebiete auf die Feldverteilung

Wenn die Eindringtiefe d_0 viel kleiner als alle Querschnittsabmessungen des Leiters ist, dann sprechen wir von ausgeprägtem Skineffekt. Da in der Formel für d_0 das Produkt der Frequenz mit der Leitfähigkeit im Nenner vorkommt, hat eine hohe Frequenz den gleichen Einfluss wie eine sehr gute Leitfähigkeit, d.h. d_0 wird klein. Wird noch angenommen, dass die Wellenlänge in Luft sehr gross sei gegenüber allen Querschnittsabmessungen des Leiters, dann wird das Feld ausserhalb des Leiters quasi-elektrostatisch. Die Stromdichte (in z-Richtung) wird an der Oberfläche auftreten, ebenfalls wird die durch den Strom erzeugte erste Feldlinie längs

der Berandung der Leiterquerschnittes laufen. Dadurch kann dieser Fall als elektrostatisches Problem dargestellt werden [11, 19 und 20]. Die Stromdichte an den Leiteroberflächen entspricht den elektrostatischen Ladungen und der Gesamtstrom durch den Leiter der Gesamtladung. Die Oberfläche des Rechteckes stellt eine Aequipotentialfläche dar.

Das Reduzieren der Wellengleichung (1.1.1,4) in eine Potentialgleichung für das Luftgebiet kann übrigens unter allgemeineren Voraussetzungen durchgeführt werden, indem, im Gegensatz zum Vorgehen der oben erwähnten Autoren, für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in z-Richtung nach [16] die Lichtgeschwindigkeit in (1.1.1,4) eingesetzt wird: Aus dieser Ueberlegung für die z-Abhängigkeit von Q_e in Luft folgt $\partial^2 Q_e/\partial x_3^2 = -\varkappa_2^2 Q_e$.

Dieses elektrostatische Problem kann mit Hilfe der Schwarz-Christoffel'schen Sätze der konformen Abbildung gelöst werden. Berechnen wir für ein Rechteck mit Potential Null und Seitenverhältnis a/b = 2 den Ort, wo der Wert der Potentialfunktion gleich 1; 1,5; 2 ist. Nähern wir die Aequipotentialkurven durch Kreise an, dann betragen die grössten Abweichungen von den Kreisradien: 4,19; 1,53; 0,65 %. Die zugehörigen Kreisradien sind 2,37a; 3,92a; 6,46a. Wird anderseits auf einem Kreis die prozentuale Aenderung des Potentials betrachtet, dann ist sie z.B. für einen Kreisradius von 3,92a kleiner als 1,53 %, da an diesem Ort das Potential bereits logarithmischen Charakter aufweist [5].

Das elektrostatische Problem kann mit einem Widerstandsnetzwerk nachgebildet werden [4]. Dies folgt auch aus der Glg. (1.1.2,4), in der wir $\eta = q = 0$ setzen müssen, und aus den Glgn. (1.2.1,10) und (1.2.1,12) mit $A = d^2 \omega_N L_0/R_0$.

Auf einem Widerstandsnetzwerk für ein Cartesisches Koordinatensystem mit 50 Maschen pro Achse wurde das oben erwähnte elektrostatische Problem für Rechtecke mit Seitenverhältnissen a/b = 1; 2, nachgebildet. Werden die x- und y-Achsen als Symmetrieachsen eingeführt, dann genügt die Nachbildung eines Rechtecksviertels (vergl. Abschnitt 1.2.1). Die Messungen stimmen mit den gerechneten Werten überein. Der maximale prozentuale Potentialfehler F, längs eines Kreises vom Radius r, ist in der Figur 26 für Rechtecke mit Seitenverhältnissen a/b = 1; 2 aufgetragen. Die Figur 26 zeigt deutlich, dass eine Entfernung von 4,5a, bzw. 3,5a, vom Zentrum des Rechtecks, bzw. des Quadrates, genügt, um praktisch (Fehler<1%) von der Geometrie der gegebenen Aequipotentiallinien unabhängig zu werden.

4.1.2 Annahme zur Lösung des Problems

Wenn die Frequenz oder die Leitfähigkeit des zylindrischen Leiters der Figur 7 nicht unendlich ist, dann wird eine z-Komponente der elektrischen Feldstärke auftreten. Nehmen wir an, dass die z-Abhängigkeit sämtlicher Feldgrössen etwa durch die Ausbreitung in Luft (siehe Abschnitt 4.1.1 und [16]) gegeben ist, dann müssen, wie in Abschnitt 1.1.2 erklärt ist, die Grössen $\varkappa_{1;2}^2$ durch $\eta_{1;2}^2$ ersetzt werden. Dies bedeutet, dass die Grösse $\varkappa_1^2 = -j\omega\mu_0(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_0)$ des zylindrischen Leiters mit rechteckigem Querschnitt durch $\eta_1^2 = -j\omega\mu_0\,\sigma_1$ plus eine kleine Grösse zu ersetzen ist. In erster Näherung wird diese kleine additive Grösse vernachlässigt. Anderseits bedeutet die obige Annahme für das Luftgebiet (Raum 2 der Figur 7), dass wir für η_2^2 die oben aufgeführte kleine Grösse erhalten. Der Term $\eta_2^2\,E_3$ der Glg. (1.1.2,4) wird in diesem Fall vernachlässigt. Unter diesen vereinfachenden Annahmen wurde die Verteilung der elektrischen Feldstärke E_3 in zylindrischen Leitern mit den Seitenverhältnissen a/b = 1; 2 mit Hilfe eines Analogienetzwerkes gelöst.

4.2 Aufbau des Analogienetzwerkes

Die Grösse der Bauelemente für die Nachbildung der Glg. (1.1.2,4; Fall 1) erhalten wir durch Einsetzen ihrer zugehörigen Werte in die Glgn. (1.2.1,13) und (1.2.1,17). Die Ersetzung von $\varkappa^2$ durch η^2 und die Annahmen des Abschnittes 4.1.2 müssen hierbei beachtet werden. Also werden für den zylindrischen Leiter $\mu_1 = \mu_0$, σ_1, $\varepsilon_1 = 0$ und für die Umgebung in Luft $\mu_2 = \mu_0$, $\sigma_2 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$ gesetzt. Nach Einsetzen obiger Grössen finden wir für

den Leiter: $n;\ m \neq 0\ :\quad L_{n\pm 1/2,\,m} = L_{n,\,m\pm 1/2} = L_0\ ,$

$$R_{n,m} = R_0\ ,\quad C_{n,m} = 0\ ,\quad L_{n,m} = \infty\ ,$$

die Luft: $n;\ m \neq 0\ :\quad L_{n\pm 1/2,\,m} = L_{n,\,m\pm 1/2} = L_0\ ,$

$$R_{n,m} = \infty\ ,\quad C_{n,m} = 0\ ,\quad L_{n,m} = \infty\ .$$

Beschränken wir uns auf die Nachbildung der positiven x- und y-Achsen, so muss,

wie in Abschnitt 1.2.1 erwähnt, $L_{n=0,m} = L_{n,m=0} = 2L_0$, $R_{n=0,m\neq 0} = R_{n\neq 0,m=0} = 2R_0$, $R_{n=m=0} = 4R_0$ gesetzt werden. Da die ganze Nachbildung in der x, y-Ebene in diesem Falle keine Ableitkapazitäten $C_{n,m}$ verlangt, können wir die Netzwerkinduktivitäten $L_{n\pm 1/2,m}$, $L_{n,m\pm 1/2}$ durch Netzwerkwiderstände, die Ableitwiderstände $R_{n,m}$ durch Ableitkapazitäten $C_{n,m}$ ersetzen (dies entspricht einer Drehung von -90° oder einer Integration nach der Zeit der Impedanzzeiger im Impedanzzeigerdiagramm). Es beruht dies auf der Möglichkeit, die Grösse $A = d^2$ der Glg. (1.2.1,12) durch $A = d^2 \omega_N L_0/R_0$ zu ersetzen. Diese Transformation beeinflusst den Proportionalitätsfaktor s des Netzwerkes. In diesem Spezialfall schreibt sich s mit $\lambda = d$:

$$s = \frac{1}{j\omega} \frac{1}{k} \frac{R_0}{\mu_0} = \frac{1}{k} \frac{\sigma d^2}{j\omega_N C_0} .$$

An der Trennfläche müssen die Kontinuitätsbedingungen der elektromagnetischen Felder erfüllt werden (vergl. Abschnitt 3.2). Sie lauten: $k_1 = k_2 = k$, $s_1 = s_2 = s$. Durch Festhalten der Netzwerkfrequenz f_N und Einsetzen der Grössen μ und σ finden wir für unsern Spezialfall:

$$\frac{R_{01}}{R_{02}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1 , \quad \frac{C_{01}}{C_{02}} = \frac{\sigma_1 d_1^2}{\sigma_2 d_2^2} = \infty .$$

Die neueingeführten Netzwerkwiderstände $R_0 = 3,5\ k\Omega \pm 5\ ‰$ sind gleich gross und unabhängig vom Ort für beide betrachteten Gebiete. Im Leiter müssen Ableitkapazitäten $C_{01} = 20,1\ nF \pm 1\ \%$ zwischen den Netzwerkknoten und einer allgemeinen Erde eingeführt werden. Die Ströme in den Netzwerkwiderständen sind dann proportional zu den magnetischen Komponenten der Feldstärke. Die Ströme in den Ableitkapazitäten sind proportional zu den Strömen, die pro Differenzen-Flächenelement in z-Richtung fliessen (siehe Abschnitt 1.2.2).

4.2.1 Messung der elektrischen Feldstärke

Wie in den früheren Abschnitten ist die elektrische Feldstärke E_3 wieder proportional zur Netzwerkspannung. Figur 8 zeigt das benützte Netzwerk mit den eingebauten Ableitkapazitäten. Die in Abschnitt 4.1.1 abgeschätzte kreisförmige Aequipotentialkurve erlaubte die Nachbildung eines Quadrates mit 14 Maschenweiten, bzw. eines Rechteckes mit 12 zu 6 Maschenweiten. Die Spannungsverteilung am Netzwerk wurde bei verschiedenen Frequenzen, entsprechend verschiedenen a/d_{01} Verhältnissen gemessen.

a/d_{01} :	1	2	4	8	
$f_N(a/b=1)$	23,1	92,3	369	1477	Hz
$f_N(a/b=2)$	31,4	126	303	2011	Hz

Die Tabellen 26 bis 28 zeigen die Ergebnisse der Messungen für $a/d_{01} = 2; 4$ im Falle des Quadrates und des Rechteckes. Die Spannungsverteilungen für $a/d_{01} = 1$ sind nicht angegeben worden, da sie sehr nahe beim Gleichstromfall liegen, wie die folgenden charakteristischen Werte zeigen:

		x=y=0 n=m=0	x=a, y=0 n=N, m=0	x=a, y=b n=N, y=M	x=0, y=b n=0, m=M
$\left\lvert\frac{E_3}{E_0}\right\rvert$	a/b=1	1	1,07	1,22	1,07
	a/b=2	1	1,035	1,065	1,005

Die Spannungsverteilung für $a/d_{01} = 8$ weist schon einen starken Skineffekt auf. Die Spannung im Zentrum war schon durch die unvermeidbaren Aussenfelder gestört. Normieren wir die Spannung für x = a, y = b auf hundert, dann erhalten wir auf die Symmetrieachsen und die Ränder:

	$\lvert E/E_0\rvert$, a/b = 1			$\lvert E/E_0\rvert$, a/b = 2			
n, m	m=0	n=N	n=m	n=0	m=M	n=0	n=N
0		32,0			30,7		43,3
1		32,2			30,8		44,2
2		32,5			31,1	1,95	46,5
3		32,9			31,5	3,95	51,6
4		33,2		1,40	32,1	7,85	62,8
5		33,9		1,76	33,1	15,7	80,9
6		34,8	0,80	2,30	34,5	30,7	100
7	0,62	36,2	1,36	3,09	36,4	--	--
8	1,00	38,0	2,50	4,22	40,7	--	--
9	1,73	40,5	4,46	6,14	46,5	--	--
10	3,07	45,0	9,11	10,8	58,2	--	--
11	5,60	51,3	17,1	21,6	75,9	--	--
12	10,0	62,0	31,4	43,3	100	--	--
13	17,9	78,3	58,9	--	--	--	--
14	32,0	100	100				

Für die Messung diente die gleiche Anordnung wie in Abschnitt 3.2.1.

4.2.2 Messung der Impedanz

Die in den Abschnitten 2.1.2 und 3.1.2 definierte Impedanzformel kann in diesem Falle nicht angewendet werden, da die Spannung am Rand des Rechteckes nicht konstant ist. Um die Impedanz zu erhalten, berechnen wir die im Leiter verbrauchte Leistung (Wirk- und Blindleistung). Diese Leistung, dividiert durch das Quadrat des absoluten Betrages des gesamten Stromes, der in z-Richtung fliesst, ergibt die Impedanz Z. Zur Berechnung der verbrauchten Leistung benützen wir das Poynting'sche Theorem in der üblichen, auf komplexe Grössen erweiterten Form [19]:

$$Z = \frac{\iint (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \vec{dA}}{|\oint \vec{H} \; \vec{du}|^2} \quad . \qquad (4.2.2,1)$$

Im Zähler bedeutet der Stern den konjugiert komplexen Wert des Vektors und $\vec{dA}$ das Flächenelement auf dem Rand des leitenden Rechteckzylinders. Im Nenner bedeutet $\vec{du}$ das Linienelement längs der Berandung des leitenden Rechteckzylinders.

Definieren wir als Netzwerkimpedanz Z_N (in analoger Weise wie oben) das Verhältnis der im nachgebildeten Leiter verbrauchten Leistung zum Quadrat des absoluten Betrages des gesamten Stromes, dann finden wir wie in den entsprechenden vorhergehenden Abschnitten 2.2.2 und 3.2.2 die gleiche Proportionalitätsformel zwischen beiden Impedanzen:

$$Z_N = s \frac{k}{l} Z \quad . \qquad (4.2.2,2)$$

Ganz analog wie in diesen erwähnten Abschnitten lässt sich weiter schreiben:

$$\frac{Z_N}{(R_N)_=} = \frac{Z}{R_=} \quad , \qquad (4.2.2,3)$$

wobei für $(R_N)_=$ die Parallelschaltung sämtlicher Ableitwiderstände, bzw. Ableitkapazitäten des nachgebildeten, leitenden Zylinders zu setzen ist und zwar in der normalen Nachbildungsform, bzw. gemäss der in diesem Kapitel benützten, transformierten Nachbildungsmöglichkeit.

Die Tabellen 26 bis 28 geben die gemessenen Grössen, die für die Berechnung der Impedanzen benützt werden.

Wir finden für

$$a/b = 1 : \quad \frac{Z_N}{(R_N)_=} = \frac{Z}{R_=} = \begin{matrix} 1,85 \ \underline{/29^{\circ},5} & (a/d_{01} = 2) \\ 3,40 \ \underline{/37^{\circ},7} & (d/d_{01} = 4) \end{matrix}$$

$$a/b = 2 : \quad \frac{Z_N}{(R_N)_=} = \frac{Z}{R_=} = \begin{matrix} 1,31 \ \underline{/18^{\circ},9} & (a/d_{01} = 2) \\ 2,30 \ \underline{/36^{\circ},8} & (a/d_{01} = 4) \end{matrix}$$

5. ANHANG :
UEBER DIE ANWENDUNG VON ITERATIONSVERFAHREN AUF RAUMLADUNGSPROBLEME

Wie in Abschnitt 4.1.1 erwähnt, können die elektrostatischen Probleme mit Hilfe eines Analogie-Widerstandsnetzwerkes gelöst werden. Zu diesen Problemen gehört die Laplacesche Differentialgleichung ($\Delta V = 0$). Wollen wir die Poissonsche Differentialgleichung nachbilden, dann müssen wir ein Widerstandsnetzwerk mit Stromeinspeisungen an jedem Maschenknoten vorsehen [4]. Die Speiseströme sind proportional zur Störfunktion. In dieser Literaturquelle ist angegeben worden, dass für die Bestimmung der Störfunktion der Poissonschen Differentialgleichung für Raumladungsgebiete $-\varrho/\varepsilon = |i| / \varepsilon (2e_0 V)^{1/2}$ ($|i|$ = Betrag der Stromdichte, e_0 = Verhältnis der Elektronenladung e_1 zur Ruhemasse des Elektrons m_0), die unbekannte Stromdichte durch eine für das ganze Gebiet gültige mittlere Stromdichte ersetzbar ist. Die richtige Potentialverteilung wird durch ein Iterationsverfahren erhalten.

Daraus würden wir schliessen, dass aus dieser "richtigen" Potentialverteilung die richtige Störfunktion sich ableiten lässt, so dass wir in der Lage wären, die Grösse der Stromdichte an jedem Orte anzugeben. Diese Ueberlegung ist leider falsch, wie wir uns leicht überzeugen werden. Die benützte Iterationsmethode geht wie folgt vor. Aus der Potentialverteilung der nachgebildeten Laplaceschen Differentialgleichung und mit Hilfe der vorausgesetzten mittleren Stromdichte wird für jeden Punkt ein Speisestrom gerechnet und durch eine Speisungsanlage in das Netzwerk eingespeist. Daraus wird eine neue Potentialverteilung erhalten, welche neue gerechnete Speiseströme liefert, die wieder in das Netzwerk eingespeist werden, usw. Da für die Rechnung der Speiseströme immer die vorausgesetzte mittlere Stromdichte benützt wird, wird die Berechnung der Störfunktion und die aus dieser berechnete Stromdichte für die "richtige" Potentialverteilung" die vorausgesetzte, mittlere Stromdichte liefern, was wir eigentlich nicht suchen.

Um das Problem wirklich lösen zu können, müssen wir über die Stromdichteverteilung etwas wissen, d.h. über die vektoriellen Differentialgleichungen $\mathrm{rot}\,\vec{i}$ und $\mathrm{div}\,\vec{i}$ im Raumladungsgebiet. Da bekanntlich die Divergenz der Stromdichte Null ist, ist über den Rotor der Stromdichte nichts bekannt, was uns helfen könnte. Setzen wir $\vec{i} = \varrho\vec{v}$, mit $\vec{v}$ als Geschwindigkeit, dann können wir schreiben:

$$\mathrm{rot}\,\vec{i} = \varrho\,\mathrm{rot}\,\vec{v} + \mathrm{grad}\,\varrho \times \vec{v} \quad , \tag{5.1}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{i} = \varrho\,\mathrm{div}\,\vec{v} + \mathrm{grad}\,\varrho \cdot \vec{v} = 0 \quad . \tag{5.2}$$

Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ genügt der Newtonschen Bewegungsgleichung. Im vierdimensionalen Raum mit den Raumkoordinaten x_1, x_2, x_3 und der Zeitkoordinaten $x_4 = jct$ lässt sich diese Gleichung mit dem Impulsvektor $\vec{G} = m(\vec{v}, jc)$ folgendermassen anschreiben:

$$\frac{d\vec{G}}{d\tau} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Grad}\,\vec{G}^2 - \mathrm{Rot}\,\vec{G}\cdot\vec{G} = m_0\,\vec{K}\,. \tag{5.3}$$

Hierbei bedeutet:

$d\tau = [1-(v/c)^2]^{1/2}\,dt$,

$m = m_0/[1-(v/c)^2]^{1/2}$,

c = Lichtgeschwindigkeit,

$\vec{K} = [\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B},\ (\vec{v}\cdot\vec{E})\,j/c]e_1/[1-(v/c)^2]^{1/2}$,

Grad und Rot = vierdimensionaler vektorieller Operator [16].

Da $\mathrm{Grad}\,\vec{G}^2 = 0$ ist, und $m_0\,\vec{K} = (c\vec{B},\ -j\vec{E})\cdot\vec{G}\,e_1/c$ sich mit Hilfe des Sechserfeldvektors $(c\vec{B},\ -j\vec{E})$ schreiben lässt, gilt:

$$\mathrm{Rot}\,\vec{G} = -(c\vec{B},\ -j\vec{E})\,e_1/c\,. \tag{5.4}$$

Die drei Raum-Raum-Komponenten der obigen Gleichung lauten:

$$\mathrm{rot}\,\vec{mv} = -e_1\vec{B}\,, \tag{5.4a}$$

und die drei Raum-Zeit-Komponenten:

$$\mathrm{grad}\,mc^2 + \frac{\partial\,\vec{mv}}{\partial t} = e_1\vec{E}. \tag{5.4b}$$

Die letzte Gleichung ist uns aus der speziellen Relativitätstheorie bekannt. Die vorletzte gibt uns Auskunft über das Geschwindigkeitsverhalten. Um das Problem fertig zu lösen, sollten wir noch eine Beziehung zwischen div $\vec{mv}$ oder grad ϱ mit den Feldvektoren $\vec{E}$ und $\vec{B}$ finden.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Borgnis F., "Elektromagnetische Eigenschwindungen dielektrischer Räume" Ann. Phys. (Leipzig), 35, 359-384 (1939).

[2] British Association, "Mathematical Tables VI, Bessel Functions Part I" (University Press Cambridge 1958).

[3] Byrd, P.F., und Friedmann, M.D., "Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists" (Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1954).

[4] Cremosnik, G., "Ermittlung von Raumladungsfeldern und Kapazitäten mit Hilfe eines Widerstandsnetzes mit Stromquellen", Diss. ETH, Prom. Nr. 2667 (Juris-Verlag, Zürich, 1957).

[5] Dombi, B. "Diplomarbeit am Institut für höhere Elektrotechnik an der E.T.H." (1960).

[6] Frei, A.H., und M.J.O. Strutt, "Skineffekt in Halbleitern" Scientia Electrica 5, Heft 2, 3-12 (1959).

[7] Gundlach, F.W., "Grundlagen der Höchstfrequenztechnik" (Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950).

[8] Jahnke, E., und Emde, F., "Funktionentafeln mit Formeln und Kurven" (B.G. Teubner, Leipzig/Berlin 1933).

[9] Karplus, W.J., "Analog Simulation" (Mc Graw-Hill-Verlag, New York/Toronto/London 1958).

[10] Koppenfels von, W., und Stallmann, F., "Praxis der Konformen Abbildung" (Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959).

[11] Lord Kelvin "Mathematical and Physical Papers" 5, 499 (1890).

[12] Lösch, F., "Siebenstellige Tafeln der elementaren transzendenten Funktionen" (Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1954).

[13] National Bureau of Standards, "Table of the Bessel Functions $J_0(z)$ and $J_1(z)$ for Complex Arguments"
"Table of the Bessel Functions $Y_0(z)$ and $Y_1(z)$ for Complex Arguments"
(Columbia University Press, New York 1947).

[14] Pöschl, K., "Mathematische Methoden in der Hochfrequenztechnik" (Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950).

[15] Schwenkhagen, H., "Untersuchungen über Stromverdrängung in rechteckigen Querschnitten" Arch. Elektrotech. (Berlin) 17, Heft 6, 537-589 (1927).

[16] Sommefeld, A., "Elektrodynamik" (Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig K-G, Leipzig 1954).

[17] Strutt, M.J.O., "Elektronenröhren" (Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957).

[18] Strutt, M.J.O., "Skineffekt in einem geschichteten Kreiszylinder" Hochfrequenztech. & Elekt. Akust. 41, Heft 2, 62-63 (1933).

[19] Strutt, M.J.O., "Berechnung der Impedanz zylindrischer Leiter von beliebiger Querschnittsform" Elektrische Nachrichtentechnik (Berlin) 8, Heft 6, 269-276 (1931).

[20] Strutt, M.J.O., "Skineffekt in zylindrischen Leitern" Ann. Phys. (Leipzig) 85, 781-793 (1928).

Leer - Vide - Empty

Curriculum vitae

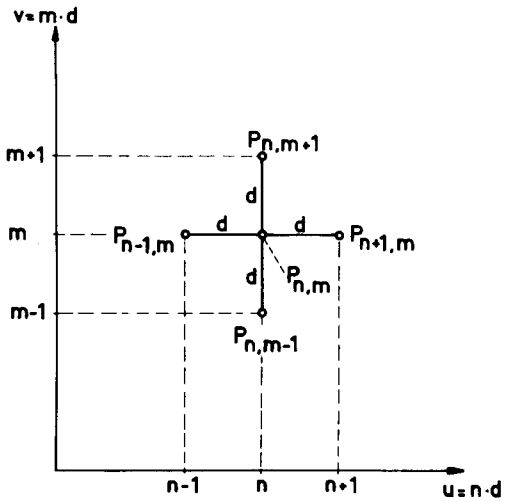
Ich wurde am 26. April 1932 in La Chaux-de-Fonds geboren. Die Primarschule besuchte ich in Fontainemelon (Kanton Neuenburg) und die Sekundarschule in Cernier (Kanton Neuenburg). Im Jahre 1948 trat ich in das Gymnase Cantonal de Neuchâtel ein, wo ich nach 3 Jahren und 3 Monaten die Maturitätsprüfung Typus C ablegte. Anschliessend leistete ich meinen Militärdienst und absolvierte meine Vorstudienpraxis. Im Herbst 1952 begann ich meine Studien an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, an der Abteilung für Elektrotechnik (Richtung Schwachstrom), wo ich 1956 diplomierte. Am Institut für höhere Elektrotechnik (Vorstand: Prof. Dr. M. J. O. Strutt), wo ich seit 1957 als Assistent und wissenschaftlicher Mitarbeiter tätig bin, beschäftigte ich mich vorwiegend mit theoretischen Arbeiten.

Leer - Vide - Empty

Leer - Vide - Empty

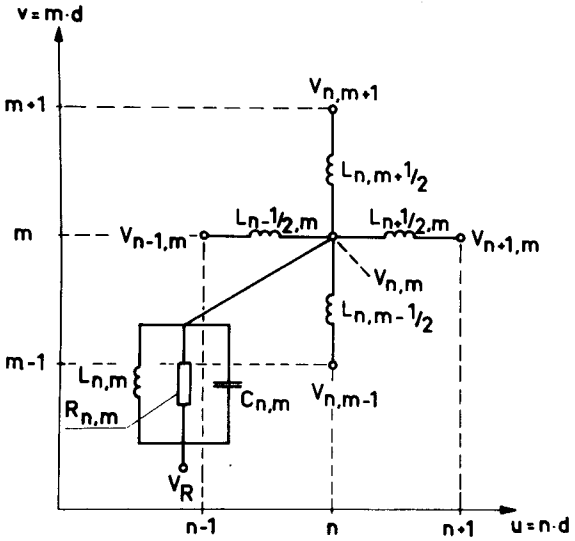
Leer - Vide - Empty

FIGUREN UND TABELLEN



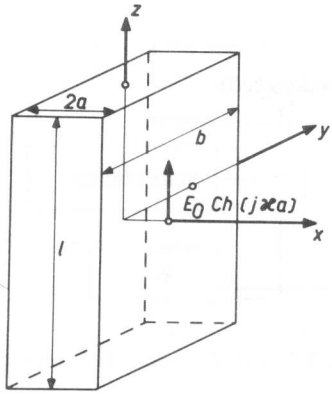
Figur 1

Feldaufteilung in diskrete Maschenpunkte für die Reihenentwicklung des Wellenpotentiales.

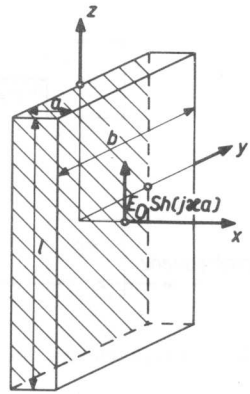


Figur 2

Darstellung eines allgemeinen Netzwerkpunktes (n, m) im v-u-Koordinatensystem.



6.1



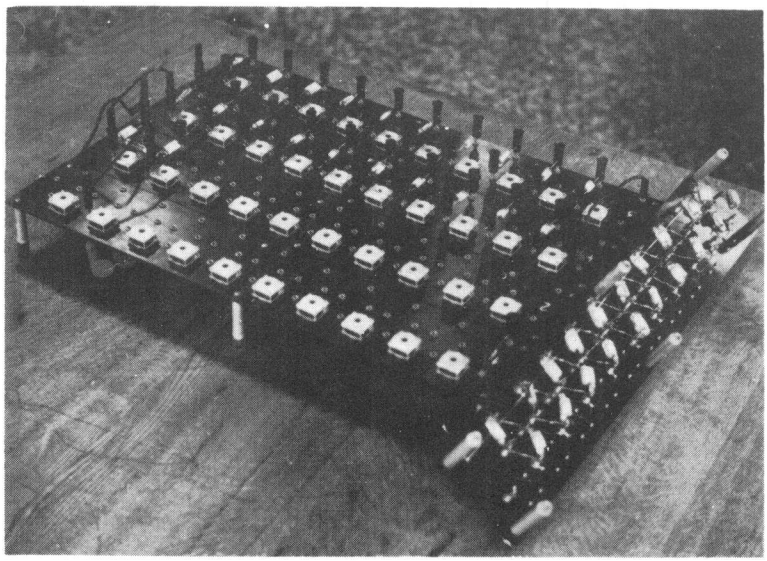
6.2

Figur 3: Darstellung der ebenen Halbleiterplatten

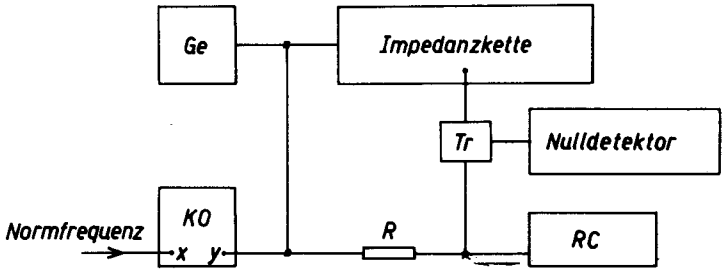
6,1: mit symmetrischem E-Feld

6,2: mit kurzgeschlossener Fläche (schraffiert) in y-z-Ebene

$E_0 = \hat{E}_0 \exp(j\omega t)$



Figur 4 Aufnahme der Analogie-Impedanzkette (zu Kapitel 2 und 3). Die Widerstände sind steckbar und die Kapazitäten so angeordnet, dass ihre Serie- und Parallelschaltung leicht durchführbar ist.

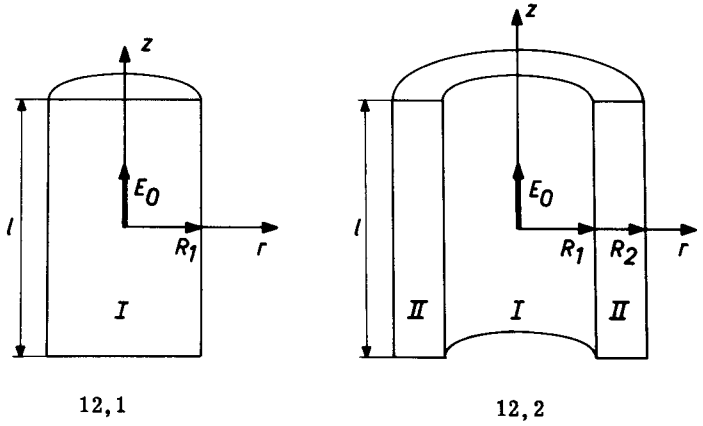


Figur 5 Blockschema der zu Abschnitt 2.2.1 gehörenden Messanordnung

Ge : Schwebungssummer, Type SIT, Rohde & Schwarz

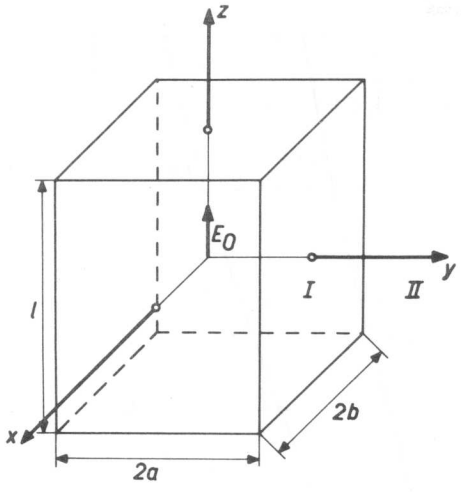
Tr : Transformer, Type 578-C, General Radio Co.

RC : L-C-Präzisionsmessbrücke, Type LCB, Rohde & Schwarz



Figur 6 Darstellung des Vollzylinders 12,1 und Hohlzylinders 12,2 in einem symmetrischen E-Feld. Die dem Raum I, bzw. II, zugeordneten Grössen sind mit dem Index 1, bzw. 2, versehen.

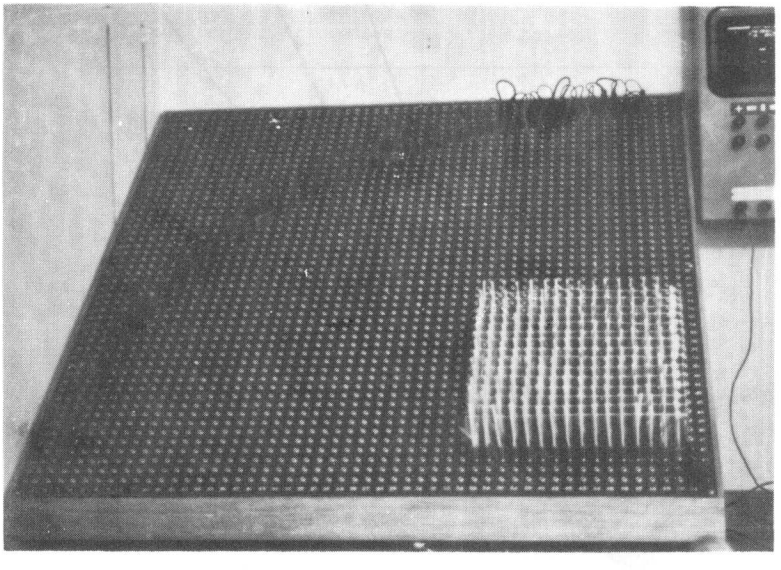
$$E_0 = \hat{E}_0 \exp(j\omega t)$$



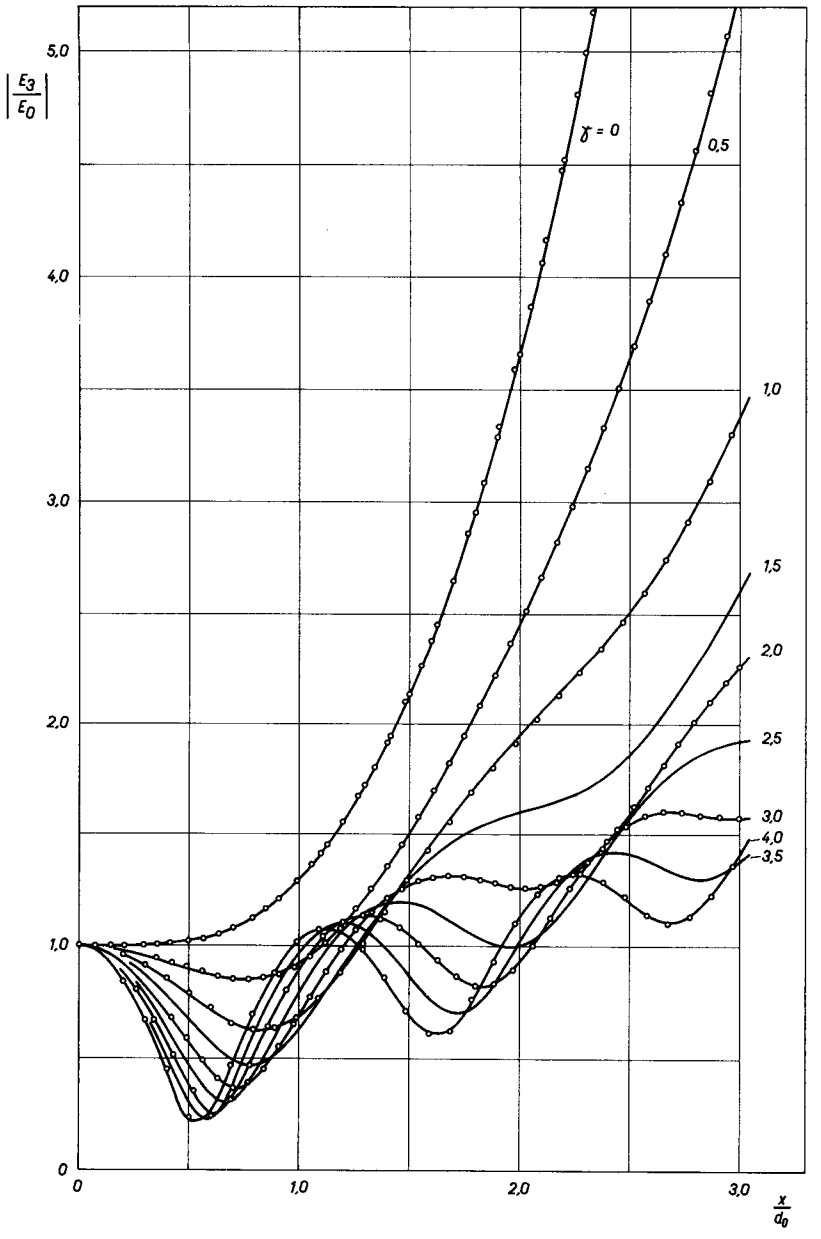
Figur 7

Darstellung eines zylindrischen Leiters mit rechteckigem Querschnitt. Die dem Raum I, bzw. II, zugeordneten Grössen sind mit dem Index 1, bzw. 2, versehen.

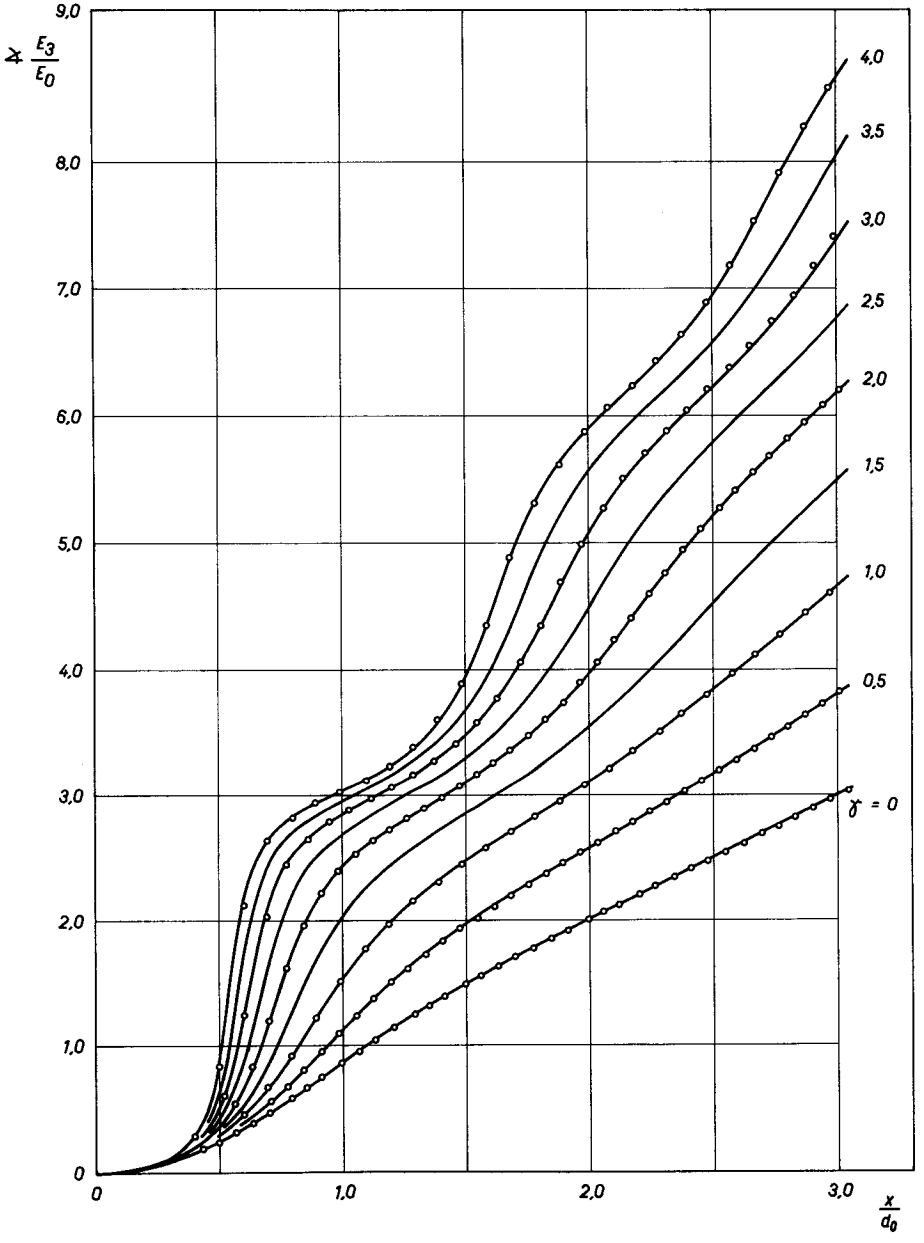
$E_3\ (x = y = 0) = \hat{E}_0 \exp\ (j\omega t)$



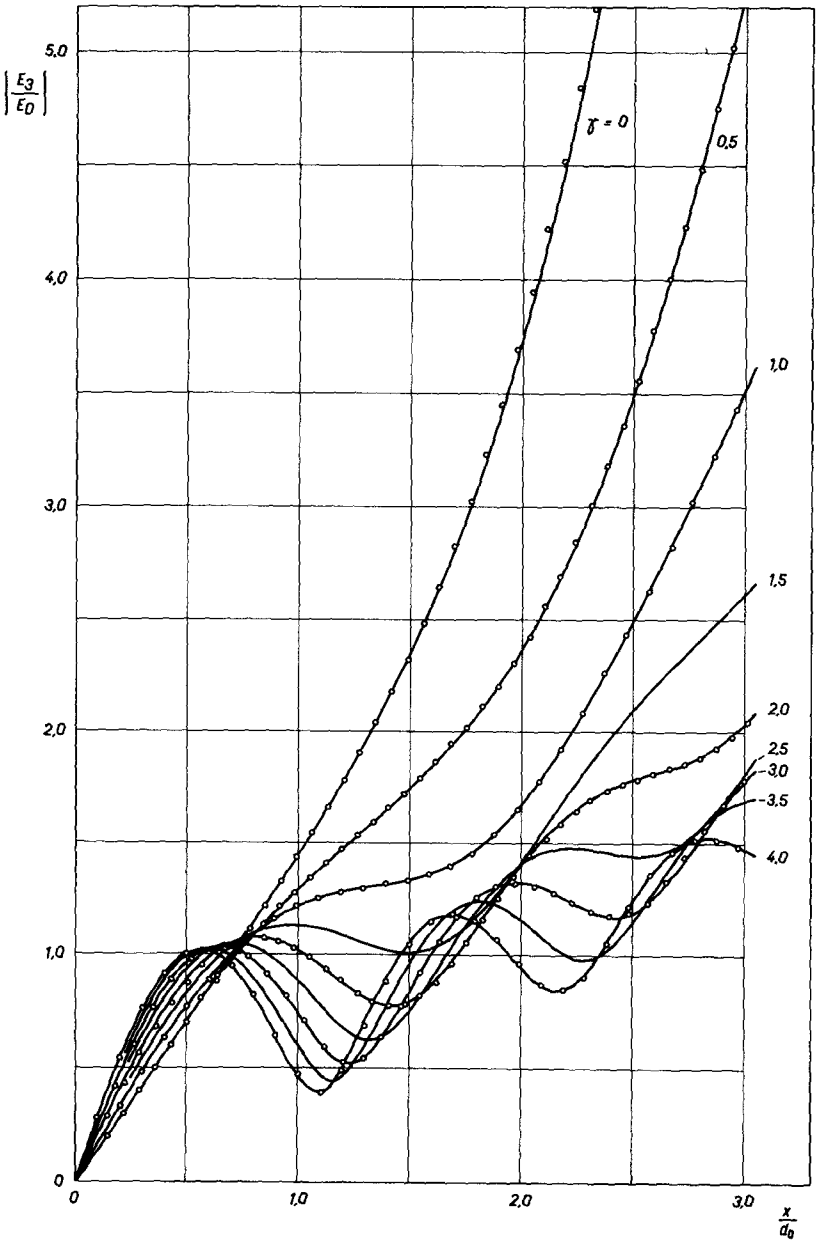
Figur 8 Aufnahme des Analogie-Netzwerkes zu Kapitel 4. Die Kapazitäten sind steckbar zwischen den Maschenknoten und der gemeinsamen Erde angeordnet. Zwischen den Maschenknoten sind Widerstände eingeschaltet.



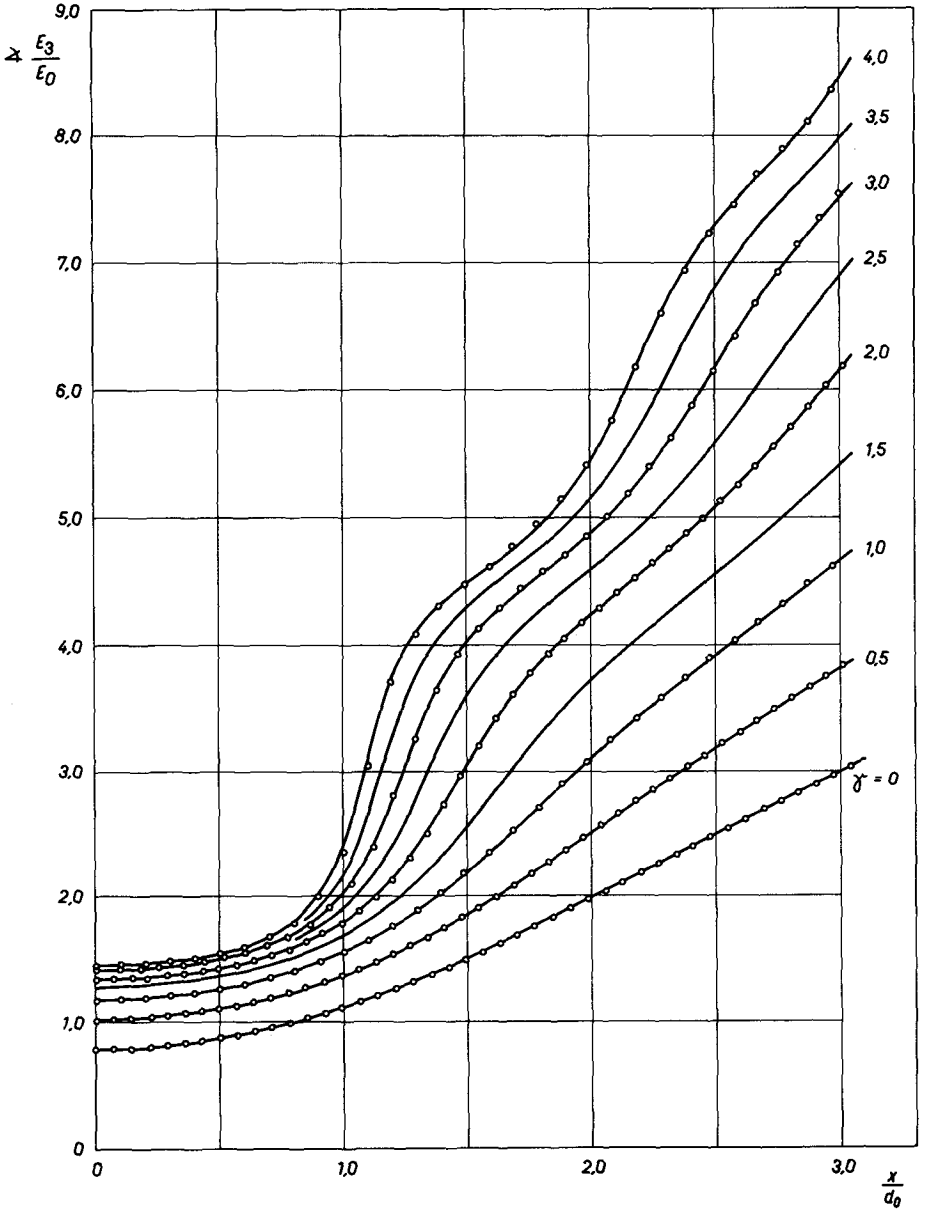
Figur 9 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabelle 1), Messpunkte (siehe Tabelle 11).



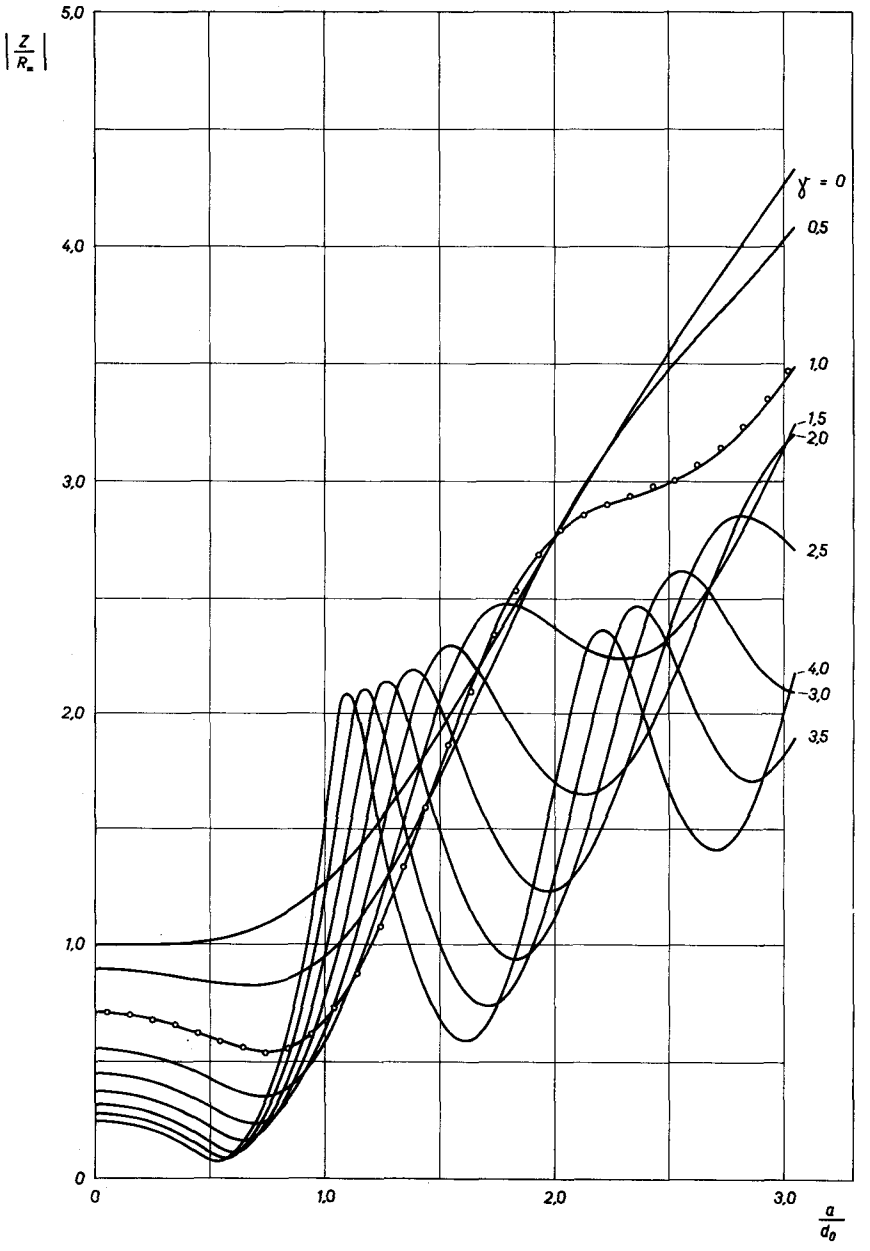
Figur 10 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabelle 2), Messpunkte (siehe Tabelle 12).



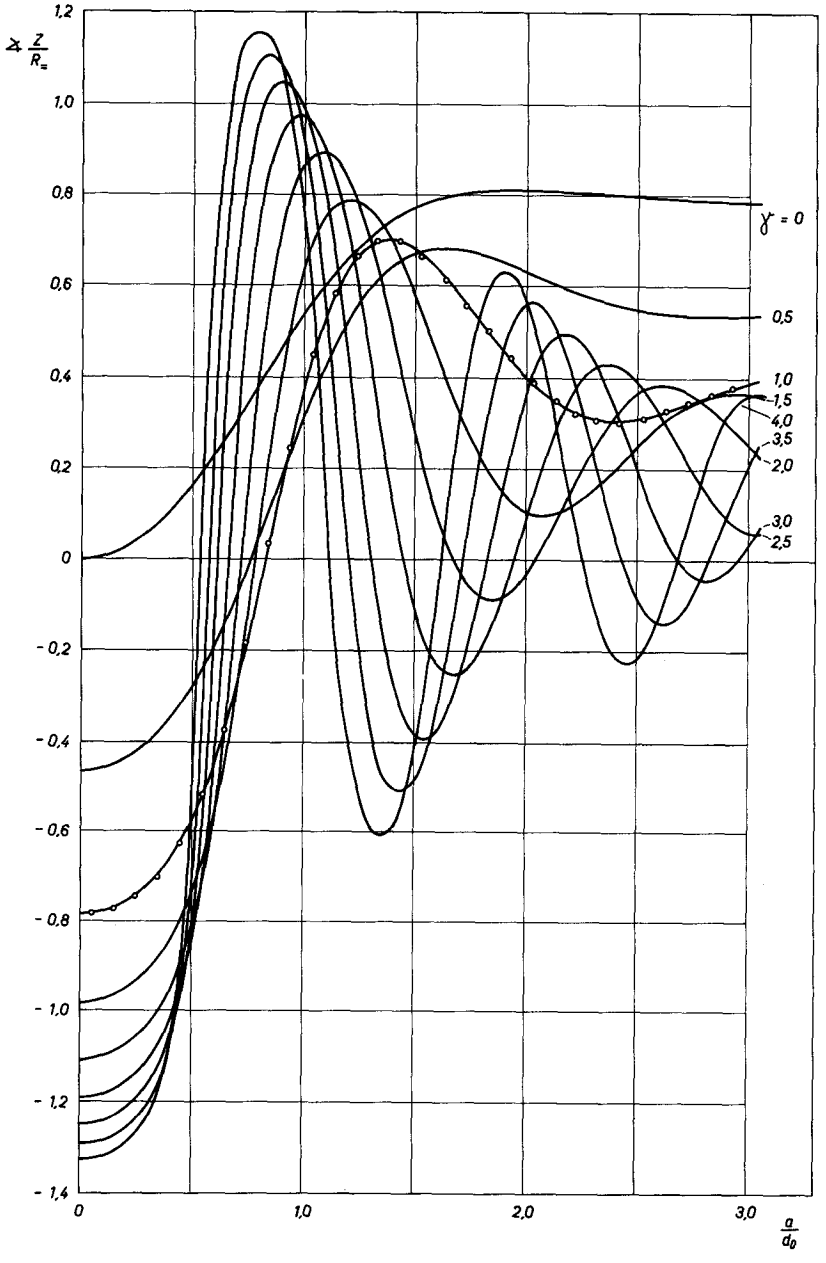
Figur 11 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabelle 3), Messpunkte (siehe Tabelle 13).



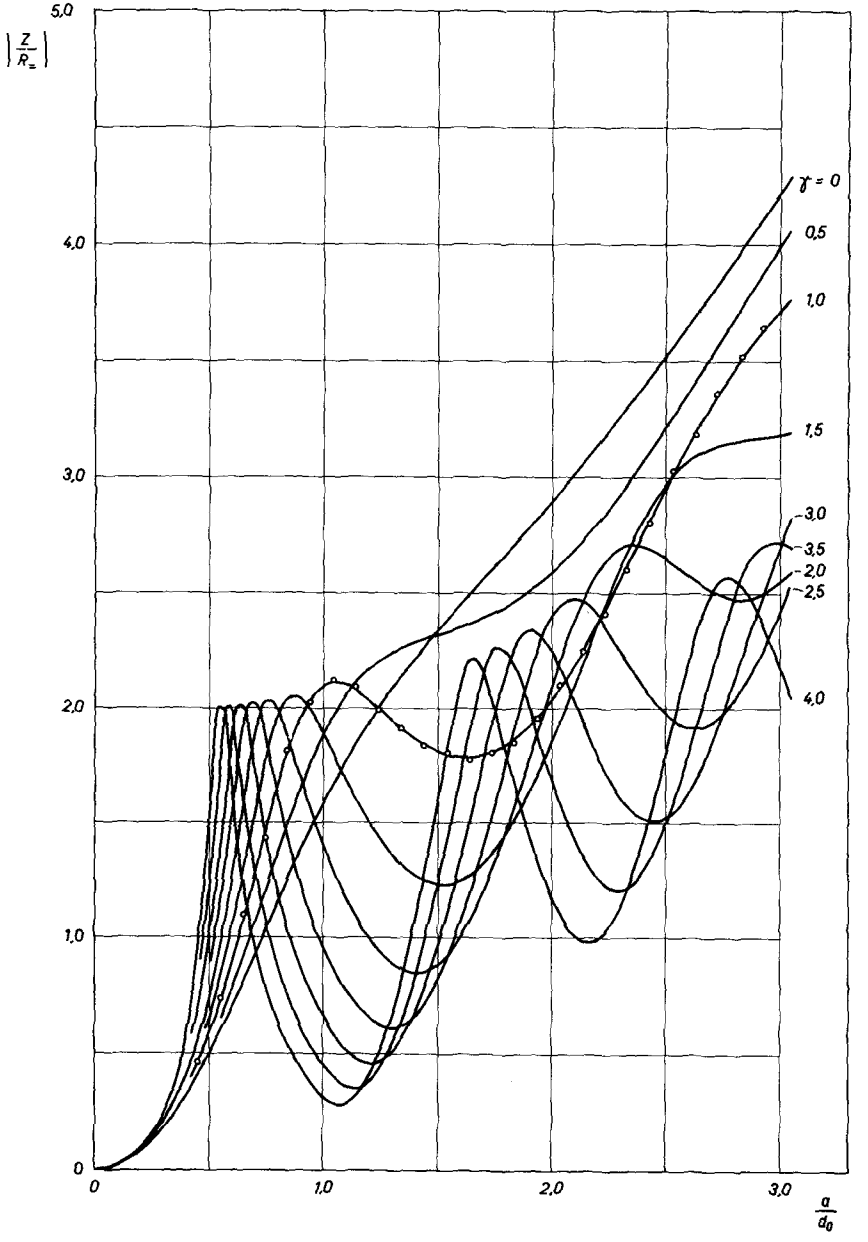
Figur 12 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabelle 4), Messpunkte (siehe Tabelle 14).



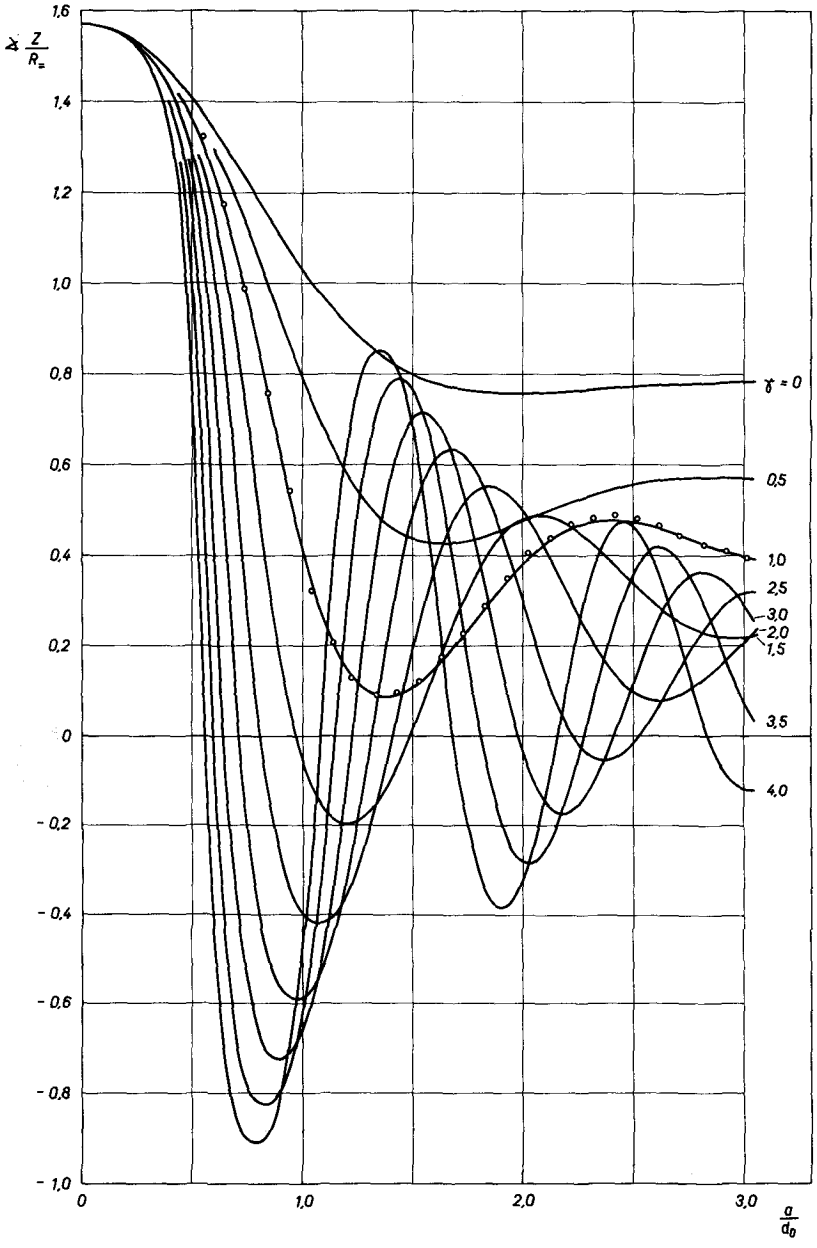
Figur 13 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabelle 5), Messpunkte (siehe Tabelle 15).



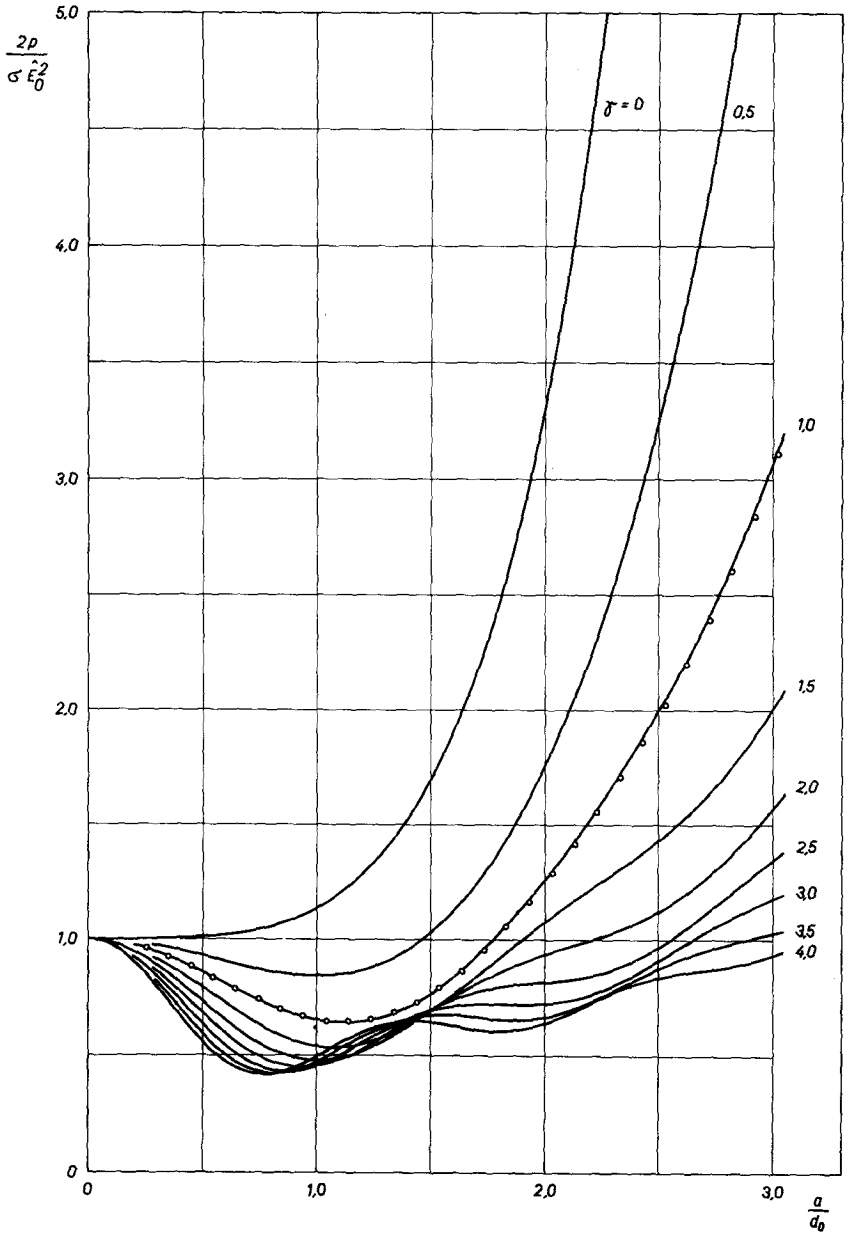
Figur 14 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabelle 6), Messpunkte (siehe Tabelle 15).



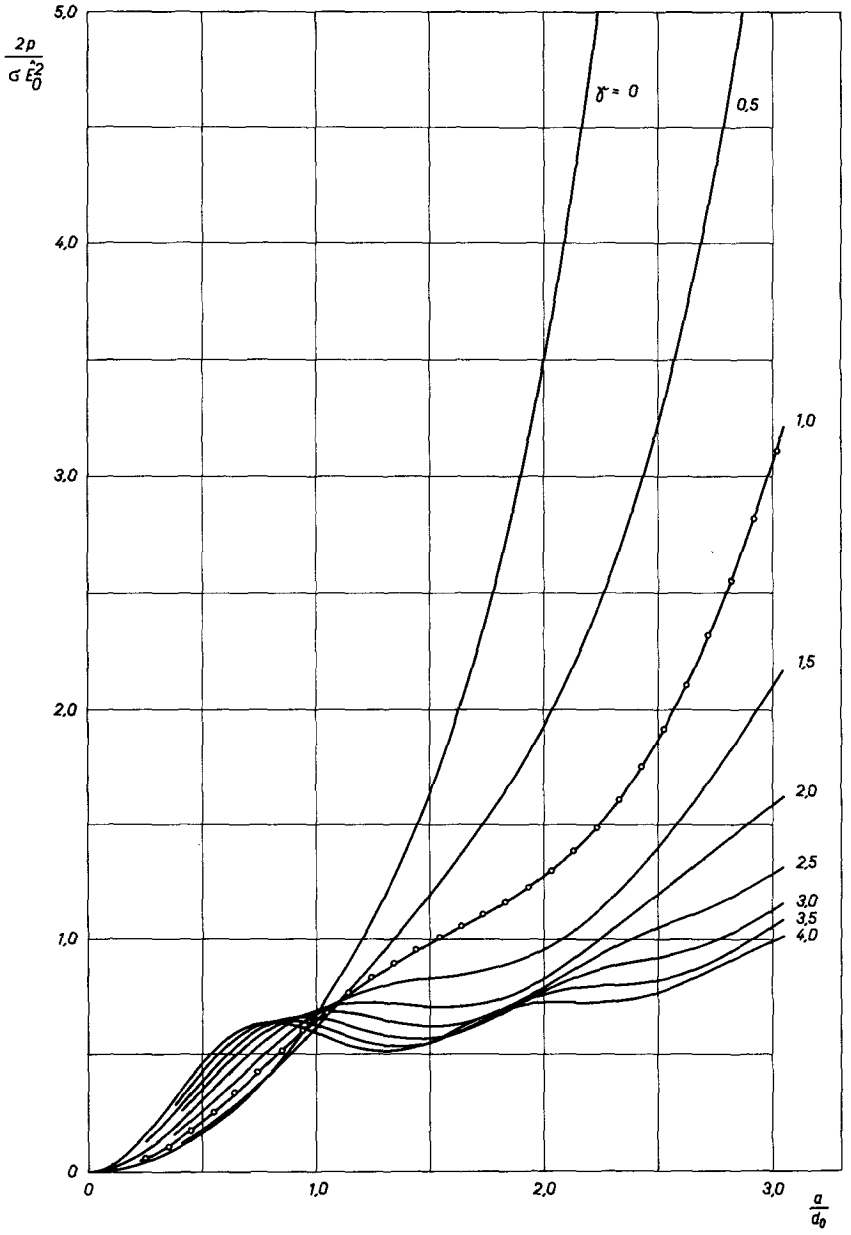
Figur 15 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabelle 7), Messpunkte (siehe Tabelle 15).



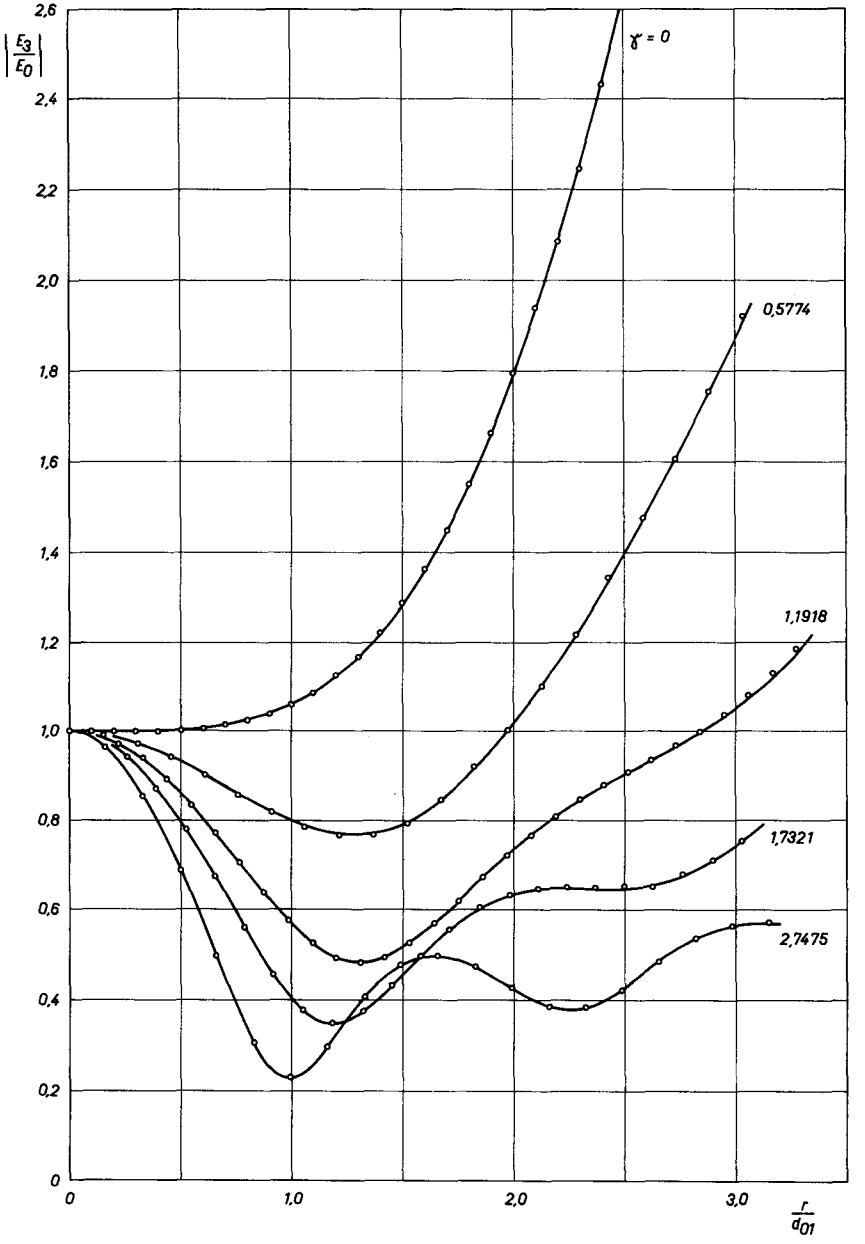
Figur 16 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabelle 8), Messpunkte (siehe Tabelle 15).



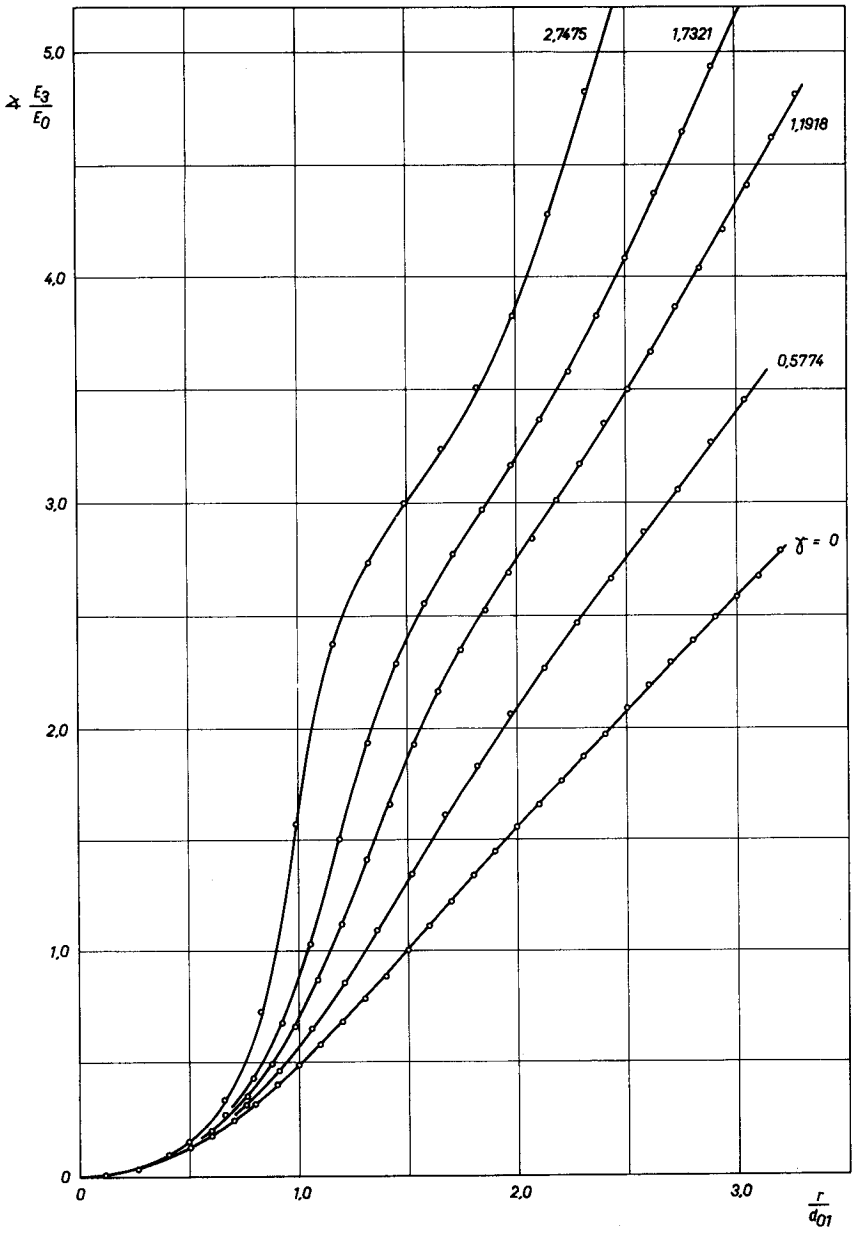
Figur 17 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabelle 9), Messpunkte (siehe Tabelle 15).



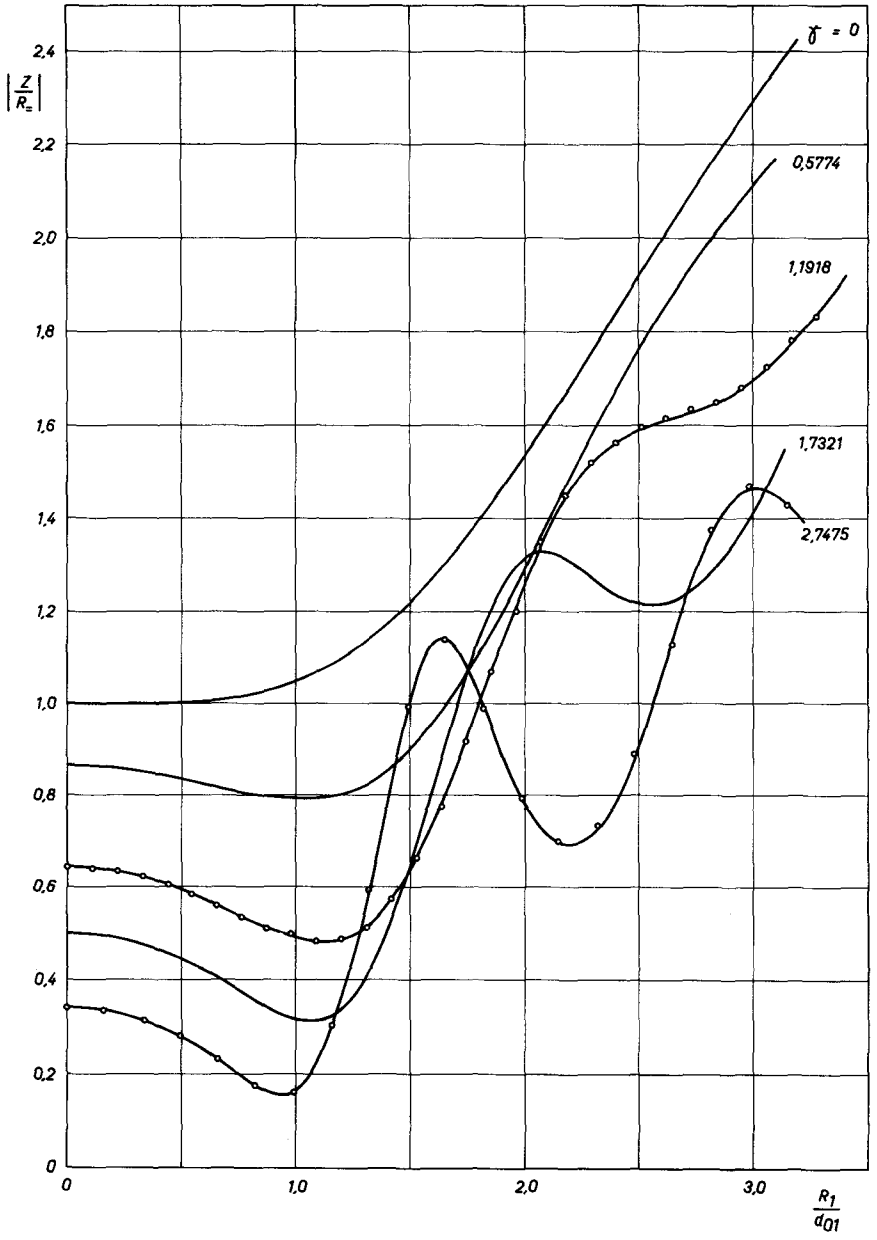
Figur 18 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabelle 10), Messpunkte (siehe Tabelle 15).



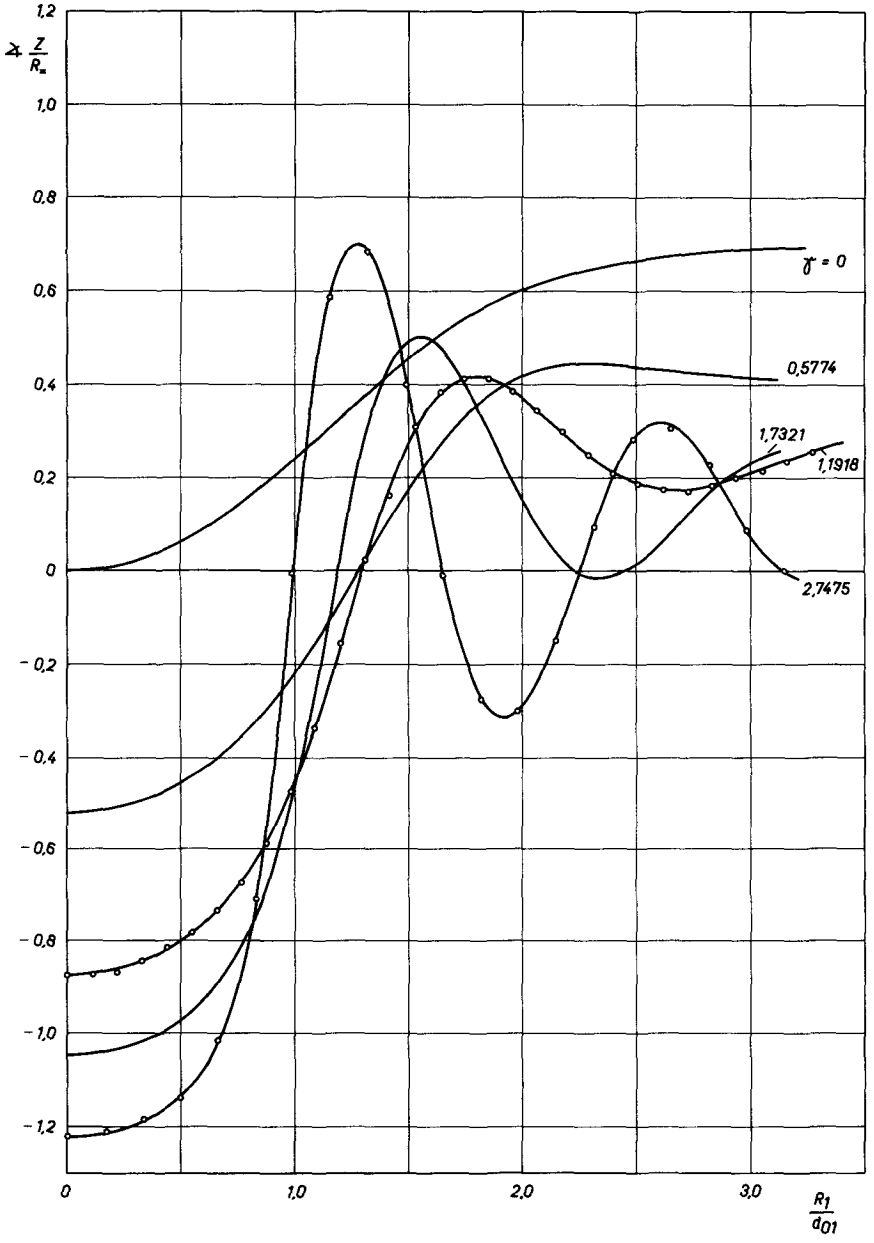
Figur 19 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabellen 16 bis 20), Messpunkte (siehe Tabelle 23).



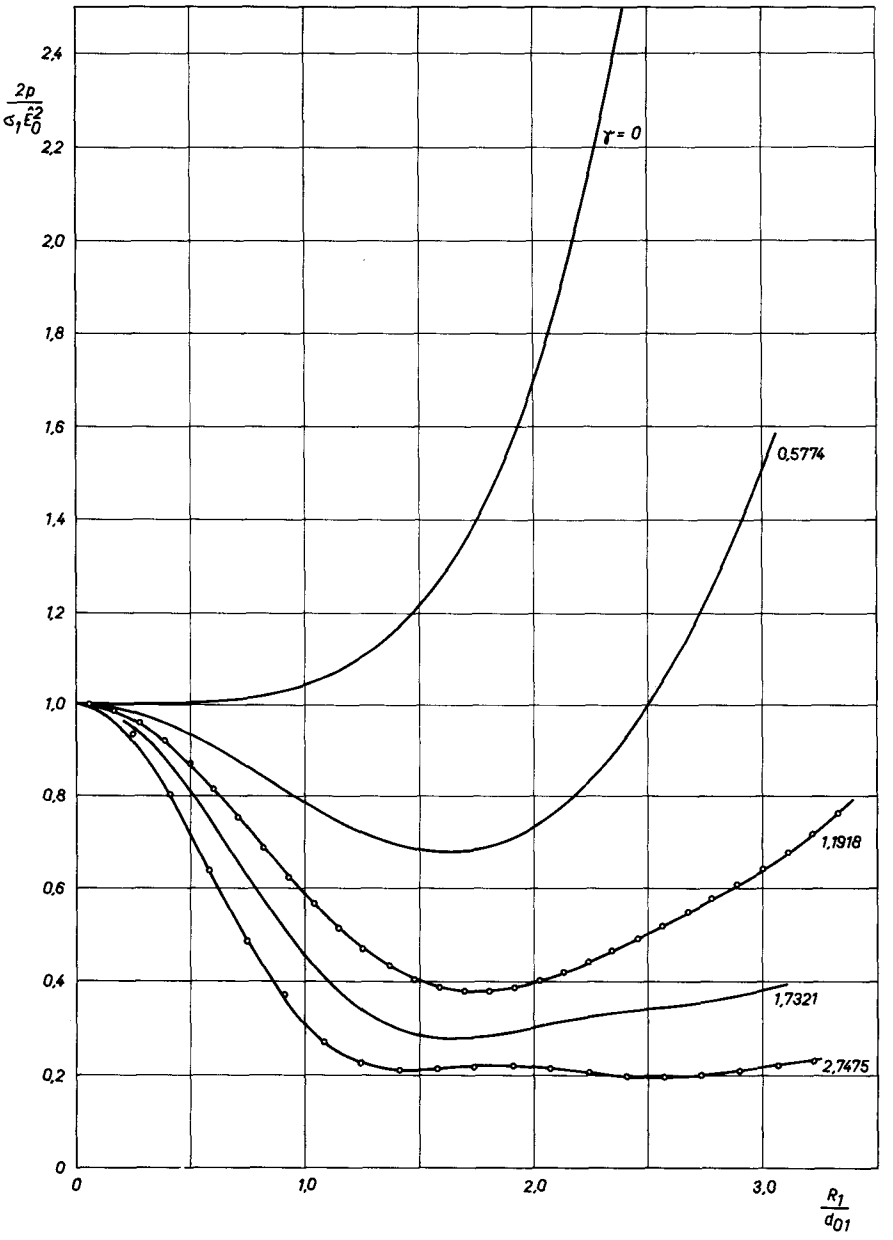
Figur 20 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabellen 16 bis 20), Messpunkte (siehe Tabelle 23).



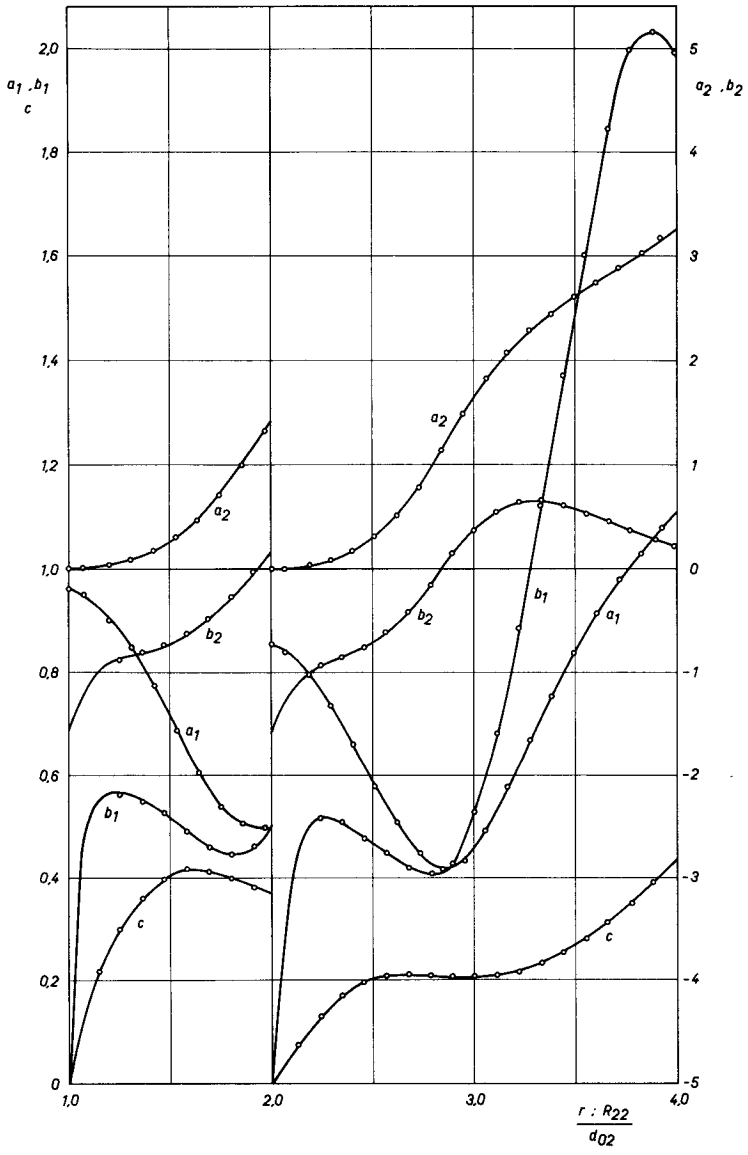
Figur 21 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabellen 16 bis 20), Messpunkte (siehe Tabelle 24).



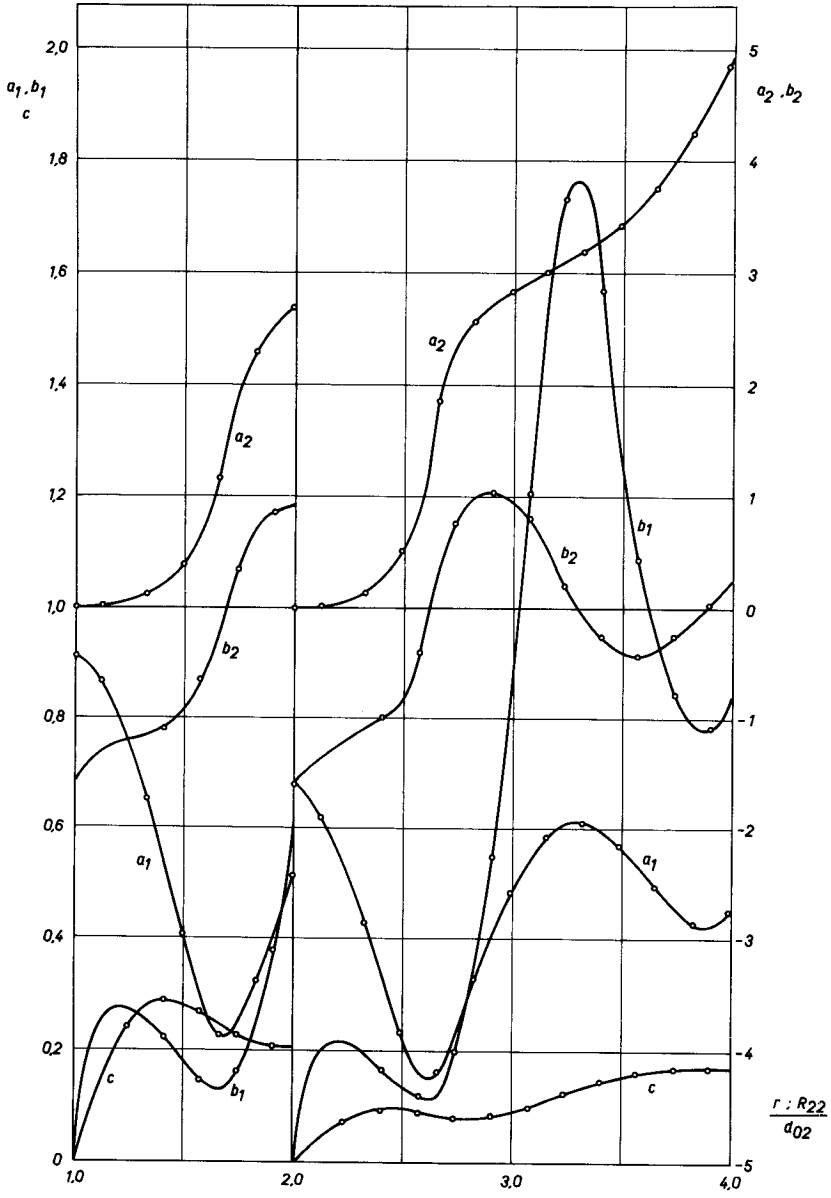
Figur 22 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabellen 16 bis 20), Messpunkte (siehe Tabelle 24).



Figur 23 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabellen 16 bis 20), Messpunkte (siehe Tabelle 24).



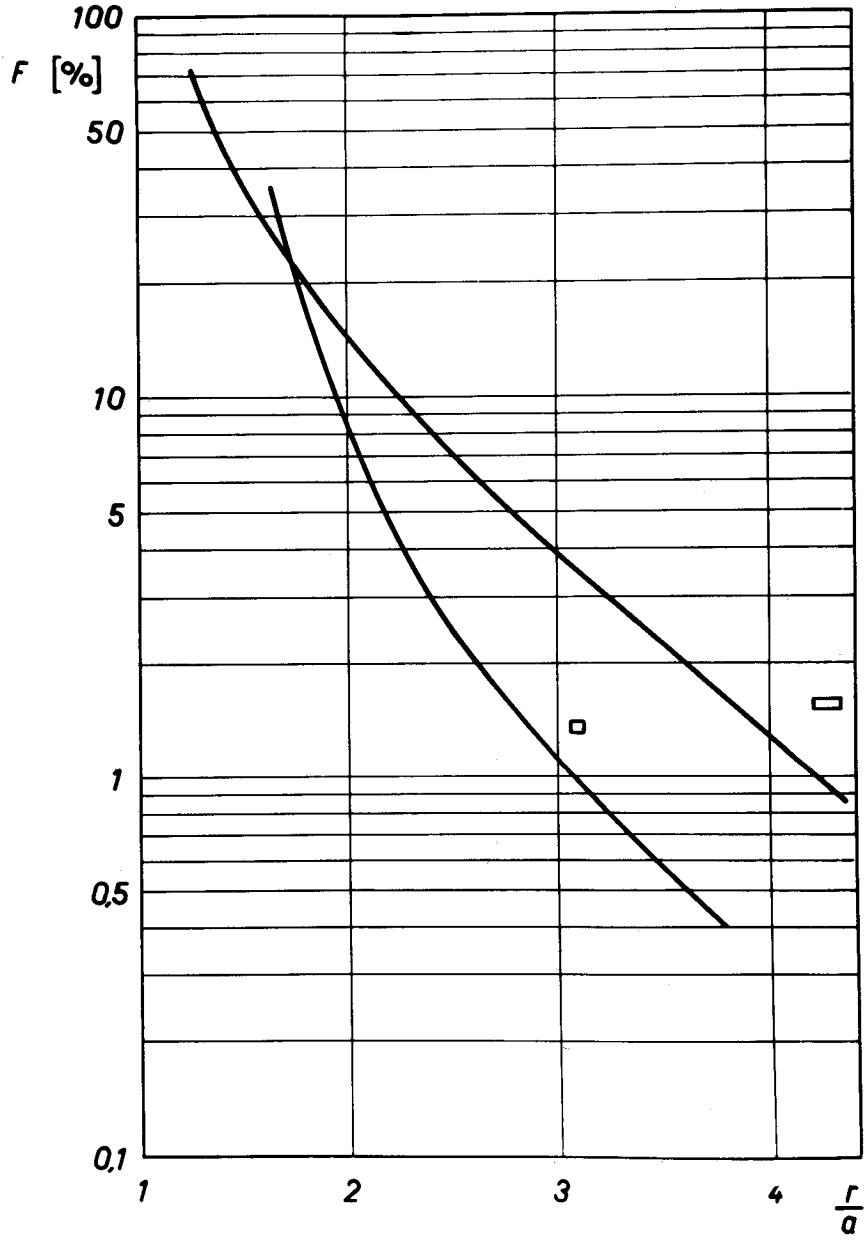
Figur 24 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabelle 21), Messpunkte (siehe Tabelle 25),
mit $a_1 = |E_3/E_0|$, $a_2 = \measuredangle E_3/E_0$, $b_1 = |Z/R_=|$, $b_2 = \measuredangle Z/R_=$,
$c = 2p/\sigma_2 \hat{E}_0^{\,2}$, $\gamma = 1,1918$



Figur 25 Ausgezogene Kurven = gerechnete Kurven (siehe Tabelle 22), Messpunkte (siehe Tabelle 25),

mit $a_1 = |E_3/E_0|$, $a_2 = \measuredangle E_3/E_0$, $b_1 = |Z/R_=|$, $b_2 = \measuredangle Z/R_=$,

$c = 2p/\sigma_2 \hat{E}_0^{\,2}$, $\gamma = 2,7475$



Figur 26 Maximaler Fehler F, längs eines Kreises vom Radius r für Rechtecke mit Seitenverhältnissen a/b = 1; 2 (vergl. Abschnitt 4.1.1).

Leer - Vide - Empty

Tabelle 1 (siehe Fig. 9)

$\frac{x}{d_0}$	$\lvert E_3 / E_0 \rvert = \lvert Ch\,(j\varkappa x) \rvert$ Glg. (2.1.1,3a) Parameter : γ								
	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
0,0	1,0000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,1	1,0000	0,99504	0,99005	0,98507	0,98010	0,97514	0,97018	0,96524	0,96030
0,2	1,0004	0,98061	0,96081	0,94115	0,92162	0,90222	0,88296	0,86382	0,84481
0,3	1,0026	0,95811	0,91420	0,87095	0,82837	0,78646	0,74519	0,70458	0,66461
0,4	1,0085	0,92999	0,85365	0,77946	0,70740	0,63747	0,56968	0,50406	0,44066
0,5	1,0207	0,89989	0,78466	0,67497	0,57099	0,47307	0,38194	0,29921	0,22844
0,6	1,0423	0,87274	0,71548	0,57146	0,44279	0,33439	0,25724	0,22875	0,25347
0,7	1,0773	0,85465	0,65795	0,49236	0,37017	0,31299	0,33051	0,39668	0,48064
0,8	1,1287	0,85239	0,62691	0,46928	0,40568	0,43665	0,51976	0,61702	0,71068
0,9	1,2000	0,87216	0,63575	0,51977	0,53002	0,61446	0,71866	0,81634	0,89775
1,0	1,2934	0,91813	0,68916	0,62782	0,68888	0,79253	0,89225	0,97057	1,02257
1,1	1,4108	0,99146	0,78087	0,76540	0,84983	0,94860	1,02467	1,06718	1,07538
1,2	1,5528	1,09057	0,89929	0,91179	0,99643	1,07104	1,10734	1,10063	1,05470
1,3	1,7203	1,21225	1,03338	1,05428	1,11939	1,15349	1,13708	1,07222	0,96826
1,4	1,9127	1,35283	1,17464	1,18499	1,21344	1,19375	1,11621	0,99114	0,83567
1,5	2,1315	1,50889	1,31698	1,29912	1,27638	1,19377	1,05338	0,87685	0,69485
1,6	2,3755	1,67767	1,45629	1,39411	1,30902	1,16017	0,96512	0,76331	0,61047
1,7	2,6491	1,85710	1,58992	1,46943	1,31525	1,10492	0,87776	0,70069	0,64618
1,8	2,9504	2,04581	1,71654	1,52646	1,30227	1,04587	0,82646	0,73223	0,78704
1,9	3,2845	2,24309	1,83595	1,56849	1,28062	1,00576	0,84235	0,85082	0,96543
2,0	3,6506	2,44884	1,94901	1,60065	1,26359	1,00668	0,92987	1,01082	1,12946
2,1	4,0531	2,66353	2,05756	1,62963	1,26534	1,06017	1,06484	1,16977	1,24994
2,2	4,4991	2,88816	2,16429	1,66307	1,29743	1,16102	1,21546	1,30023	1,31294
2,3	4,9818	3,12421	2,27258	1,70868	1,36521	1,29216	1,35626	1,38714	1,31652
2,4	5,5148	3,37360	2,38628	1,77296	1,46631	1,43398	1,47056	1,42534	1,27037
2,5	6,1031	3,63865	2,50935	1,86005	1,59247	1,56999	1,54953	1,41879	1,19648
2,6	6,7410	3,92198	2,64557	1,97117	1,73291	1,68861	1,59143	1,38054	1,12894
2,7	7,4600	4,22646	2,79820	2,10469	1,87720	1,78327	1,60122	1,33244	1,10686
2,8	8,2486	4,55514	2,96976	2,25691	2,01684	1,85227	1,59026	1,30223	1,15514
2,9	9,1136	4,91121	3,16187	2,42312	2,14597	1,89849	1,57524	1,31542	1,26712
3,0	10,0695	5,29790	3,37532	2,59844	2,26162	1,92902	1,57542	1,38336	1,41209

Tabelle 2 (siehe Fig. 10)

$\frac{x}{d_0}$	$\measuredangle E_3 / E_0 = \measuredangle Ch(j\varkappa x)$ Glg. (2.1.1,3a) Parameter : γ								
	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
0,0	0,0000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,0117	0,01003	0,01007	0,01010	0,01014	0,01017	0,01020	0,01024	0,01028
0,2	0,0399	0,04053	0,04109	0,04167	0,04227	0,04288	0,04352	0,04419	0,04488
0,3	0,0900	0,09266	0,09566	0,09890	0,10241	0,10624	0,11041	0,11498	0,12002
0,4	0,1593	0,16824	0,17849	0,19033	0,20417	0,22056	0,24026	0,26438	0,29459
0,5	0,2473	0,26944	0,29684	0,33159	0,37701	0,43865	0,52631	0,65830	0,86906
0,6	0,3522	0,39804	0,46031	0,54884	0,68209	0,89484	1,23956	1,71677	2,16500
0,7	0,4711	0,55409	0,67778	0,87307	1,19085	1,65225	2,12080	2,44942	2,65186
0,8	0,5999	0,73422	0,94823	1,29424	1,77297	2,22310	2,52624	2,71313	2,83306
0,9	0,7345	0,93054	1,24888	1,71149	2,18359	2,51664	2,72323	2,85522	2,94540
1,0	0,8704	1,13197	1,54079	2,03656	2,43664	2,69233	2,85376	2,96207	3,04073
1,1	1,0044	1,32770	1,79544	2,27193	2,60976	2,82248	2,96216	3,06179	3,13921
1,2	1,1344	1,51060	2,00737	2,45016	2,74261	2,93634	3,06802	3,16896	3,25486
1,3	1,2592	1,67811	2,18458	2,59660	2,86746	3,04841	3,18276	3,29605	3,40509
1,4	1,3782	1,83099	2,33768	2,72695	2,98538	3,16821	3,31692	3,45891	3,61846
1,5	1,4926	1,97171	2,47556	2,85090	3,10775	3,30394	3,48305	3,68134	3,94293
1,6	1,6024	2,10314	2,60481	2,97485	3,24067	3,46426	3,69756	3,99565	4,41965
1,7	1,7087	2,22798	2,73016	3,10339	3,38960	3,65878	3,97847	4,41637	4,95727
1,8	1,8124	2,34851	2,85501	3,24004	3,55964	3,89639	4,33046	4,87718	5,38345
1,9	1,9139	2,46454	2,98182	3,38756	3,75487	4,17935	4,71884	5,27046	5,68059
2,0	2,0139	2,58347	3,11236	3,54793	3,97676	4,49443	5,08124	5,56912	5,90331
2,1	2,1130	2,70034	3,24781	3,72204	4,22176	4,81260	5,38355	5,80232	6,09289
2,2	2,2118	2,81790	3,38883	3,90936	4,48024	5,10614	5,63119	6,00106	6,27479
2,3	2,3099	2,93663	3,53559	4,10764	4,73892	5,36421	5,84297	6,18716	6,46740
2,4	2,4082	3,05681	3,68779	4,31303	4,98627	5,59065	6,03616	6,37631	6,68747
2,5	2,5065	3,17857	3,84470	4,52085	5,21648	5,79497	6,22411	6,58144	6,95168
2,6	2,6049	3,30188	4,00524	4,72666	5,42942	5,98688	6,41723	6,81415	7,27190
2,7	2,7035	3,42662	4,16816	4,92725	5,62835	6,17470	6,62412	7,08343	7,64058
2,8	2,8025	3,55261	4,33217	5,12103	5,81777	6,36515	6,85157	7,39049	8,02081
2,9	2,9016	3,67960	4,49612	5,30791	6,00220	6,56362	7,10344	7,72229	8,37005
3,0	3,0009	3,80735	4,65912	5,48884	6,18561	6,77402	7,37823	8,05378	8,67224

Tabelle 3 (siehe Fig. 11)

$\frac{x}{d_0}$	$\lvert E_3 / E_0 \rvert = \lvert Sh\,(j\varkappa x) \rvert$ Glg. (2.1.1,3b) Parameter : γ								
	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
0,0	0,0000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,1417	0,14929	0,16762	0,18894	0,21007	0,23013	0,24898	0,26668	0,28335
0,2	0,2830	0,29709	0,33190	0,37223	0,41177	0,44881	0,48311	0,51482	0,54420
0,3	0,4244	0,44199	0,48963	0,54446	0,59715	0,64525	0,68851	0,72724	0,76192
0,4	0,5661	0,58266	0,63779	0,70065	0,75900	0,80987	0,85313	0,88942	0,91950
0,5	0,7081	0,71795	0,77374	0,83645	0,89126	0,93491	0,96766	0,99062	1,00498
0,6	0,8510	0,84694	0,89523	0,94840	0,98933	1,01492	1,02613	1,02480	1,01277
0,7	0,9952	0,96898	1,00062	1,03405	1,05041	1,04727	1,02667	0,99150	0,94450
0,8	1,1416	1,08373	1,08890	1,09225	1,07383	1,03254	0,97204	0,89665	0,81037
0,9	1,2912	1,19129	1,15988	1,12328	1,06137	0,97519	0,87071	0,75445	0,63261
1,0	1,4454	1,29216	1,21423	1,12917	1,01780	0,88455	0,73918	0,59281	0,45916
1,1	1,6060	1,38733	1,25367	1,11393	0,95162	0,77689	0,60757	0,46864	0,39566
1,2	1,7744	1,47831	1,28104	1,08395	0,87613	0,67876	0,52792	0,46884	0,51341
1,3	1,9533	1,56712	1,30034	1,04822	0,81042	0,62780	0,55457	0,60189	0,71291
1,4	2,1447	1,65626	1,31672	1,01824	0,77767	0,65557	0,67865	0,78661	0,90792
1,5	2,3522	1,74865	1,33622	1,00681	0,79691	0,75772	0,84496	0,96459	1,06029
1,6	2,5769	1,84752	1,36528	1,02515	0,87126	0,90171	1,01045	1,10649	1,15181
1,7	2,8258	1,95620	1,40991	1,07919	0,98718	1,05580	1,15048	1,19742	1,17579
1,8	3,0985	2,07800	1,47480	1,16769	1,12509	1,19842	1,25149	1,23176	1,13585
1,9	3,4026	2,21596	1,56257	1,28370	1,26770	1,31624	1,30748	1,21228	1,04713
2,0	3,7391	2,37275	1,67361	1,41783	1,40228	1,40206	1,31906	1,15072	0,93905
2,1	4,1131	2,55053	1,80634	1,56089	1,52042	1,45373	1,29349	1,06917	0,85716
2,2	4,5334	2,75097	1,95791	1,70520	1,61743	1,47390	1,24512	1,00026	0,85097
2,3	4,9927	2,97531	2,12494	1,84503	1,69200	1,46999	1,19522	0,98065	0,93684
2,4	5,5069	3,22442	2,30407	1,97668	1,74601	1,45395	1,16918	1,03205	1,08300
2,5	6,0797	3,49896	2,49235	2,09838	1,78431	1,44127	1,18867	1,14543	1,24285
2,6	6,7051	3,79951	2,68752	2,21025	1,81435	1,44832	1,26119	1,29072	1,38056
2,7	7,4172	4,12670	2,88808	2,31409	1,84543	1,48795	1,37672	1,43644	1,47485
2,8	8,2014	4,48129	3,09336	2,41324	1,88731	1,56517	1,51503	1,55929	1,51743
2,9	9,0651	4,86431	3,30355	2,51215	1,94848	1,67581	1,65504	1,64572	1,51191
3,0	10,0220	5,27709	3,51959	2,61595	2,03432	1,80910	1,78012	1,69159	1,47349

Tabelle 4 (siehe Fig. 12)

$\frac{x}{d_0}$	$\measuredangle E_3 / E_0 = \measuredangle Sh(j\varkappa x)$ Glg. (2.1.1,3b) Parameter : γ								
	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
0,0	0,7854	1,01723	1,17811	1,27680	1,33898	1,38055	1,40993	1,43166	1,44832
0,1	0,7856	1,02055	1,18143	1,28013	1,34231	1,38388	1,41326	1,43499	1,45165
0,2	0,7973	1,03059	1,19150	1,29023	1,35245	1,39405	1,42347	1,44523	1,46193
0,3	0,8148	1,04740	1,20846	1,30734	1,36971	1,41148	1,44105	1,46296	1,47985
0,4	0,8383	1,07112	1,23259	1,33190	1,39471	1,43694	1,46699	1,48942	1,50681
0,5	0,8685	1,10193	1,26429	1,36456	1,42838	1,47170	1,50291	1,52658	1,54531
0,6	0,9054	1,14005	1,30411	1,40624	1,47212	1,51771	1,55146	1,57797	1,59987
0,7	0,9483	1,18576	1,35275	1,45823	1,52797	1,57804	1,61704	1,64977	1,67914
0,8	0,9979	1,23935	1,41107	1,52223	1,59889	1,65750	1,70726	1,75381	1,80140
0,9	1,0538	1,30112	1,48013	1,60054	1,68923	1,76394	1,83595	1,91448	2,01029
1,0	1,1159	1,37136	1,56113	1,69616	1,80540	1,91035	2,02923	2,18489	2,41437
1,1	1,1841	1,45031	1,65545	1,81286	1,95650	2,11753	2,33326	2,65731	3,12399
1,2	1,2573	1,53809	1,76443	1,95509	2,15422	2,41255	2,79103	3,29473	3,76487
1,3	1,3360	1,63469	1,88926	2,12715	2,40912	2,80372	3,31813	3,79398	4,11822
1,4	1,4195	1,73986	2,03054	2,33130	2,71882	3,23029	3,73794	4,09919	4,33099
1,5	1,5067	1,85309	2,18786	2,56462	3,05442	3,59850	4,02513	4,30423	4,49055
1,6	1,5835	1,97358	2,35930	2,81646	3,37184	3,88060	4,23349	4,46694	4,63446
1,7	1,6919	2,10021	2,54130	3,07059	3,64472	4,09905	4,40363	4,61625	4,78367
1,8	1,7882	2,23167	2,72902	3,31202	3,87282	4,28057	4,55917	4,76970	4,95569
1,9	1,8865	2,36652	2,91732	3,53292	4,06777	4,44417	4,71507	4,94160	5,17096
2,0	1,9863	2,50334	3,10193	3,73271	4,24204	4,60267	4,88279	5,14697	5,45515
2,1	2,0871	2,64084	3,28014	3,91501	4,40566	4,76543	5,07286	5,40222	5,82786
2,2	2,1884	2,77801	3,45088	4,08479	4,56625	4,94001	5,29542	5,71911	6,26320
2,3	2,2901	2,91411	3,61242	4,24683	4,72966	5,13287	5,55792	6,08727	6,67883
2,4	2,3919	3,04869	3,77179	4,40524	4,90043	5,34889	5,85904	6,46369	7,01973
2,5	2,4936	3,18158	3,92444	4,56334	5,08203	5,58984	6,18235	6,80267	7,29230
2,6	2,5951	3,31279	4,07384	4,72374	5,27658	5,85213	6,50089	7,09004	7,52330
2,7	2,6966	3,44247	4,22136	4,88831	5,48453	6,12600	6,79360	7,33628	7,73632
2,8	2,7974	3,57085	4,36821	5,05825	5,70420	6,39849	7,05476	7,55809	7,94945
2,9	2,8984	3,69820	4,51533	5,23407	5,93179	6,65891	7,28981	7,77043	8,17757
3,0	2,9993	3,82480	4,66341	5,41552	6,16217	6,90244	7,50817	7,98559	8,43348

Tabelle 5 (siehe Fig. 13)

$\frac{a}{d_0}$	$\lvert Z / R_m \rvert$; Glg. (2.1.2,2a) ; Parameter : γ								
	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
0,0	1,0000	0,89543	0,70711	0,55470	0,44721	0,37139	0,31623	0,27472	0,24254
0,1	1,0000	0,89148	0,70240	0,54917	0,44123	0,36519	0,30989	0,26829	0,23604
0,2	1,0000	0,88293	0,68851	0,53263	0,42335	0,34650	0,29067	0,24875	0,21623
0,3	1,0023	0,86978	0,66611	0,50546	0,39358	0,31513	0,25822	0,21544	0,18225
0,4	1,0078	0,85391	0,63667	0,46870	0,35258	0,27136	0,21242	0,16804	0,13351
0,5	1,0193	0,83821	0,60299	0,42497	0,30295	0,21805	0,15695	0,11195	0,07916
0,6	1,0393	0,82693	0,57025	0,38080	0,25397	0,17037	0,11962	0,09927	0,10458
0,7	1,0716	0,82577	0,54737	0,35106	0,23330	0,18030	0,17921	0,20759	0,24809
0,8	1,1186	0,84157	0,54772	0,36203	0,28582	0,29157	0,34020	0,40806	0,48864
0,9	1,1829	0,88126	0,58664	0,43864	0,42505	0,48874	0,59075	0,72184	0,88953
1,0	1,2655	0,95033	0,67495	0,58562	0,64011	0,77219	0,95995	1,21359	1,55108
1,1	1,3666	1,05141	0,81478	0,79609	0,92903	1,15756	1,47536	1,85674	2,08230
1,2	1,4851	1,18400	1,00178	1,06318	1,29070	1,63192	2,00172	2,08812	1,71689
1,3	1,6191	1,34500	1,22857	1,37716	1,69820	2,05858	2,11978	1,71660	1,22971
1,4	1,7657	1,52943	1,48522	1,71607	2,06595	2,19711	1,83120	1,30756	0,89746
1,5	1,9223	1,73115	1,75812	2,03862	2,27215	2,03672	1,48715	1,01073	0,68463
1,6	2,0859	1,94323	2,02955	2,29177	2,27348	1,77421	1,21535	0,81815	0,59061
1,7	2,2538	2,15852	2,27975	2,43804	2,14205	1,53328	1,03146	0,73738	0,65069
1,8	2,4239	2,37017	2,49143	2,47840	1,97040	1,35385	0,94532	0,79313	0,86866
1,9	2,5937	2,57231	2,65479	2,44518	1,81521	1,25124	0,97347	0,98843	1,22005
2,0	2,7615	2,76075	2,76978	2,37818	1,70441	1,23761	1,12125	1,30224	1,67539
2,1	2,9265	2,93313	2,84463	2,30927	1,65285	1,31991	1,37484	1,70307	2,13278
2,2	3,0877	3,08916	2,89200	2,25997	1,66900	1,49356	1,70791	2,11977	2,36403
2,3	3,2456	3,23013	2,92521	2,24351	1,75508	1,74245	2,07556	2,41152	2,25111
2,4	3,3990	3,35844	2,95592	2,26735	1,90615	2,04003	2,40061	2,45690	1,96069
2,5	3,5491	3,47718	2,99326	2,33412	2,11014	2,34704	2,59172	2,29532	1,67621
2,6	3,6966	3,58952	3,04366	2,44230	2,34854	2,61255	2,60913	2,06135	1,48080
2,7	3,8404	3,69847	3,11093	2,58651	2,59745	2,78882	2,49736	1,85645	1,41127
2,8	3,9826	3,80666	3,19671	2,75813	2,82978	2,85579	2,33729	1,73332	1,48452
2,9	4,1232	3,91608	3,30082	2,94626	3,02062	2,83146	2,19507	1,71818	1,69274
3,0	4,2627	4,02825	3,42138	3,13870	3,15422	2,75691	2,11147	1,81854	2,00234

Tabelle 6 (siehe Fig. 14)

$\frac{a}{d_0}$	$\measuredangle$ Z / R ; Glg. (2.1.2,2a) ; Parameter : γ								
	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
0,0	0,0000	-0,46366	-0,78542	-0,98280	-1,10716	-1,19030	-1,24906	-1,29252	-1,32584
0,1	0,0067	-0,45695	-0,77868	-0,97603	-1,10036	-1,18346	-1,24219	-1,28561	-1,31889
0,2	0,0267	-0,43649	-0,75773	-0,95456	-1,07836	-1,16092	-1,21908	-1,26190	-1,29457
0,3	0,0599	-0,40117	-0,72012	-0,91444	-1,03548	-1,11499	-1,16977	-1,20886	-1,23735
0,4	0,1060	-0,34931	-0,66142	-0,84757	-0,95873	-1,02613	-1,06586	-1,08589	-1,08974
0,5	0,1640	-0,27892	-0,57477	-0,73897	-0,81956	-0,84280	-0,81573	-0,72914	-0,55377
0,6	0,2322	-0,18845	-0,45112	-0,56340	-0,55821	-0,43262	-0,15103	0,27794	0,68761
0,7	0,3079	-0,07871	-0,28229	-0,29115	-0,10530	0,26446	0,66463	0,93879	1,09520
0,8	0,3871	0,04843	-0,07016	0,06602	0,40590	0,75585	0,97985	1,09846	1,15414
0,9	0,4658	0,18299	0,16144	0,40495	0,72617	0,94295	1,04815	1,07988	1,05759
1,0	0,5398	0,31417	0,37235	0,63440	0,86306	0,97223	0,98520	0,91632	0,74889
1,1	0,6060	0,43096	0,53268	0,75307	0,88507	0,89520	0,78977	0,54362	0,13770
1,2	0,6625	0,52608	0,63562	0,78907	0,82380	0,71404	0,43786	0,01337	-0,38753
1,3	0,7086	0,59699	0,68802	0,76345	0,69015	0,43494	0,02550	-0,35879	-0,59065
1,4	0,7445	0,64470	0,69983	0,68964	0,49837	0,12818	-0,26005	-0,50114	-0,59005
1,5	0,7713	0,67219	0,68039	0,58028	0,28516	-0,10431	-0,38121	-0,48375	-0,42514
1,6	0,7902	0,68314	0,63819	0,45237	0,10065	-0,22609	-0,37506	-0,33215	-0,09233
1,7	0,8025	0,68134	0,58154	0,32680	-0,02329	-0,25002	-0,26429	-0,06074	0,29608
1,8	0,8096	0,67041	0,51868	0,22202	-0,08136	-0,19393	-0,06784	0,24662	0,55024
1,9	0,8128	0,65359	0,45719	0,14865	-0,08108	-0,07456	0,16464	0,46800	0,63211
2,0	0,8131	0,63371	0,40312	0,10922	-0,03346	0,08201	0,35932	0,56129	0,57064
2,1	0,8116	0,61307	0,36035	0,10103	0,04792	0,23742	0,47156	0,53924	0,38751
2,2	0,8088	0,59346	0,33063	0,11858	0,14582	0,35638	0,49664	0,42109	0,13407
2,3	0,8054	0,57609	0,31386	0,15482	0,24108	0,42159	0,44592	0,23903	-0,08895
2,4	0,8018	0,56169	0,30868	0,20180	0,31765	0,43201	0,33799	0,05176	-0,20978
2,5	0,7983	0,55055	0,31294	0,25151	0,36628	0,39538	0,20263	-0,08209	-0,21814
2,6	0,7952	0,54266	0,32409	0,29693	0,38466	0,32500	0,07721	-0,13675	-0,12892
2,7	0,7924	0,53772	0,33948	0,33294	0,37563	0,23895	-0,00861	-0,11371	0,02674
2,8	0,7901	0,53533	0,35664	0,35678	0,34539	0,15691	-0,04232	-0,02846	0,19384
2,9	0,7882	0,53497	0,37343	0,36786	0,30223	0,09496	-0,02550	0,09100	0,31496
3,0	0,7868	0,53612	0,38839	0,36732	0,25526	0,06183	0,03093	0,20733	0,36124

Tabelle 7 (siehe Fig. 15)

$\frac{a}{d_0}$	$\lvert Z / R_= \rvert$; Glg. (2.1.2,2b) ; Parameter : γ								
	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,02000	0,02007	0,02013	0,02020	0,02027	0,02034	0,02041	0,02048	0,02055
0,2	0,07996	0,08104	0,08216	0,08332	0,08451	0,08575	0,08702	0,08835	0,08973
0,3	0,17955	0,18510	0,19108	0,19753	0,20453	0,21213	0,22043	0,22952	0,23953
0,4	0,31748	0,33518	0,35540	0,37871	0,40589	0,43797	0,47639	0,52318	0,58132
0,5	0,49057	0,53353	0,58633	0,65263	0,73810	0,85161	1,00743	1,22703	1,53203
0,6	0,69273	0,77877	0,89278	1,04881	1,26784	1,56952	1,90342	1,99249	1,66969
0,7	0,91458	1,06147	1,26598	1,54848	1,87857	2,01863	1,72926	1,29691	0,95805
0,8	1,14426	1,36039	1,65248	1,96119	2,00272	1,63041	1,18983	0,86173	0,63534
0,9	1,36951	1,64418	1,95265	2,04863	1,70448	1,23102	0,86717	0,61655	0,44170
1,0	1,58034	1,88234	2,09525	1,89437	1,39731	0,96191	0,65883	0,45273	0,31273
1,1	1,77081	2,05866	2,10019	1,68620	1,16492	0,77642	0,51870	0,35806	0,28187
1,2	1,93940	2,17560	2,03283	1,50259	0,99787	0,65542	0,45497	0,37890	0,40683
1,3	2,08800	2,24770	1,94533	1,36140	0,89010	0,60979	0,50350	0,54093	0,66664
1,4	2,22046	2,29246	1,86627	1,26709	0,84855	0,66262	0,67693	0,82359	1,05936
1,5	2,34126	2,32500	1,80986	1,22443	0,88571	0,82056	0,95686	1,22311	1,59414
1,6	2,45470	2,35661	1,78382	1,23923	1,00714	1,07175	1,33220	1,71918	2,10252
1,7	2,56446	2,39504	1,79276	1,31505	1,20672	1,40001	1,77203	2,15341	2,15439
1,8	2,67344	2,44533	1,83910	1,45030	1,47073	1,77758	2,16765	2,24447	1,80924
1,9	2,78379	2,51047	1,92304	1,63787	1,77877	2,14301	2,34536	2,00669	1,43527
2,0	2,89695	2,59183	2,04233	1,86596	2,09907	2,40067	2,25624	1,68766	1,15810
2,1	3,01383	2,68954	2,19241	2,11859	2,38642	2,48174	2,02866	1,42274	1,00298
2,2	3,13483	2,80269	2,36678	2,37591	2,59379	2,40701	1,79228	1,25450	0,99310
2,3	3,26003	2,92960	2,55747	2,61585	2,69588	2,25502	1,61193	1,20527	1,13990
2,4	3,38922	3,06801	2,75576	2,81834	2,70274	2,09722	1,51748	1,28811	1,42499
2,5	3,52204	3,21533	2,95288	2,97059	2,64918	1,97795	1,52516	1,49606	1,80864
2,6	3,65799	3,36886	3,14096	3,07067	2,57449	1,92193	1,63863	1,80184	2,21440
2,7	3,79654	3,52595	3,31398	3,12680	2,51028	1,94161	1,84619	2,15756	2,50565
2,8	3,93715	3,68422	3,46836	3,15345	2,47801	2,03913	2,12142	2,48516	2,56172
2,9	4,07928	3,84165	3,60320	3,16674	2,49024	2,20617	2,42309	2,68934	2,40994
3,0	4,22249	3,99668	3,72011	3,18113	2,55207	2,42482	2,69580	2,71918	2,18026

Tabelle 8 (siehe Fig. 16)

$\frac{a}{d_0}$	$\measuredangle$ Z / R ; Glg. (2.1.2,2b) ; Parameter : γ								
	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
0,0	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080	1,57080
0,1	1,56412	1,56409	1,56406	1,56403	1,56400	1,56396	1,56393	1,56389	1,56385
0,2	1,54414	1,54363	1,54311	1,54256	1,54200	1,54142	1,54082	1,54018	1,53953
0,3	1,51092	1,50831	1,50550	1,50244	1,49912	1,49549	1,49151	1,48714	1,48231
0,4	1,46483	1,45645	1,44680	1,43557	1,42237	1,40663	1,38760	1,36417	1,33470
0,5	1,40679	1,38606	1,36015	1,32697	1,28320	1,22330	1,13747	1,00742	0,79873
0,6	1,33856	1,29559	1,23650	1,15140	1,02185	0,81312	0,47277	0,00034	-0,44265
0,7	1,26293	1,18525	1,06767	0,87915	0,56894	0,11604	-0,34289	-0,66051	-0,85024
0,8	1,18368	1,05871	0,85554	0,52198	0,05774	-0,37535	-0,65811	-0,82018	-0,90918
0,9	1,10504	0,92415	0,62394	0,18305	-0,26253	-0,56245	-0,72641	-0,80160	-0,81263
1,0	1,03104	0,79297	0,41303	-0,04640	-0,39942	-0,59173	-0,66346	-0,63804	-0,50393
1,1	0,96484	0,67618	0,25270	-0,16507	-0,42143	-0,51470	-0,46803	-0,26534	0,10726
1,2	0,90834	0,58106	0,14976	-0,20107	-0,36016	-0,33354	-0,11612	0,26491	0,63249
1,3	0,86224	0,51015	0,09736	-0,17545	-0,22651	-0,05444	0,29624	0,63707	0,83561
1,4	0,82626	0,46244	0,08555	-0,10164	-0,03473	0,25233	0,58179	0,77942	0,83501
1,5	0,79948	0,43495	0,10499	0,00772	0,17848	0,48481	0,70295	0,76203	0,67010
1,6	0,78063	0,42400	0,14719	0,13563	0,36299	0,60659	0,69680	0,61043	0,33729
1,7	0,76832	0,42580	0,20384	0,26120	0,48693	0,63052	0,58603	0,33902	-0,05112
1,8	0,76120	0,43673	0,26670	0,36598	0,54500	0,57443	0,38958	0,03166	-0,30528
1,9	0,75801	0,45355	0,32819	0,43935	0,54472	0,45507	0,15710	-0,18972	-0,38715
2,0	0,75767	0,47343	0,38226	0,47878	0,49710	0,29849	-0,03758	-0,28301	-0,32568
2,1	0,75925	0,49407	0,42503	0,48697	0,41572	0,14308	-0,14982	-0,26096	-0,14255
2,2	0,76203	0,51368	0,45475	0,46942	0,31782	0,02412	-0,17490	-0,14281	0,11089
2,3	0,76542	0,53105	0,47152	0,43318	0,22256	-0,04109	-0,12418	0,03925	0,33391
2,4	0,76900	0,54545	0,47670	0,38620	0,14599	-0,05151	-0,01625	0,22652	0,45474
2,5	0,77247	0,55659	0,47244	0,33649	0,09736	-0,01488	0,11911	0,36037	0,46310
2,6	0,77565	0,56448	0,46129	0,29107	0,07898	0,05550	0,24453	0,41503	0,37388
2,7	0,77841	0,56942	0,44590	0,25506	0,08801	0,14155	0,33035	0,39199	0,21822
2,8	0,78072	0,57181	0,42874	0,23122	0,11825	0,22359	0,36406	0,30674	0,05112
2,9	0,78258	0,57217	0,41186	0,22014	0,16141	0,28554	0,34724	0,18728	-0,07000
3,0	0,78401	0,57102	0,39699	0,22068	0,20838	0,31867	0,29081	0,07095	-0,11628

Tabelle 9 (siehe Fig. 17)

$\frac{a}{d_0}$	$2p/6\,\hat{E}_0^2$; Glg. (2.1.3,3a) ; Parameter : γ								
	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
0,0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,1	1,00002	0,99669	0,99337	0,99007	0,98679	0,98351	0,98025	0,97700	0,97377
0,2	1,00022	0,98699	0,97397	0,96116	0,94856	0,93616	0,92396	0,91196	0,90016
0,3	1,00108	0,97160	0,94317	0,91578	0,88938	0,86395	0,83947	0,81591	0,79326
0,4	1,00342	0,95168	0,90322	0,85787	0,81548	0,77593	0,73909	0,70482	0,67299
0,5	1,00834	0,92878	0,85699	0,79242	0,73456	0,68290	0,63699	0,59641	0,56074
0,6	1,01730	0,90478	0,80789	0,72505	0,65481	0,59584	0,54689	0,50686	0,47471
0,7	1,03205	0,88184	0,75958	0,66147	0,58409	0,52444	0,47980	0,44780	0,42633
0,8	1,05473	0,86233	0,71578	0,60698	0,52899	0,47584	0,44243	0,42446	0,41830
0,9	1,08779	0,84874	0,68002	0,56609	0,49418	0,45377	0,43640	0,43522	0,44483
1,0	1,13404	0,84360	0,65545	0,54210	0,48197	0,45832	0,45836	0,47251	0,49377
1,1	1,19673	0,84944	0,64467	0,53689	0,49225	0,48612	0,50101	0,52495	0,55012
1,2	1,27952	0,86868	0,64962	0,55089	0,52265	0,53122	0,55478	0,58009	0,59987
1,3	1,38658	0,90363	0,67146	0,58308	0,56899	0,58616	0,60975	0,62708	0,63323
1,4	1,52266	0,95644	0,71063	0,63127	0,62601	0,64328	0,65750	0,65891	0,64656
1,5	1,69317	1,02907	0,76686	0,69236	0,68805	0,69590	0,69257	0,67342	0,64244
1,6	1,90430	1,12338	0,83927	0,76275	0,74989	0,73934	0,71314	0,67323	0,62831
1,7	2,16321	1,24103	0,92655	0,83877	0,80736	0,77147	0,72101	0,66461	0,61378
1,8	2,47818	1,38366	1,02710	0,91708	0,85784	0,79281	0,72088	0,65554	0,60783
1,9	2,85889	1,55288	1,13927	0,99503	0,90050	0,80620	0,71903	0,65361	0,61634
2,0	3,31663	1,75042	1,26152	1,07092	0,93627	0,81610	0,72191	0,66422	0,64077
2,1	3,86477	1,97821	1,39266	1,14414	0,96757	0,82767	0,73473	0,68946	0,67822
2,2	4,51905	2,23850	1,53195	1,21524	0,99789	0,84581	0,76049	0,72786	0,72263
2,3	5,29818	2,53403	1,67930	1,28579	1,03124	0,87434	0,79957	0,77521	0,76691
2,4	6,22447	2,86815	1,83535	1,35824	1,07153	0,91538	0,84986	0,82579	0,80504
2,5	7,32442	3,24498	2,00148	1,43563	1,12208	0,96919	0,90747	0,87403	0,83382
2,6	8,62975	3,66960	2,17982	1,52131	1,18522	1,03428	0,96780	0,91597	0,85356
2,7	10,17849	4,14819	2,37326	1,61858	1,26207	1,10789	1,02661	0,95017	0,86781
2,8	12,01607	4,68823	2,58530	1,73048	1,35254	1,18662	1,08101	0,97796	0,88201
2,9	14,19650	5,29863	2,82000	1,85955	1,45548	1,26720	1,13007	1,00292	0,90186
3,0	16,78613	5,99006	3,08186	2,00769	1,56907	1,34717	1,17491	1,02979	0,93157

Tabelle 10 (siehe Fig. 18)

$\frac{a}{d_0}$	$2p / 6 \hat{E}_0^2$; Glg. (2.1.3,3b) ; Parameter : γ								
	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,00667	0,00744	0,00939	0,01194	0,01479	0,01777	0,02083	0,02393	0,02705
0,2	0,02667	0,02958	0,03712	0,04694	0,05775	0,06899	0,08037	0,09178	0,10313
0,3	0,06001	0,06589	0,08186	0,10249	0,12485	0,14765	0,17030	0,19251	0,21415
0,4	0,10672	0,11555	0,14156	0,17475	0,20989	0,24473	0,27831	0,31019	0,34019
0,5	0,16687	0,17746	0,21349	0,25881	0,30526	0,34951	0,39027	0,42709	0,45991
0,6	0,24060	0,25030	0,29453	0,34921	0,40281	0,45103	0,49251	0,52709	0,55510
0,7	0,32816	0,33264	0,38133	0,44042	0,49482	0,53967	0,57406	0,59859	0,61437
0,8	0,43000	0,42303	0,47057	0,52730	0,57481	0,60838	0,62826	0,63637	0,63505
0,9	0,54676	0,52005	0,55916	0,60561	0,63827	0,65351	0,65356	0,64215	0,62299
1,0	0,67939	0,62245	0,64450	0,67234	0,68301	0,67511	0,65340	0,62351	0,59035
1,1	0,82923	0,72921	0,72459	0,72588	0,70935	0,67664	0,63513	0,59191	0,55219
1,2	0,99808	0,83965	0,79825	0,76620	0,71989	0,66419	0,60845	0,55990	0,52258
1,3	1,18831	0,95349	0,86509	0,79470	0,71902	0,64538	0,58338	0,53835	0,51135
1,4	1,40302	1,07094	0,92560	0,81405	0,71228	0,62806	0,56844	0,53440	0,52225
1,5	1,64613	1,19272	0,98111	0,82785	0,70562	0,61907	0,56925	0,55031	0,55271
1,6	1,92254	1,32015	1,03365	0,84027	0,70459	0,62330	0,58776	0,58353	0,59544
1,7	2,23837	1,45511	1,08587	0,85560	0,71371	0,64313	0,62231	0,62794	0,64087
1,8	2,60111	1,60010	1,14084	0,87789	0,73600	0,67828	0,66840	0,67566	0,68012
1,9	3,01990	1,75824	1,20191	0,91057	0,77271	0,72617	0,71991	0,71922	0,70742
2,0	3,50584	1,93325	1,27247	0,95620	0,82341	0,78264	0,77062	0,75340	0,72140
2,1	4,07229	2,12945	1,35534	1,01632	0,88617	0,84286	0,81550	0,77627	0,72511
2,2	4,73533	2,35172	1,45507	1,09145	0,95808	0,90226	0,85180	0,78942	0,72470
2,3	5,51420	2,60557	1,57289	1,18115	1,03576	0,95744	0,87941	0,79728	0,72743
2,4	6,43200	2,89707	1,71164	1,28426	1,11596	1,00665	0,90071	0,80577	0,73943
2,5	7,51620	3,23290	1,87323	1,39914	1,19611	1,05010	0,91986	0,82065	0,76410
2,6	8,79965	3,62042	2,05919	1,52400	1,27467	1,08974	0,94181	0,84610	0,80124
2,7	10,32160	4,06771	2,27081	1,65722	1,35141	1,12888	0,97113	0,88380	0,84753
2,8	12,12880	4,58368	2,50920	1,79763	1,42739	1,17148	1,01106	0,93269	0,89767
2,9	14,27695	5,17817	2,77547	1,94477	1,50477	1,22140	1,06296	0,98948	0,94620
3,0	16,83270	5,86225	3,07092	2,09902	1,58653	1,28179	1,12612	1,04968	0,98912

Tabelle 11 (siehe Fig. 9)

n	$\lvert V_n - V_R / kE_0 \rvert = \lvert E_3 / E_0 \rvert$ Glg. (2.1.1,3a) ; Parameter : γ							
	0	0	0,5	1	2	2	3	4
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1	1,000	1,000	0,998	0,990	0,960	0,991	0,978	0,960
2	1,000	1,000	0,990	0,961	0,848	0,961	0,912	0,847
3	1,001	1,003	0,979	0,915	0,679	0,913	0,808	0,670
4	1,002	1,009	0,965	0,858	0,491	0,850	0,671	0,448
5	1,005	1,021	0,946	0,789	0,373	0,770	0,512	0,235
6	1,011	1,042	0,925	0,723	0,455	0,685	0,356	0,244
7	1,021	1,077	0,904	0,663	0,655	0,588	0,257	0,470
8	1,035	1,128	0,885	0,631	0,889	0,495	0,315	0,696
9	1,055	1,200	0,867	0,633	1,076	0,412	0,470	0,880
10	1,082	1,292	0,854	0,682	1,212	0,372	0,641	1,018
11	1,118	1,411	0,850	0,768	1,287	0,385	0,803	1,075
12	1,163	1,554	0,859	0,882	1,315	0,455	0,940	1,060
13	1,219	1,721	0,874	1,012	1,293	0,549	1,038	0,983
14	1,285	1,915	0,906	1,149	1,270	0,656	1,107	0,858
15	1,364	2,136	0,953	1,289	1,265	0,774	1,134	0,710
16	1,456	2,381	1,012	1,426	1,323	0,885	1,122	0,617
17	1,560	2,650	1,076	1,557	1,444	0,985	1,086	0,625
18	1,672	2,954	1,160	1,683	1,629	1,074	1,012	0,760
19	1,804	3,287	1,255	1,803	1,825	1,150	0,939	0,930
20	1,945	3,658	1,351	1,915	2,016	1,215	0,867	1,102
21	2,100	4,065	1,455	2,023	2,189	1,265	0,827	1,236
22	2,269	4,520	1,581	2,129	2,343	1,295	0,836	1,303
23	2,452	4,999	1,702	2,235	2,475	1,309	0,897	1,321
24	2,648	5,540	1,826	2,346		1,311	1,007	1,284
25	2,858	6,130	1,948	2,466		1,308	1,127	1,220
26	3,088	6,779	2,089	2,598		1,296	1,258	1,141
27	3,331	7,493	2,226	2,745		1,281	1,373	1,102
28	3,590	8,292	2,371	2,909		1,267	1,471	1,129
29	3,866	9,157	2,517	3,092		1,261	1,538	1,226
30	4,162	10,107	2,670	3,299		1,264	1,583	1,359
31	4,476		2,821	3,522		1,282	1,601	
32	4,810		2,981	3,768		1,317	1,601	
33	5,174		3,150	4,033		1,370	1,586	
34	5,561		3,325	4,318		1,437	1,579	
35	5,970		3,505	4,619		1,523	1,576	
36	6,415		3,696	4,940		1,616	1,611	
37	6,890		3,897	5,279		1,715	1,671	
38	7,397		4,103	5,636		1,814	1,751	
39	7,940		4,331	6,066		1,915	1,850	
40	8,522		4,563	6,511		2,012	1,970	
41	9,151		4,821			2,103		
42	9,820		5,072			2,186		
43	10,586		5,348			2,265		
44	11,335		5,656			2,342		
45	12,153		5,962			2,407		
δ	$0,1/\sqrt{2}$	0,100	0,700	0,990	1,400	0,700	0,857	0,990

Tabelle 12 (siehe Fig. 10)

n	$\measuredangle V_n - V_R / kE_0 = \measuredangle E_3 / E_0$ Glg. (2.1.1,3a) ; Parameter : γ							
	0	0	0,5	1	2	2	3	4
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,005	0,010	0,005	0,010	0,020	0,005	0,007	0,010
2	0,020	0,040	0,020	0,041	0,086	0,020	0,030	0,044
3	0,045	0,090	0,044	0,095	0,230	0,045	0,076	0,115
4	0,080	0,159	0,081	0,176	0,537	0,086	0,154	0,278
5	0,125	0,247	0,126	0,292	1,204	0,147	0,299	0,837
6	0,179	0,353	0,185	0,454	1,966	0,229	0,596	2,132
7	0,242	0,472	0,258	0,668	2,401	0,352	1,243	2,641
8	0,314	0,600	0,341	0,924	2,643	0,537	2,034	2,819
9	0,394	0,735	0,442	1,221	2,823	0,843	2,445	2,945
10	0,480	0,870	0,555	1,513	2,990	1,192	2,649	3,030
11	0,570	1,005	0,675	1,769	3,169	1,622	2,786	3,128
12	0,664	1,136	0,805	1,983	3,374	1,963	2,886	3,243
13	0,760	1,258	0,952	2,160	3,608	2,222	2,979	3,388
14	0,856	1,380	1,091	2,314	3,906	2,398	3,073	3,600
15	0,949	1,494	1,231	2,453	4,238	2,530	3,171	3,890
16	1,043	1,604	1,369	2,582	4,614	2,638	3,282	4,350
17	1,133	1,710	1,495	2,705	4,958	2,734	3,409	4,890
18	1,222	1,813	1,614	2,829	5,285	2,820	3,583	5,323
19	1,307	1,914	1,725	2,954	5,571	2,897	3,772	5,622
20	1,390	2,015	1,832	3,083	5,838	2,980	4,048	5,876
21	1,471	2,114	1,930	3,216	6,081	3,069	4,351	6,065
22	1,549	2,212	2,021	3,355	6,341	3,166	4,693	6,240
23	1,625	2,310	2,113	3,499	6,613	3,261	4,994	6,431
24	1,702	2,410	2,203	3,648		3,358	5,284	6,635
25	1,774	2,503	2,291	3,803		3,480	5,513	6,885
26	1,847	2,606	2,375	3,965		3,590	5,713	7,195
27	1,918	2,704	2,459	4,122		3,739	5,889	7,538
28	1,988	2,805	2,541	4,284		3,889	6,055	7,922
29	2,059	2,904	2,624	4,446		4,050	6,218	8,285
30	2,128	3,002	2,709	4,608		4,226	6,384	8,590
31	2,198		2,790	4,768		4,404	6,550	
32	2,266		2,871	4,926		4,586	6,747	
33	2,336		2,945	5,083		4,759	6,938	
34	2,405		3,030	5,239		4,942	7,182	
35	2,474		3,122	5,392		5,109	7,415	
36	2,543		3,196	5,545		5,268	7,669	
37	2,613		3,280	5,697		5,407	7,908	
38	2,682		3,371	5,849		5,546	8,161	
39	2,752		3,457	5,999		5,691	8,393	
40	2,821		3,546	6,147		5,827	8,612	
41	2,892		3,635			5,952		
42	2,961		3,724			6,083		
43	3,032		3,820			6,209		
44	3,103		3,905			6,343		
45	3,173		3,991			6,471		
δ	$0{,}1/\sqrt{2}$	0,100	0,700	0,990	1,400	0,700	0,857	0,990

Tabelle 13 (siehe Fig. 11)

n	$\lvert V_n - V_R / kE_0 \rvert = \lvert E_3 / E_0 \rvert$ Glg. (2.1.1,3b) ; Parameter : γ						
	0	0,5	1	2	2	3	4
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,100	0,105	0,165	0,287	0,144	0,209	0,281
2	0,200	0,209	0,328	0,565	0,287	0,416	0,541
3	0,300	0,311	0,484	0,784	0,434	0,604	0,760
4	0,400	0,414	0,635	0,960	0,565	0,767	0,915
5	0,500	0,512	0,771	1,052	0,680	0,889	1,000
6	0,601	0,610	0,891	1,073	0,783	0,981	1,017
7	0,701	0,702	0,998	1,027	0,876	1,023	0,955
8	0,801	0,794	1,086	0,937	0,952	1,030	0,823
9	0,904	0,882	1,159	0,831	1,011	0,994	0,645
10	1,007	0,970	1,213	0,776	1,048	0,915	0,475
11	1,110	1,052	1,252	0,826	1,071	0,820	0,393
12	1,217	1,132	1,279	0,966	1,072	0,709	0,490
13	1,323	1,208	1,297	1,156	1,058	0,597	0,787
14	1,434	1,276	1,322	1,352	1,030	0,529	0,882
15	1,546	1,344	1,330	1,521	0,990	0,543	1,046
16	1,660	1,405	1,361	1,647	0,941	0,638	1,144
17	1,780	1,471	1,396	1,732	0,888	0,774	1,178
18	1,906	1,533	1,457	1,786	0,832	0,920	1,150
19	2,038	1,595	1,541	1,830	0,796	1,054	1,068
20	2,177	1,662	1,648	1,884	0,780	1,167	0,962
21	2,324	1,722	1,775	1,976	0,784	1,253	0,872
22	2,481	1,791	1,921	2,127	0,823	1,299	0,847
23	2,647	1,862	2,079	2,317	0,880	1,318	0,900
24	2,827	1,947	2,258		0,961	1,307	1,049
25	3,018	2,017	2,437		1,054	1,273	1,211
26	3,231	2,108	2,623		1,152	1,230	1,354
27	3,451	2,202	2,819		1,251	1,190	1,457
28	3,688	2,305	3,019		1,347	1,172	1,513
29	3,944	2,422	3,224		1,438	1,185	1,517
30	4,222	2,556	3,436		1,517	1,232	1,486
31	4,520	2,695	3,653		1,587	1,324	
32	4,840	2,845	3,879		1,646	1,434	
33	5,188	3,006	4,116		1,694	1,557	
34	5,562	3,178	4,367		1,733	1,675	
35	5,966	3,362	4,637		1,763	1,783	
36	6,402	3,557	4,925		1,788		
37	6,870	3,779	5,236		1,808		
38	7,372	4,005	5,573		1,830		
39	7,915	4,232	5,988		1,853		
40	8,493	4,485	6,428		1,883		
41	9,124	4,752			1,923		
42	9,797	5,023			1,974		
43	10,540	5,334			2,038		
44	11,310	5,648			2,122		
45	12,135	5,971			2,215		
δ	$0,1/\sqrt{2}$	0,700	0,990	1,400	0,700	0,857	0,990

Tabelle 14 (siehe Fig. 12)

n	$\measuredangle V_n - V_R / kE_0 = \measuredangle E_3 / E_0$ Glg. (2.1.1,3b) ; Parameter : γ						
	0	0,5	1	2	2	3	4
0	0,785	1,017	1,178	1,339	1,339	1,410	1,432
1	0,787	1,019	1,181	1,347	1,342	1,411	1,452
2	0,792	1,023	1,192	1,366	1,347	1,420	1,461
3	0,801	1,033	1,209	1,402	1,353	1,431	1,480
4	0,812	1,043	1,232	1,452	1,366	1,450	1,507
5	0,827	1,058	1,261	1,530	1,381	1,475	1,542
6	0,844	1,077	1,299	1,634	1,400	1,508	1,594
7	0,867	1,100	1,348	1,784	1,422	1,552	1,671
8	0,892	1,127	1,406	1,993	1,451	1,605	1,791
9	0,920	1,155	1,475	2,304	1,485	1,670	1,990
10	0,951	1,189	1,554	2,728	1,528	1,772	2,350
11	0,985	1,226	1,646	3,197	1,573	1,908	3,052
12	1,023	1,267	1,754	3,606	1,634	2,096	3,707
13	1,064	1,312	1,877	3,921	1,702	2,386	4,082
14	1,108	1,367	2,025	4,180	1,782	2,595	4,300
15	1,155	1,411	2,170	4,409	1,879	3,247	4,470
16	1,204	1,470	2,336	4,641	1,989	3,639	4,610
17	1,256	1,528	2,516	4,875	2,131	3,922	4,772
18	1,311	1,593	2,701	5,127	2,301	4,133	4,935
19	1,369	1,660	2,887	5,408	2,502	4,292	5,140
20	1,428	1,736	3,070	5,721	2,722	4,437	5,401
21	1,490	1,816	3,247	6,045	2,961	4,578	5,762
22	1,553	1,903	3,417	6,359	3,198	4,704	6,183
23	1,618	1,992	3,578	6,658	3,407	4,847	6,595
24	1,685	2,080	3,735		3,600	5,008	6,938
25	1,753	2,166	3,886		3,767	5,178	7,227
26	1,823	2,265	4,033		3,919	5,392	7,464
27	1,892	2,361	4,179		4,050	5,620	7,688
28	1,962	2,459	4,324		4,169	5,883	7,898
29	2,033	2,557	4,476		4,288	6,144	8,110
30	2,104	2,651	4,613		4,399	6,422	8,365
31	2,175	2,742	4,760		4,517	6,683	
32	2,246	2,839	4,909		4,638	6,924	
33	2,317	2,932	5,066		4,753	7,142	
34	2,389	3,030	5,222		4,872	7,346	
35	2,461	3,122	5,375		4,992	7,539	
36	2,533	3,217	5,530		5,119		
37	2,604	3,303	5,682		5,251		
38	2,676	3,397	5,840		5,397		
39	2,747	3,489	5,994		5,556		
40	2,818	3,580	6,151		5,711		
41	2,889	3,663			5,869		
42	2,960	3,754			6,030		
43	3,033	3,835			6,185		
44	3,103	3,928			6,341		
45	3,173	4,017			6,495		
δ	$0,1/\sqrt{2}$	0,700	0,990	1,400	0,700	0,857	0,990

Tabelle 15

N	Parameter : $\gamma = 1$ $\delta = 0{,}990$					
	$\left\lvert \frac{Z_N}{(R_N)_=} \right\rvert$	$\measuredangle \frac{Z_N}{(R_N)_=}$	$\frac{2p}{\sigma \hat{E}_0^2}$	$\left\lvert \frac{Z_N}{(R_N)_=} \right\rvert$	$\measuredangle \frac{Z_N}{(R_N)_=}$	$\frac{2p}{\sigma \hat{E}_0^2}$
0	0,705	-0,788	1,000	0,005	1,565	0,000
1	0,701	-0,775	0,987	0,045	1,547	0,018
2	0,677	-0,748	0,961	0,126	1,522	0,054
3	0,656	-0,702	0,926	0,261	1,492	0,106
4	0,618	-0,628	0,884	0,461	1,431	0,172
5	0,586	-0,522	0,837	0,731	1,322	0,249
6	0,559	-0,374	0,788	1,059	1,168	0,333
7	0,536	-0,182	0,742	1,430	0,985	0,421
8	0,556	0,038	0,701	1,808	0,754	0,510
9	0,616	0,246	0,670	2,025	0,542	0,598
10	0,725	0,449	0,650	2,120	0,319	0,681
11	0,877	0,584	0,645	2,089	0,208	0,758
12	1,076	0,665	0,656	1,990	0,125	0,828
13	1,311	0,698	0,683	1,907	0,090	0,892
14	1,593	0,698	0,727	1,836	0,093	0,951
15	1,859	0,665	0,787	1,805	0,120	1,003
16	2,095	0,616	0,863	1,775	0,168	1,055
17	2,342	0,558	0,952	1,698	0,225	1,106
18	2,532	0,504	1,054	1,845	0,287	1,161
19	2,688	0,443	1,166	1,953	0,348	1,223
20	2,795	0,389	1,288	2,101	0,405	1,296
21	2,861	0,350	1,417	2,252	0,439	1,382
22	2,903	0,319	1,557	2,409	0,470	1,485
23	2,938	0,307	1,703	2,600	0,481	1,606
24	2,981	0,302	1,858	2,802	0,489	1,748
25	3,005	0,314	2,024	3,024	0,480	1,913
26	3,069	0,333	2,202	3,186	0,463	2,100
27	3,145	0,347	2,396	3,361	0,442	2,313
28	3,234	0,361	2,609	3,520	0,426	2,551
29	3,350	0,379	2,845	3,644	0,410	2,817
30	3,475	0,396	3,108	3,748	0,395	3,112
Glg.	(2.2.2,3) (2.1.2,2a)		(2.2.3,2) (2.1.3,3a)	(2.2.2,3) (2.1.2,2b)		(2.2.3,2) (2.1.3,3b)
Fig.	13	14	17	15	16	18

Tabelle 16

r/d_{01} bzw. R_1/d_{01}	Parameter : $\gamma = 0$				
	$\left\lvert\frac{E_3}{E_0}\right\rvert$	$\measuredangle \frac{E_3}{E_0}$	$\left\lvert\frac{Z}{\bar{R}_=}\right\rvert$	$\measuredangle \frac{Z}{\bar{R}_=}$	$\frac{2p}{\sigma_1 \hat{E}_0^2}$
0,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	1,0000
0,1061	1,0000	0,0056	1,0000	0,0028	1,0000
0,2121	1,0001	0,0225	1,0001	0,0113	1,0001
0,3182	1,0006	0,0506	1,0006	0,0253	1,0004
0,4243	1,0020	0,0899	1,0017	0,0449	1,0013
0,5303	1,0049	0,1403	1,0041	0,0700	1,0033
0,6364	1,0102	0,2016	1,0085	0,1004	1,0068
0,7425	1,0189	0,2733	1,0156	0,1357	1,0128
0,8485	1,0320	0,3545	1,0265	0,1748	1,0217
0,9546	1,0508	0,4457	1,0418	0,2185	1,0347
1,0607	1,0767	0,5443	1,0627	0,2643	1,0530
1,1667	1,1108	0,6495	1,0899	0,3115	1,0777
1,2728	1,1544	0,7600	1,1239	0,3586	1,1103
1,3789	1,2085	0,8741	1,1651	0,4046	1,1523
1,4849	1,2741	0,9904	1,2135	0,4480	1,2056
1,5910	1,3520	1,1077	1,2689	0,4880	1,2723
1,6971	1,4429	1,2250	1,3307	0,5241	1,3545
1,8031	1,5475	1,3417	1,3981	0,5557	1,4551
1,9092	1,6665	1,4573	1,4704	0,5899	1,5695
2,0153	1,8004	1,5712	1,5464	0,6054	1,7236
2,1213	1,9502	1,6846	1,6252	0,6249	1,8977
2,2274	2,1167	1,7962	1,7060	0,6404	2,1057
2,3335	2,3009	1,9067	1,7878	0,6530	2,3520
2,4395	2,5042	2,0162	1,8700	0,6630	2,6429
2,5456	2,7280	2,1249	1,9521	0,6711	2,9854
2,6517	2,9740	2,2329	2,0336	0,6775	3,3882
2,7577	3,2443	2,3404	2,1144	0,6827	3,8623
2,8638	3,5412	2,4476	2,1943	0,6870	4,4183
2,9699	3,8670	2,5545	2,2733	0,6907	5,0704
3,0759	4,2249	2,6612	2,3514	0,6938	5,8363
3,1820	4,6179	2,7679	2,4286	0,6966	6,7346
Glg.	(3.1.1,4a)		(3.1.2,3a)		(3.1.3,2a)
Fig.	19	20	21	22	23

Tabelle 17

r/d_{01} bzw. R_1/d_{01}	Parameter : $\gamma = 0{,}5774$				
	$\left\lvert \frac{E_3}{E_0} \right\rvert$	$\measuredangle \frac{E_3}{E_0}$	$\left\lvert \frac{Z}{R_=} \right\rvert$	$\measuredangle \frac{Z}{R_=}$	$\frac{2p}{\sigma_1 \hat{E}_0^2}$
0,0000	1,0000	0,0000	0,8661	-0,5235	1,0000
0,0987	0,9972	0,0049	0,8649	-0,5211	0,9971
0,1974	0,9889	0,0196	0,8613	-0,5136	0,9889
0,2961	0,9753	0,0444	0,8554	-0,5011	0,9753
0,3948	0,9571	0,0797	0,8476	-0,4831	0,9569
0,4936	0,9347	0,1260	0,8381	-0,4591	0,9345
0,5923	0,9092	0,1842	0,8276	-0,4285	0,9085
0,6910	0,8817	0,2548	0,8167	-0,3908	0,8802
0,7897	0,8536	0,3388	0,8065	-0,3452	0,8502
0,8884	0,8265	0,4369	0,7981	-0,2913	0,8198
0,9871	0,8021	0,5494	0,7509	-0,2290	0,7898
1,0858	0,7824	0,6759	0,7937	-0,1587	0,7615
1,1845	0,7693	0,8155	0,8016	-0,0819	0,7358
1,2832	0,7645	0,9658	0,8189	-0,0008	0,7138
1,3819	0,7694	1,1236	0,8474	0,0810	0,6963
1,4807	0,7847	1,2854	0,8884	0,1599	0,6842
1,5794	0,8104	1,4473	0,9424	0,2320	0,6783
1,6781	0,8460	1,6065	1,0088	0,2946	0,6791
1,7768	0,8907	1,7611	1,0863	0,3459	0,6871
1,8755	0,9431	1,9102	1,1729	0,3854	0,7028
1,9742	1,0022	2,0538	1,2660	0,4138	0,7264
2,0729	1,0668	2,1923	1,3627	0,4322	0,7583
2,1716	1,1361	2,3267	1,4604	0,4423	0,7988
2,2703	1,2094	2,4580	1,5563	0,4460	0,8479
2,3690	1,2862	2,5869	1,6486	0,4450	0,9058
2,4678	1,3664	2,7143	1,7357	0,4412	0,9727
2,5665	1,4500	2,8409	1,8170	0,4358	1,0490
2,6652	1,5371	2,9672	1,8924	0,4300	1,1349
2,7639	1,6282	3,0937	1,9623	0,4247	1,2311
2,8626	1,7238	3,2207	2,0275	0,4205	1,3380
2,9613	1,8246	3,3482	2,0890	0,4177	1,4566
3,0600	1,9312	3,4765	2,1479	0,4164	1,5881
Glg.	(3.1.1,4a)		(3.1.2,3a)		(3.1.3,2a)
Fig.	19	20	21	22	23

Tabelle 18

r/d_{01} bzw. R_1/d_{01}	Parameter : γ = 1,1918				
	$\left\lvert \frac{E_3}{E_0} \right\rvert$	$\measuredangle \frac{E_3}{E_0}$	$\left\lvert \frac{Z}{R_=} \right\rvert$	$\measuredangle \frac{Z}{R_=}$	$\frac{2p}{\sigma_1 \hat{E}_0^2}$
0,0000	1,0000	0,0000	0,6428	-0,8727	1,0000
0,1134	0,9924	0,0065	0,6403	-0,8694	0,9923
0,2268	0,9698	0,0261	0,6330	-0,8595	0,9698
0,3402	0,9331	0,0599	0,6209	-0,8420	0,9339
0,4535	0,8839	0,1096	0,6042	-0,8156	0,8863
0,5669	0,8244	0,1777	0,5834	-0,7780	0,8298
0,6803	0,7575	0,2680	0,5593	-0,7260	0,7672
0,7937	0,6871	0,3859	0,5335	-0,6548	0,7019
0,9071	0,6182	0,5379	0,5087	-0,5589	0,6369
1,0205	0,5569	0,7307	0,4892	-0,4325	0,5754
1,1339	0,5103	0,9670	0,4821	-0,2744	0,5198
1,2472	0,4850	1,2392	0,4960	-0,0936	0,4722
1,3606	0,4847	1,5259	0,5393	0,0867	0,4340
1,4740	0,5076	1,8014	0,6164	0,2390	0,4060
1,5874	0,5475	2,0498	0,7262	0,3457	0,3883
1,7008	0,5972	2,2688	0,8621	0,4033	0,3805
1,8142	0,6505	2,4638	1,0137	0,4178	0,3816
1,9275	0,7031	2,6422	1,1668	0,3991	0,3904
2,0409	0,7522	2,8110	1,3064	0,3588	0,4056
2,1543	0,7965	2,9755	1,4201	0,3088	0,4255
2,2677	0,8356	3,1399	1,5026	0,2593	0,4491
2,3811	0,8701	3,3073	1,5559	0,2186	0,4750
2,4945	0,9015	3,4792	1,5878	0,1901	0,5026
2,6079	0,9315	3,6572	1,6078	0,1758	0,5313
2,7212	0,9621	3,8413	1,6246	0,1746	0,5611
2,8346	0,9956	4,0309	1,6456	0,1840	0,5922
2,9480	1,0339	4,2248	1,6753	0,2008	0,6195
3,0614	1,0783	4,4213	1,7167	0,2215	0,6608
3,1748	1,1299	4,6188	1,7705	0,2428	0,6999
3,2882	1,1887	4,8156	1,8358	0,2621	0,7435
3,4016	1,2548	5,0108	1,9105	0,2776	0,7925
Glg.	(3.1.1,4a)		(3.1.2,3a)		(3.1.3,2a)
Fig.	19	20	21	22	23

Tabelle 19

r/d_{01} bzw. R_1/d_{01}	Parameter : γ = 1,7321				
	$\left\lvert\frac{E_3}{E_0}\right\rvert$	$\measuredangle \frac{E_3}{E_0}$	$\left\lvert\frac{Z}{R_-}\right\rvert$	$\measuredangle \frac{Z}{R_-}$	$\frac{2p}{\sigma_1 \hat{E}_0^2}$
0,0000	1,0000	0,0000	0,5000	-1,0472	1,0000
0,1000	0,9914	0,0050	0,4978	-1,0447	0,9913
0,2000	0,9658	0,0204	0,4913	-1,0369	0,9660
0,3000	0,9241	0,0468	0,4805	-1,0209	0,9289
0,4000	0,8679	0,0860	0,4653	-1,0021	0,8716
0,5000	0,7992	0,1405	0,4458	-0,9758	0,8029
0,6000	0,7209	0,2142	0,4224	-0,9281	0,7375
0,7000	0,6366	0,3133	0,3955	-0,8659	0,6635
0,8000	0,5510	0,4473	0,3666	-0,7767	0,5908
0,9000	0,4704	0,6298	0,3385	-0,6478	0,5214
1,0000	0,4033	0,8761	0,3171	-0,4655	0,4582
1,1000	0,3597	1,1909	0,3124	-0,2268	0,4037
1,2000	0,3478	1,5457	0,3370	0,0370	0,3589
1,3000	0,3667	1,8836	0,3999	0,2661	0,3244
1,4000	0,4065	2,1675	0,5026	0,4194	0,3002
1,5000	0,4554	2,3965	0,6404	0,4920	0,2855
1,6000	0,5050	2,5859	0,8041	0,4957	0,2789
1,7000	0,5497	2,7515	0,9776	0,4457	0,2789
1,8000	0,5866	2,9030	1,1361	0,3571	0,2838
1,9000	0,6145	3,0502	1,2532	0,2514	0,2918
2,0000	0,6331	3,1984	1,3152	0,1491	0,3014
2,1000	0,6435	3,3523	1,3272	0,0667	0,3117
2,2000	0,6474	3,5152	1,3066	0,0127	0,3207
2,3000	0,6472	3,6896	1,2725	-0,0114	0,3291
2,4000	0,6458	3,8768	1,2397	-0,0080	0,3364
2,5000	0,6462	4,0764	1,2183	0,0176	0,3427
2,6000	0,6513	4,2861	1,2149	0,0589	0,3485
2,7000	0,6631	4,5022	1,2331	0,1081	0,3545
2,8000	0,6828	4,7199	1,2739	0,1575	0,3614
2,9000	0,7100	4,9350	1,3361	0,2004	0,3697
3,0000	0,7436	5,1446	1,4157	0,2323	0,3801
3,1000	0,7819	5,3473	1,5073	0,2510	0,3929
Glg.	(3.1.1,4a)		(3.1.2,3a)		(3.1.3,2a)
Fig.	19	20	21	22	23

Tabelle 20

r/d_{01} bzw. R_1/d_{01}	Parameter : γ = 2,7475				
	$\left\lvert \frac{E_3}{E_0} \right\rvert$	$\measuredangle \frac{E_3}{E_0}$	$\left\lvert \frac{Z}{R_=} \right\rvert$	$\measuredangle \frac{Z}{R_=}$	$\frac{2p}{\sigma_1 \hat{E}_0^2}$
0,0000	1,0000	0,0000	0,3420	-1,2217	1,0000
0,1034	0,9854	0,0054	0,3395	-1,2190	0,9854
0,2068	0,9422	0,0220	0,3319	-1,2105	0,9430
0,3101	0,8728	0,0516	0,3191	-1,1948	0,8765
0,4135	0,7805	0,0973	0,3008	-1,1690	0,7920
0,5169	0,6705	0,1655	0,2769	-1,1275	0,6800
0,6203	0,5492	0,2684	0,2473	-1,0592	0,5971
0,7236	0,4256	0,4312	0,2129	-0,9405	0,5016
0,8270	0,3135	0,7075	0,1777	-0,7198	0,4158
0,9304	0,2378	1,1821	0,1562	-0,3159	0,3403
1,0338	0,2302	1,7978	0,1797	0,2085	0,2884
1,1372	0,2812	2,2738	0,2678	0,5641	0,2495
1,2405	0,3506	2,5690	0,4179	0,6958	0,2257
1,3439	0,4144	2,7693	0,6291	0,6682	0,2143
1,4473	0,4620	2,9280	0,8808	0,5112	0,2114
1,5507	0,4904	3,0720	1,0892	0,2559	0,2136
1,6540	0,4989	3,2170	1,1437	-0,0133	0,2175
1,7574	0,4894	3,3746	1,0619	-0,2070	0,2207
1,8608	0,4661	3,5555	0,9607	-0,3002	0,2216
1,9642	0,4352	3,7706	0,8220	-0,3046	0,2198
2,0676	0,4046	4,0290	0,7387	-0,2353	0,2155
2,1709	0,3836	4,3311	0,6970	-0,1093	0,2098
2,2743	0,3795	4,6604	0,7051	0,0443	0,2040
2,3777	0,3943	4,9866	0,7668	0,1857	0,1993
2,4811	0,4239	5,2850	0,8776	0,2818	0,1966
2,5845	0,4606	5,5486	1,0246	0,3191	0,1965
2,6878	0,4971	5,7834	1,1855	0,3007	0,1991
2,7912	0,5282	5,9999	1,3299	0,2399	0,2037
2,8946	0,5509	6,2080	1,4278	0,1572	0,2099
2,9980	0,5644	6,4164	1,4646	0,0760	0,2168
3,1013	0,5697	6,6320	1,4501	0,0154	0,2237
3,2047	0,5694	6,8600	1,4082	-0,0142	0,2302
Glg.	(3.1.1,4a)		(3.1.2,3a)		(3.1.3,2a)
Fig.	19	20	21	22	23

Tabelle 21 (siehe Fig. 24)

r/d_{02} bzw. R_2/d_{02}	Parameter : = 1,1918				
	$\left\lvert \frac{E_3}{E_0} \right\rvert$	$\measuredangle \frac{E_3}{E_0}$	$\left\lvert \frac{Z}{R_=} \right\rvert$	$\measuredangle \frac{Z}{R_=}$	$\frac{2b}{\sigma_2 \hat{E}_0^2}$
1,0000	0,9626	0,0000	0,0000	-1,5708	0,0000
1,1905	0,9112	0,0356	0,5671	-0,9193	0,2615
1,3890	0,7946	0,1544	0,5463	-0,8030	0,3703
1,5874	0,6474	0,3901	0,4908	-0,6244	0,4180
1,7858	0,5243	0,8042	0,4482	-0,3090	0,4011
1,9842	0,4971	1,3821	0,4914	0,1236	0,3723
A = 1,1205 + j 0,6669			B = 1,5401 - j 0,7532		
2,0000	0,8547	0,0000	0,0000	-1,5708	0,0000
2,1827	0,7981	0,0339	0,5011	-0,9962	0,1108
2,3811	0,6790	0,1603	0,5017	-0,8374	0,1812
2,5795	0,5338	0,4316	0,4459	-0,6100	0,2089
2,7779	0,4282	0,9397	0,4105	-0,1956	0,2111
2,9764	0,4476	1,5981	0,5040	0,3161	0,2072
3,1748	0,5802	2,0991	0,7817	0,6047	0,2137
3,3732	0,7453	2,4349	1,1992	0,6464	0,2420
3,5716	0,8955	2,7020	1,6467	0,5365	0,2873
3,7701	1,0133	2,9550	1,9552	0,3687	0,3520
3,9685	1,0983	3,2215	2,0517	0,2307	0,4270
A = -2,6898 + j 2,2202			B = 2,4726 + j 2,1379		
Glg.	(3.1.1,4b)		(3.1.2,3b)		(3.1.3,2b)

Tabelle 22 (siehe Fig. 25)

r/d_{02} bzw. R_2/d_{02}	Parameter : γ = 2,7475				
	$\left\lvert \frac{E_3}{E_0} \right\rvert$	$\measuredangle \frac{E_3}{E_0}$	$\left\lvert \frac{Z}{R_=} \right\rvert$	$\measuredangle \frac{Z}{R_=}$	$\frac{2p}{\sigma_2 \hat{E}_0^2}$
1,0000	0,9149	0,0000	0,0000	-1,5708	0,0000
1,1578	0,8322	0,0253	0,2735	-1,2586	0,1912
1,3232	0,6471	0,1206	0,2519	-1,1642	0,2819
1,4886	0,4095	0,3732	0,1887	-0,9536	0,2822
1,6541	0,2285	1,1829	0,1309	-0,2230	0,2466
1,8194	0,3162	2,2693	0,2417	0,7308	0,2150
1,9848	0,5044	2,6786	0,5684	0,9083	0,2083
A = -0,13065 + j 0,7706			B = 1,9547 - J 0,08605		
2,0000	0,6812	0,0000	0,0000	-1,5708	0,0000
1,1503	0,5993	0,0240	0,2152	-1,3182	0,0564
2,3157	0,4364	0,1297	0,2077	-1,0901	0,0866
2,4811	0,2394	0,4760	0,1421	-0,8765	0,0904
2,6465	0,1575	1,7574	0,1209	0,3282	0,0833
2,8119	0,3127	2,5546	0,3342	0,9848	0,0799
2,9773	0,4747	2,8154	0,7774	0,9793	0,0887
3,1427	0,5781	2,9910	1,5030	0,6054	0,1099
3,3081	0,6091	3,1704	1,7650	-0,0392	0,1331
3,4735	0,5739	3,3986	1,3287	-0,3793	0,1539
3,6389	0,4988	3,7280	0,9696	-0,3818	0,1662
3,8043	0,4346	4,2151	0,7944	-0,1488	0,1701
3,9697	0,4005	4,8082	0,8297	0,1915	0,1713
A = -2,0374 - j 1,0871			B = -1,6450 + j 1,4935		
Glg.	(3.1.1,4b)		(3.1.2,3b)		(3.1.3,2b)

Tabelle 23 (siehe Fig. 19, bzw. 20)

n_1	$\lvert V_n-V_R/V_0-V_R \rvert$ Glg.(3.1.1,4a); Parameter : γ					$\measuredangle V_n-V_R/V_0-V_R$ Glg.(3.1.1,4a); Parameter : γ				
	0	0,5774	1,1918	1,7321	2,7475	0	0,5774	1,1918	1,7321	2,7475
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	1,000	0,992	0,992	0,987	0,963	0,005	0,011	0,006	0,006	0,014
2	1,000	0,972	0,972	0,942	0,853	0,021	0,048	0,025	0,036	0,063
3	1,000	0,945	0,940	0,870	0,686	0,046	0,109	0,055	0,087	0,152
4	1,001	0,903	0,892	0,779	0,499	0,080	0,200	0,100	0,155	0,334
5	1,003	0,861	0,833	0,672	0,307	0,127	0,313	0,166	0,269	0,730
6	1,006	0,819	0,773	0,560	0,228	0,179	0,464	0,243	0,432	1,570
7	1,015	0,785	0,704	0,456	0,298	0,244	0,655	0,348	0,675	2,375
8	1,023	0,766	0,637	0,378	0,407	0,316	0,859	0,497	1,030	2,735
9	1,038	0,767	0,574	0,350	0,479	0,403	1,091	0,652	1,505	3,000
10	1,059	0,792	0,525	0,375	0,500	0,490	1,344	0,870	1,938	3,240
11	1,086	0,848	0,494	0,432	0,475	0,585	1,611	1,120	2,290	3,510
12	1,125	0,920	0,483	0,497	0,427	0,684	1,834	1,415	2,555	3,830
13	1,169	1,002	0,495	0,555	0,387	0,787	2,068	1,660	2,775	4,280
14	1,223	1,101	0,525	0,604	0,385	0,890	2,267	1,930	2,970	4,830
15	1,288	1,218	0,570	0,632	0,422	1,003	2,470	2,165	3,165	5,290
16	1,363	1,345	0,620	0,647	0,485	1,117	2,667	2,350	3,370	5,700
17	1,449	1,475	0,673	0,649	0,538	1,230	2,870	2,525	3,580	6,080
18	1,551	1,607	0,721	0,650	0,565	1,342	3,068	2,690	3,830	6,390
19	1,664	1,755	0,765	0,651	0,573	1,454	3,265	2,845	4,085	6,750
20	1,795	1,923	0,808	0,661	0,573	1,545	3,462	3,010	4,370	7,080
21	1,942		0,847	0,680		1,656		3,170	4,650	
22	2,088		0,878	0,712		1,766		3,350	4,940	
23	2,247		0,908	0,755		1,873		3,500	5,210	
24	2,433		0,935	0,815		1,977		3,690	5,470	
25	2,612		0,968	0,873		2,091		3,870	5,730	
26	2,837		0,998			2,192		4,040		
27	3,069		1,037			2,297		4,210		
28	3,321		1,080			2,393		4,410		
29	3,646		1,130			2,491		4,620		
30	3,984		1,187			2,581		4,810		
31	4,335					2,676				
32	4,706					2,791				
33	5,110					2,894				
34	5,568					2,995				
35	6,032					3,096				
δ	0,1	0,1520	0,1092	0,1316	0,1658	0,1	0,1520	0,1092	0,1316	0,1658

Tabelle 24 N_{11} für $Z_N/(R_N)_=$, $N_{11} + 1/2$ für $2p/\sigma_1 \hat{E}_0^2$

$N_{11}+1/2$ bzw. N_{11}	$\gamma = 1{,}1917$ $\delta = 0{,}1092$			$\gamma = 2{,}7475$ $\delta = 0{,}1658$		
	$\left\lvert \frac{Z_N}{(R_N)_=} \right\rvert$	$\measuredangle \frac{Z_N}{(R_N)_=}$	$\frac{2p}{\sigma_1 \hat{E}_0^2}$	$\left\lvert \frac{Z_N}{(R_N)_=} \right\rvert$	$\measuredangle \frac{Z_N}{(R_N)_=}$	$\frac{2p}{\sigma_1 \hat{E}_0^2}$
0	0,645	-0,875	1,000	0,340	-1,220	1,000
1	0,640	-0,875	0,986	0,335	-1,210	0,935
2	0,637	-0,870	0,960	0,315	-1,185	0,802
3	0,625	-0,845	0,922	0,280	-1,140	0,640
4	0,605	-0,815	0,872	0,230	-1,015	0,485
5	0,585	-0,780	0,813	0,175	-0,710	0,376
6	0,560	-0,735	0,752	0,160	-0,005	0,270
7	0,535	-0,675	0,688	0,305	0,580	0,225
8	0,510	-0,590	0,626	0,595	0,680	0,212
9	0,500	-0,475	0,567	0,995	0,400	0,215
10	0,485	-0,335	0,514	1,140	-0,010	0,221
11	0,490	-0,155	0,469	0,990	-0,275	0,222
12	0,515	0,025	0,433	0,795	-0,300	0,216
13	0,575	0,160	0,406	0,700	-0,150	0,207
14	0,665	0,310	0,389	0,735	0,950	0,199
15	0,775	0,385	0,381	0,890	0,280	0,196
16	0,920	0,415	0,381	1,130	0,305	0,201
17	1,070	0,415	0,389	1,375	0,230	0,211
18	1,200	0,385	0,403	1,470	0,090	0,222
19	1,350	0,345	0,421	1,430	0,000	0,233
20	1,450	0,300	0,443	1,335	-0,040	0,242
21	1,520	0,250	0,468			
22	1,565	0,210	0,494			
23	1,595	0,190	0,522			
24	1,615	0,175	0,550			
25	1,635	0,170	0,580			
26	1,650	0,180	0,611			
27	1,680	0,200	0,644			
28	1,725	0,215	0,680			
29	1,780	0,235	0,720			
30	1,830	0,255	0,764			
Glg.	(3.2.2,2)		(3.2.3,1a)	(3.2.2,2)		(3.2.3,1b)
Fig.	21	22	23	21	22	23

Tabelle 25 (siehe Fig. 24, bzw. 25)

n_2 bzw. $N_{22}+1/2$	Parameter : $\gamma = 1{,}1918$ $\delta = 0{,}1092$					Parameter : $\gamma = 2{,}7475$ $\delta = 0{,}1658$					n_2 bzw. $N_{22}+1/2$
	$\left\lvert\frac{V_n-V_R}{V_0-V_R}\right\rvert$	$\measuredangle\frac{V_n-V_R}{V_0-V_R}$	$\left\lvert\frac{Z_N}{(R_N)_=}\right\rvert$	$\measuredangle\frac{Z_N}{(R_N)_=}$	$\frac{2p}{\sigma_2 \hat{\varepsilon}^2_0}$	$\frac{2p}{\sigma_2 \hat{\varepsilon}^2_0}$	$\measuredangle\frac{Z_N}{(R_N)_=}$	$\left\lvert\frac{Z_N}{(R_N)_=}\right\rvert$	$\measuredangle\frac{V_n-V_R}{V_0-V_R}$	$\left\lvert\frac{V_n-V_R}{V_0-V_R}\right\rvert$	
9,16	0,961	0,000							0,000	0,916	6,03
9,83	0,955	0,007			0,218	0,242			0,021	0,868	6,77
11	0,906	0,045	0,564	-0,880	0,303	0,290	-1,100	0,225	0,120	0,652	8
12	0,856	0,095	0,550	-0,805	0,360	0,270	-0,655	0,148	0,380	0,408	9
13	0,772	0,185	0,528	-0,740	0,400	0,230	0,342	0,165	1,160	0,228	10
14	0,687	0,310	0,493	-0,625	0,420	0,210	0,850	0,380	2,300	0,326	11
15	0,608	0,470	0,463	-0,480	0,414	0,221	0,850	0,730	2,690	0,514	12
16	0,541	0,710	0,448	-0,265	0,400	0,250			2,905	0,652	13
17	0,510	0,995	0,464	-0,025	0,382	0,283			3,100	0,708	14
18	0,500	1,325	0,510	0,198	0,368	0,308			3,315	0,692	15
19	0,519	1,650			0,358						
20	0,587	1,970			0,356						
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
18,3	0,854	0,000							0,000	0,680	12,1
18,9	0,840	0,007			0,076	0,075			0,020	0,620	12,8
20	0,796	0,033	0,520	-0,940	0,130	0,094	-0,990	0,168	0,140	0,428	14
21	0,736	0,081	0,510	-0,860	0,172	0,089	-0,390	0,120	0,518	0,235	15
22	0,662	0,178	0,480	-0,760	0,195	0,082	0,760	0,200	1,855	0,165	16
23	0,580	0,315	0,450	-0,620	0,207	0,085	1,040	0,550	2,570	0,331	17
24	0,510	0,514	0,420	-0,430	0,211	0,101	0,810	1,208	2,835	0,485	18
25	0,450	0,782	0,410	-0,160	0,211	0,125	0,210	1,735	3,000	0,585	19
26	0,417	1,140	0,430	0,150	0,208	0,148	-0,250	1,570	3,185	0,610	20
27	0,434	1,490	0,530	0,380	0,206	0,164	-0,430	1,088	3,430	0,570	21
28	0,496	1,823	0,684	0,550	0,209	0,171	-0,250	0,846	3,755	0,495	22
29	0,580	2,080	0,888	0,650	0,217	0,172	0,040	0,786	4,245	0,430	23
30	0,670	2,290	1,124	0,660	0,233	0,175	0,430	0,900	4,845	0,450	24
31	0,757	2,450	1,374	0,610	0,254	0,184			5,350	0,545	25
32	0,840	2,610	1,605	0,535	0,281	0,202			5,715	0,650	26
33	0,915	2,750	1,848	0,460	0,314	0,225			6,035	0,725	27
34	0,980	2,890	2,000	0,370	0,351	0,250			6,340	0,762	28
35	1,030	3,020	2,035	0,285	0,391	0,275			6,695	0,763	29
36	1,080	3,170	1,995	0,220	0,434	0,291			7,080	0,755	30
37	1,123	3,330	1,845	0,160	0,478						
38	1,163	3,490			0,523						
39	1,200	3,670			0,568						
40	1,235	3,860			0,615						
Glg.	(3.1.1,4b)		(3.2.2,2)		(3.2.3,1b)	(3.2.2,2)			(3.1.1,4b)		Glg.

Tabelle 26 Verhältnis der elektrischen Feldstärke E_3/E_0 [$E_0 = E_3(x=nd=0, y=md=0)$] in einem leitenden Zylinder mit quadratischem Querschnitt (a/b = 1). In den Spalten (15 - 14) ist die Differenz der Feldstärkenverhältnisse $|\{E_3\ (x = 15\ d,\ y = md) - E_3\ (x = 14\ d,\ y = md)\}/E_0|$ als obere Zahl angegeben. Die untere Zahl gibt den Winkel zwischen dieser Feldstärkendifferenz und E_3 (x = 14 d, y = md) in Altgrad. In den übrigen Spalten gibt die obere Zahl $|E_3/E_0|$ und die untere $\measuredangle\ E_3/E_0$ in Altgrad; links oben für $a/d_{01} = 2$, rechts unten für $a/d_{01} = 4$, (vergl. Abschnitt 4.2.1 und Figur 7).

m	15-14	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	n	2=a/d01	
0	0,36 60,3	1,85 96,0	1,65 88,5	1,48 78,0	1,36 66,5	1,24 56,8	1,16 47,0	1,10 38,3	1,06 30,0	1,03 22,2	1,01 15,5	1,01 10,2	1,00 5,70	1,00 2,55	1,00 0,75	1,00 0,00	28,8 244	4,90 45,3	14
1	0,36 60,8	1,86 96,0	1,66 89,0	1,48 78,0	1,35 67,0	1,25 57,0	1,17 47,3	1,11 39,0	1,06 30,8	1,03 22,9	1,02 16,0	1,01 10,6	1,01 6,30	1,00 3,15	1,00 1,32	21,9 228	23,3 237	5,80 50,9	13
2	0,36 61,3	1,88 96,0	1,68 89,5	1,50 78,5	1,37 68,0	1,26 58,0	1,18 48,8	1,12 40,0	1,08 32,7	1,04 24,3	1,02 17,6	1,01 12,4	1,01 8,20	1,00 4,85	16,8 211	19,4 220	22,3 232	6,10 54,0	12
3	0,36 61,7	1,92 97,0	1,71 90,0	1,54 79,2	1,41 69,0	1,29 59,5	1,21 50,1	1,15 41,8	1,10 34,3	1,06 26,8	1,03 20,3	1,02 15,1	1,01 10,8	12,5 192	14,6 202	17,0 214	20,0 228	6,20 56,4	11
4	0,36 62,1	1,97 98,0	1,76 90,5	1,59 80,1	1,46 70,8	1,34 61,0	1,23 52,9	1,18 44,2	1,13 37,0	1,08 30,0	1,05 24,0	1,03 18,6	9,18 173	10,7 183	12,7 196	15,0 210	18,3 225	6,10 57,5	10
5	0,36 62,3	2,03 99,0	1,83 91,0	1,66 82,2	1,52 72,6	1,40 63,8	1,30 55,8	1,23 48,1	1,16 40,6	1,12 34,6	1,08 28,6	6,78 155	7,95 166	9,27 178	11,0 191	13,4 207	16,6 223	5,95 56,7	9
6	0,36 62,4	2,10 101	1,90 91,5	1,73 84,0	1,59 75,8	1,47 66,1	1,37 59,2	1,28 52,0	1,22 45,7	1,16 39,3	4,93 138	5,80 147	6,87 159	8,12 174	9,72 188	12,0 206	15,3 223	5,75 56,1	8
7	0,36 62,6	2,19 102	2,00 92,5	1,82 87,0	1,68 78,7	1,55 70,1	1,44 63,2	1,35 56,9	1,28 50,8	3,75 120	4,22 130	4,98 141	5,94 155	7,13 171	8,75 187	10,9 205	14,2 223	5,50 55,8	7
8	0,36 62,6	2,38 104	2,10 94,5	1,93 89,8	1,78 82,0	1,64 74,7	1,53 68,1	1,43 61,9	2,74 101	3,22 112	3,79 124	4,30 137	5,15 152	6,32 170	7,98 186	10,1 205	13,3 223	5,23 53,2	6
9	0,36 62,4	2,43 106	2,33 97,5	2,06 92,7	1,90 86,5	1,75 79,5	1,63 73,7	2,03 85,0	2,33 92,0	2,76 105	3,29 120	3,90 135	4,60 151	5,75 169	7,37 186	9,52 206	12,8 223	5,15 51,2	5
10	0,35 61,9	2,57 108	2,35 101	2,18 96,5	2,03 91,5	1,88 84,3	1,50 62,0	1,73 73,5	2,00 88,4	2,39 100	2,88 117	3,51 133	4,15 141	5,32 170	6,98 188	9,10 207	12,3 224	5,03 49,6	4
11	0,34 60,9	2,70 111	2,52 104	2,32 100	2,21 96,0	1,18 39,5	1,31 51,5	1,51 66,0	1,78 83,0	2,08 99,0	2,67 116	3,20 134	4,00 151	5,00 171	6,70 189	8,85 208	12,0 225	4,90 48,7	3
12	0,32 59,6	2,90 114	2,69 108	2,50 105	1,04 18,7	1,09 30,0	1,19 44,0	1,14 61,5	1,58 79,5	1,93 100	2,36 116	2,98 134	3,84 152	4,80 171	6,50 190	8,67 208	11,8 225	4,85 48,0	2
13	0,30 57,8	3,09 117	2,88 112	1,00 4,92	1,01 12,0	1,04 23,5	1,12 39,0	1,25 56,7	1,47 77,0	1,80 97,0	2,21 116	2,85 135	3,71 153	4,74 173	6,39 190	8,60 209	11,7 226	4,80 47,7	1
14	0,26 50,3	3,15 121	1,00 0,00	1,00 2,68	1,01 9,75	1,03 21,5	1,10 37,5	1,23 56,0	1,43 76,0	1,76 95,0	2,16 116	2,80 136	3,68 154	4,70 173	6,32 192	8,58 210	11,7 226	4,80 47,7	0
a/d01=4		n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15-14	m

Tabelle 27 Verhältnis der elektrischen Feldstärke E_3/E_0 [$E_0 = E_3(x=nd=0, y=md=0)$] in einem leitenden Zylinder mit rechteckigem Querschnitt (a/b = 2). In der Zeile 7 - 6, bzw. Spalte (13 - 12) ist die Differenz der Feldstärkenverhältnisse $|\{E_3\ (x = nd,\ y = 7d,$ bzw. $x = 13\ d,\ y = md) - E_3\ (x = nd,\ y = 6\ d,$ bzw. $x = 12\ d,\ y = md)\}\ /E_0|$ als obere Zahl angegeben. Die untere Zahl gibt den Winkel zwischen dieser Feldstärkendifferenz und E_3 (x = nd, y = 6 d, bzw. x = 12 d, y = md) in Altgrad. In den übrigen Spalten gibt die obere Zahl $|E_3/E_0|$ und die untere $\measuredangle\ E_3/E_0$ in Altgrad;

für $a/d_{01} = 2$,

(vergl. Abschnitt 4.2.1 und Figur 7).

7 - 6	0,240 76,5	0,240 76,4	0,240 75,7	0,240 74,9	0,240 74,4	0,236 75,9	0,235 76,4	0,231 76,9	0,223 76,8	0,220 74,8	0,206 72,2	0,189 68,8	0,160 62,2	$\frac{a}{d_{01}} = 2$
6	1,06 41,5	1,07 41,5	1,08 42,5	1,11 43,5	1,14 45,6	1,18 47,0	1,25 50,5	1,31 53,0	1,39 57,0	1,48 60,0	1,58 64,5	1,68 69,0	1,81 74,0	0,195 55,8
5	1,01 30,0	1,02 30,1	1,03 31,0	1,06 32,5	1,09 35,0	1,13 37,0	1,18 40,0	1,25 43,0	1,32 47,5	1,39 52,0	1,52 58,0	1,58 62,5	1,73 69,5	0,226 61,8
4	0,99 18,8	1,02 18,8	1,03 20,1	1,06 22,0	1,09 24,5	1,13 28,0	1,18 32,0	1,23 36,0	1,30 41,0	1,38 46,0	1,47 52,0	1,57 58,5	1,68 66,0	0,246 65,6
3	0,99 10,4	1,02 11,5	1,03 12,1	1,05 14,2	1,08 17,4	1,11 20,5	1,13 25,0	1,21 30,0	1,28 35,0	1,34 40,5	1,43 47,0	1,52 55,0	1,63 62,5	0,258 68,0
2	0,99 4,63	1,02 5,00	1,03 6,35	1,04 8,50	1,04 11,5	1,10 15,5	1,14 20,0	1,18 26,0	1,24 31,5	1,31 37,5	1,39 44,5	1,47 52,2	1,58 61,5	0,266 69,1
1	1,00 1,25	1,01 1,67	1,02 3,00	1,03 5,20	1,06 8,40	1,08 12,2	1,13 17,0	1,17 22,0	1,23 28,0	1,29 35,0	1,37 42,2	1,43 51,0	1,56 60,0	0,270 69,4
0	1,00 0,00	1,01 0,53	1,02 1,92	1,03 4,05	1,05 7,20	1,08 11,2	1,11 16,0	1,16 22,0	1,21 28,0	1,27 35,0	1,34 43,0	1,44 51,0	1,55 60,0	0,272 69,5
m / n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-12

Tabelle 28 wie Tabelle 27, jedoch für $a/d_{01} = 4$

7 - 6	1,66 45,9	1,68 45,1	1,69 46,8	1,73 47,8	1,78 50,0	1,85 51,7	1,93 54,1	2,00 56,3	2,08 58,1	2,13 59,0	2,13 59,7	2,03 55,7	1,75 47,4	$\frac{a}{d_{01}} = 4$
6	3,25 126	3,25 126	3,32 126	3,38 126	3,52 125	3,72 124	4,00 123	4,37 123	4,87 124	5,56 126	6,43 131	7,50 136	8,75 144	1,89 43,4
5	2,22 106	2,22 106	2,26 106	2,34 104	2,48 102	2,70 101	3,02 100	3,44 101	3,96 104	4,56 108	5,44 116	6,44 125	7,65 136	2,23 52,0
4	1,52 83,5	1,53 82,5	1,59 81,0	1,68 79,5	1,84 77,5	2,06 75,5	2,38 78,0	2,82 81,0	3,32 86,0	3,94 92,0	4,68 92,0	5,64 115	6,88 131	2,36 56,0
3	1,11 54,0	1,13 54,0	1,20 52,0	1,32 51,0	1,50 51,0	1,75 53,0	2,04 57,0	2,45 62,5	2,90 70,0	3,45 80,0	4,08 93,0	4,96 108	6,13 126	2,40 57,3
2	0,98 25,0	1,00 24,5	1,07 25,0	1,20 26,2	1,38 29,5	1,62 33,8	1,90 40,1	2,24 51,0	2,65 58,0	3,12 69,8	3,72 87,0	4,50 103	5,70 124	2,43 57,4
1	0,98 6,25	1,00 6,70	1,08 7,80	1,21 10,4	1,38 14,8	1,59 20,6	1,85 29,5	2,14 38,5	2,50 49,5	2,94 63,5	3,48 81,0	4,20 100	5,40 122	2,43 57,5
0	1,00 0,00	1,03 0,76	1,10 2,49	1,22 5,15	1,38 9,85	1,59 16,3	1,83 25,0	2,10 35,5	2,46 47,5	2,86 61,5	3,40 79,5	4,10 100	5,25 122	2,43 57,7
m / n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-12